

李林老师考研图书仅在北航出版社出版·李林全家桶之①

考研数学 2026 高等数学辅导讲义

(数学一、二、三通用)

带学一本通

李 林◎编著

重要提示

本书赠完整配套课
基础薄弱考生可无障碍学习

- 紧跟考研趋势
- 归纳总结真题考点及考法



扫码关注作者自媒体
李林老师新浪微博



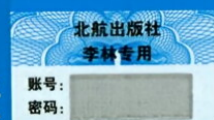
扫码+刮防伪码
看配套课



扫码登录B站
看配套课



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS



2026 考研数学 高等数学辅导讲义

(数学一、二、三通用)

李 林 编著

 本文档**扫码可**在线打印



低至**5**分/页,满**9.9****京东**包邮

内 容 简 介

本书由李林老师根据自己多年在考研数学辅导班的讲义改编而成,是针对全国硕士研究生招生考试高等数学复习的辅导讲义,也可作为非数学专业本科生学习高等数学的参考书。其中各章由四部分组成:考试要求、内容与方法提要、典型例题分析、习题演练及解答。

本书内容与方法全面;题型齐全,覆盖面广,难度适中,循序渐进;直击题目要点,展示解题思路,突出解题方法,旨在帮助广大考生理解高等数学原理,掌握解题方法,提高解题能力。本书与李林《2026 考研数学精讲精练 880 题》配套使用复习效果更佳。

图书在版编目(CIP)数据

2026 考研数学高等数学辅导讲义:数学一、二、三
通用 / 李林编著. -- 北京:北京航空航天大学出版社,
2025. 3. -- ISBN 978-7-5124-4673-1

I. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20257VB005 号

版权所有,侵权必究。

2026 考研数学高等数学辅导讲义(数学一、二、三通用)

李 林 编著

责任编辑 杨 昕

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhzxfs@163.com 邮购电话:(010)82316936

涿州市铭瑞印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:24.5 字数:776 千字

2025 年 3 月第 1 版 2025 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-4673-1 定价:99.80 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前言

本书是针对全国硕士研究生招生考试高等数学复习的辅导讲义，由本人根据多年在考研数学辅导班的讲义改编而成。本书也可作为非数学专业本科生学习高等数学的参考书。

高等数学是考研数学的重要组成部分，本书旨在帮助广大考生理解高等数学原理，掌握解题方法，提高解题能力。

本书各章由四部分组成：①考试要求；②内容与方法提要；③典型例题分析；④习题演练及解答。

本书具有以下特点：

一、内容与方法全面

全面介绍考试内容，细致总结考试中各类题型的解题方法，澄清了易出错的知识点。

二、题型齐全，覆盖面广，难度适中，循序渐进

“典型例题分析”部分中的精选例题力求覆盖考研数学的各种题型，以中等难度题目为主。考虑到考研数学有一些区分度较高的试题，本人也选取了一些难度较大的典型例题，以便考生强化训练，开阔眼界。在编排上，试题难度由浅入深，循序渐进。

三、直击题目要点，展示解题思路，突出解题方法

本书中的例题分析通过对条件与结论之间的逻辑关系的剖析理出解题思路，重点在于启发考生“怎么想”，而不是简单地告诉考生“怎么解”，因为“授之以渔”比“授之以鱼”更重要。

四、紧贴真题，与时俱进

本书新增了一部分 2025 年考研数学真题题型，能帮助考生适应最新的考查趋势，达到事半功倍的复习效果。

本人根据多年考研辅导经验，提出以下三点建议：

1. 考研数学复习的周期较长，考生要坚定信心，持之以恒，循序渐进。
2. 高等数学内容多，考题综合性强，考生应不断总结，反复练习，才能真正掌握它。
3. 把握高等数学主线：高等数学是以极限为基础，建立一元函数微积分学，再将微积分应用到几何和物理上；将一元函数拓展到多元函数，产生多元函数微积分及其应用；通过微分方程将导数和积分应用到解方程上。级数是用极限、导数和积分解决无穷和的问题。

本书适用于参加数学一、数学二、数学三的考生，其内容针对不同分类要求的部分给出了相应说明。本人借鉴和参考了若干国内外的优秀著作，在此向这些作者表示衷心的感谢！

由于本人水平有限，本书仍有很多地方需要改进和提高，恳请广大读者提出宝贵的意见和建议！

最后，衷心祝愿广大考生考上自己理想的学校！

李 林

2025 年 3 月

目 录

第一章 函数、极限、连续	1
第一节 函 数	1
第二节 函数极限	7
第三节 数列极限	21
第四节 函数的连续性	30
习题演练	35
习题演练解答	37
第二章 导数与微分	42
第一节 导数与微分的相关概念	42
第二节 导数与微分的计算	50
习题演练	56
习题演练解答	58
第三章 微分中值定理与泰勒公式	65
第一节 罗尔定理	65
第二节 拉格朗日中值定理	71
第三节 柯西中值定理	75
第四节 泰勒公式	78
习题演练	86
习题演练解答	88
第四章 导数的应用	94
第一节 单调性与极值	94
第二节 凹凸性与拐点	100
习题演练	106
习题演练解答	107
第五章 不定积分	110
第一节 不定积分的概念和性质	110
第二节 不定积分的计算	112
习题演练	122
习题演练解答	122
第六章 定积分及其应用	128
第一节 定积分的计算	128
第二节 积分变限函数的求导问题	140
第三节 积分不等式与积分等式	144
第四节 反常积分	152
第五节 定积分的应用	156
习题演练	162
习题演练解答	165
第七章 微积分在经济学中的应用(仅数学三要求)	174
习题演练	180
习题演练解答	180

第八章 多元函数微分学	183
第一节 多元函数微分学的基本概念	183
第二节 复合函数的偏导数和全微分	187
第三节 隐函数微分法	190
第四节 极值与最值	193
第五节 方向导数与梯度(仅数学一要求)	197
第六节 多元函数微分学的几何应用(仅数学一要求)	202
习题演练	206
习题演练解答	208
第九章 微分方程	217
第一节 微分方程的基本概念	217
第二节 一阶微分方程	217
第三节 可降阶的高阶微分方程(仅数学一、数学二要求)	224
第四节 高阶线性微分方程	225
习题演练	237
习题演练解答	238
第十章 二重积分	248
第一节 二重积分的概念与性质	248
第二节 二重积分的计算	249
第三节 二重积分的对称性	251
第四节 二重积分的应用(仅数学一要求)	263
习题演练	264
习题演练解答	266
第十一章 空间解析几何(仅数学一要求)	271
第一节 向量代数	271
第二节 平面方程与直线方程	273
第三节 曲面方程	275
习题演练	280
习题演练解答	281
第十二章 无穷级数(仅数学一、数学三要求)	286
第一节 常数项级数	286
第二节 幂级数	302
第三节 傅里叶级数(仅数学一要求)	313
习题演练	317
习题演练解答	320
第十三章 三重积分及第一型曲线、曲面积分(仅数学一要求)	330
第一节 三重积分	330
第二节 第一型曲线积分	337
第三节 第一型曲面积分	340
习题演练	344
习题演练解答	345
第十四章 第二型曲线、曲面积分(仅数学一要求)	348
第一节 第二型曲线积分	348
第二节 第二型曲面积分	359
第三节 第二型曲线、曲面积分的奇偶对称性	368
第四节 场论简介	372
习题演练	373
习题演练解答	375
附录 几种常用的图形与曲线	383

第一章 函数、极限、连续

考试要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念, 理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则, 并会利用它们求极限, 掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念, 掌握无穷小量的比较方法, 会用等价无穷小量求极限.
9. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.
10. 理解函数连续性(含左连续与右连续)的概念, 会判别函数间断点的类型.
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性, 理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理), 并会应用这些性质.

第一节 函 数

内容与方法提要

一、函数的基本概念

1. 函数的定义

若 $\forall x \in D \subseteq \mathbf{R}$, 有唯一确定的实数 y 与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y = f(x)$.

注 函数定义中的两个要点: ① 定义域 D ; ② 对应法则 f .

2. 函数的复合运算

设 $y = f(u)$, $u \in D_f$, $u = \varphi(x)$, $x \in D_\varphi$. 当 $u = \varphi(x)$ 的值域是 D_f 的子集时, 称

$$y = f[\varphi(x)] \quad (x \in D_\varphi)$$

为函数 $u = \varphi(x)$ 与 $y = f(u)$ 的复合函数, 称变量 u 为中间变量.

注 函数复合运算用“代入法”.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算且能用一个式子表达的函数, 称为初等函数.

注 ① 由于 $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ 符合初等函数的定义, 故 $f(x)$ 是初等函数.

② 分段函数一般不是初等函数.

4. 几个常用的特殊函数

(1) 取整函数: $y = [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 且 $x - 1 < [x] \leq x$. 如:

$$[3.14] = 3, \quad [-1.9] = -2.$$

(2) 符号函数: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(3) 狄利克雷函数: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

注 狄利克雷函数常用于举反例,例如由函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导不能推得 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续,如 $f(x) = x^2 D(x)$. 又如,由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界不能推出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,如 $f(x) = D(x)$.

5. 基本初等函数

- (1) 幂函数: x^n .
- (2) 指数函数: a^x ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
- (3) 对数函数: $\log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
- (4) 三角函数: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$.
- (5) 反三角函数: $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

二、函数的性质

1. 奇偶性

若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数, 其中 x 为定义域中的任意一点, 且定义域关于原点对称. 例如: $y = \sin x$ 是奇函数, $y = \cos x$ 是偶函数.

2. 有界性

若存在 $M > 0$, $\forall x \in D$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 有界.

注 常见的有界函数.

- | | |
|--|---|
| (1) $ \sin x \leq 1$. | (2) $ \cos x \leq 1$. |
| (3) $ \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$. | (4) $0 \leq \arccos x \leq \pi$. |
| (5) $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$. | (6) $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$. |

3. 周期性

若存在 $T > 0$, $\forall x \in D, x \pm T \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

4. 单调性

若 $f(x)$ 在区间上的任意两点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad [f(x_1) > f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 在区间上单调增加(减少).

典型例题分析

题型一 函数的复合运算

例 1 设 $f(x) = e^x$, $f[\varphi^2(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 的定义域.

分析 求复合函数的中间函数及其定义域.

解 由已知, $e^{\varphi^2(x)} = 1-x$, 故

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)},$$

从而 $\ln(1-x) \geq 0$, 解得 $1-x \geq 1$, 于是 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

例 2 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1, \\ x, & x \geq 1, \end{cases} g(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0, \\ x^2-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

分析 求复合运算, 先采用“代入法”, 再解出自变量的范围.

解

$$f[g(x)] = \begin{cases} e^{g(x)}, & g(x) < 1, \\ g(x), & g(x) \geq 1. \end{cases}$$

(1) 当 $g(x) < 1$ 时, 分情况讨论如下:



若 $x < 0$, 则 $f[g(x)] = e^{x+2}$, $g(x) = x+2 < 1$, 即 $\begin{cases} x < 0, \\ x < -1, \end{cases}$ 故 $x < -1$;

若 $x \geq 0$, 则 $f[g(x)] = e^{x^2-1}$, $g(x) = x^2-1 < 1$, 即 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 < 2, \end{cases}$ 故 $0 \leq x < \sqrt{2}$.

(2) 当 $g(x) \geq 1$ 时, 分情况讨论如下:

若 $x < 0$, 则 $f[g(x)] = x+2$, $g(x) = x+2 \geq 1$, 即 $\begin{cases} x < 0, \\ x \geq -1, \end{cases}$ 故 $-1 \leq x < 0$;

若 $x \geq 0$, 则 $f[g(x)] = x^2-1$, $g(x) = x^2-1 \geq 1$, 即 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 \geq 2, \end{cases}$ 故 $x \geq \sqrt{2}$.

综上所述,

$$f[g(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1, \\ x+2, & -1 \leq x < 0, \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2}, \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

题型二 函数的性质

例 3 判别 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性, 并求其反函数.

分析 利用奇偶性的定义.

解 由

$$(x + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2} - x) = 1, \quad ①$$

知

$$\ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

由 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 有 $x + \sqrt{1+x^2} = e^y$, 又由式 ①, 得 $\sqrt{1+x^2} - x = e^{-y}$.

两式相减, 得 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

例 4 设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 均为常数, 且 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$ 的表达式, 并证明 $f(x)$ 为奇函数.

分析 利用 $f(x)$ 满足的等式求 $f(x)$, 再利用奇函数的定义证明.

解 由已知, 有

$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}. \quad ①$$

在式 ① 中, 用 $\frac{1}{x}$ 替换 x 得

$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx. \quad ②$$

由 ① $\times a$ - ② $\times b$, 得

$$(a^2 - b^2)f(x) = \frac{ac}{x} - bcx.$$

由 $|a| \neq |b|$, 有

$$f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(\frac{a}{x} - bx \right).$$

又因为

$$f(-x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(-\frac{a}{x} + bx \right) = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

例 5 设 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图像关于直线 $x = a$ 与 $x = b$ ($a < b$) 对称, 证明: $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

分析 利用周期函数的定义证明.

证 由 $y = f(x)$ 关于 $x = a$ 与 $x = b$ 对称, 有

$$f(a+x) = f(a-x), \quad f(b+x) = f(b-x),$$

故

$$\begin{aligned} f[x+2(b-a)] &= f[b+(x+b-2a)] = f[b-(x+b-2a)] \\ &= f[a+(a-x)] = f[a-(a-x)] = f(x), \end{aligned}$$

即 $2(b-a)$ 是 $f(x)$ 的周期.

注 ① 若函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称, 则 $f(a+x) = f(a-x)$, 且 $f(a+x)$, $f(a-x)$ 关于 x 是偶函数.

② 若函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(a, 0)$ 对称, 则 $f(a+x) = -f(a-x)$, 且 $f(a+x)$, $f(a-x)$ 关于 x 是奇函数.

例 6 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义, $x_1 > 0, x_2 > 0$, 且 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少, 证明:

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

证 不妨设 $x_1 \leq x_2$, 依题设, 有 $\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1}$, 故 $x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1)$.

由 $\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2}$, 得

$$x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2) \leq x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2),$$

故

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

注 在本例中, 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调增加, 其他条件不变, 则可证明:

$$f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2).$$

题型三 函数性质的综合问题

1. 判别函数奇偶性的方法

(1) 判别函数的奇偶性常用其定义.

(2) $f(x)$ 为可导的奇函数(偶函数) $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数(奇函数).

(3) $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上连续的奇函数(偶函数) $\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是偶函数(奇函数).

证

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f(-u) d(-u) \\ &= \begin{cases} \int_0^x f(u) du = F(x), & f(x) \text{ 为奇函数,} \\ -\int_0^x f(u) du = -F(x), & f(x) \text{ 为偶函数.} \end{cases} \end{aligned}$$

对于 $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ ($a \neq 0$), 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $G(x)$ 是偶函数; 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $G(x)$ 不一定是奇函数. 因为

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = F(x) + \int_a^0 f(t) dt \stackrel{\text{记}}{=} F(x) + C,$$

所以当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x)$ 为奇函数, 但 $F(x) + C$ 不一定为奇函数(当 $C = 0$ 时, $F(x) + C$ 为奇函数).

2. 判别函数有界性的方法

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

说明 由 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在, 根据极限的局部有界性, $f(x)$ 在区间 $(a, a + \delta_1), (b - \delta_2, b)$ ($\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, b - \delta_2 > a + \delta_1$) 内均有界, 而 $f(x)$ 在区间 $[a + \delta_1, b - \delta_2]$ 上连续, 故 $f(x)$ 有界, 从而 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界. 在无穷区间上, 结论仍成立.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 (a, b) 内有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 反之不一定成立. 例如, $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

说明 $\forall x \in (a, b)$, 取 $x_0 \in (a, b)$, 由拉格朗日中值定理, 可知

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0), \quad a < \xi < b,$$

故

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f'(\xi)| |x - x_0|,$$

即 $f(x)$ 有界. 但若将 (a, b) 改为无限区间, 则结论不一定成立.

3. 判别函数周期性的方法

(1) 利用周期性的定义.

(2) 若 $f(x)$ 为可导的周期函数, 则 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的周期.

注 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 不一定是周期函数. 例如, $f(x) = \cos x + 1$ 是以 2π 为周期的周期函数, 但 $\int_0^x (\cos t + 1) dt = \sin x + x$ 不是周期函数.

4. 判别函数单调性的方法

若 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), 且等号仅在有限多个点处成立, 则 $f(x)$ 在区间上单调增加(减少).

例 7 设 $f(x) = -f(-x)$, 且在 $(0, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则在 $(-\infty, 0)$ 内, 下列选项正确的是().

A. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

B. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

C. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

D. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

解 由已知, $f(x)$ 为奇函数, 因此 $f'(x)$ 是偶函数, $f''(x)$ 是奇函数. 由于在 $(0, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 故在 $(-\infty, 0)$ 内, $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, 选项 C 正确.

例 8 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数必为偶函数的是().

A. $\int_0^x f^2(t) dt$

B. $\int_0^x f(t^2) dt$

C. $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt$

D. $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$

解 由 $f(t) + f(-t)$ 是偶函数, 知 $t[f(t) + f(-t)]$ 是奇函数, 故

$$\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$$

是偶函数, 选项 D 正确.

注 ① $f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

② 令

$$g_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad x \in (-a, a),$$

$$g_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad x \in (-a, a),$$

则

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x), \quad x \in (-a, a),$$

即 $f(x)$ 可表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

例 9 函数 $f(x) = \frac{(x^3 - 1)\sin \frac{1}{x}}{x(1 - x^2)}$ 在下列哪个区间内有界().

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-1, 0)$

C. $(0, 1)$

D. $(1, +\infty)$

解 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^3 - 1)\sin \frac{1}{x}}{x(1 - x^2)}.$

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x(1 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - 1} = -1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

同理,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 1)\sin \frac{1}{x}}{x(1 - x^2)} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)\sin \frac{1}{x}}{x(1 - x)(1 + x)} = -\frac{3\sin 1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 - 1)\sin \frac{1}{x}}{x(1 - x^2)}.$$

由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $(x^3 - 1)\sin \frac{1}{x}$ 有界, $x(1 - x^2) \rightarrow 0$.

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.

综上所述, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有界. 选项 D 正确.

例 10 函数 $f(x) = x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是().

A. 无穷小

B. 无穷大

C. 有界量

D. 无界量

解 取 $x_k = 2k\pi$, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $x_k \rightarrow +\infty$, 此时

$$x_k \sin x_k = 2k\pi \cdot \sin(2k\pi) = 2k\pi \cdot 0 = 0 \rightarrow 0.$$

取 $x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $x_k \rightarrow +\infty$, 此时

$$x_k \sin x_k = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 \rightarrow +\infty.$$

故 $f(x) = x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是无界量, 但不是无穷大, 选项 D 正确.

注 无穷大必是无界量, 但无界量不一定是无穷大.

例 11 设 $f(x)$ 有二阶导数, 且 $f(x) = -f(-x)$, $f(x) = f(x+1)$, $f'(1) > 0$, 则().

A. $f''(-5) \leq f'(-5) \leq f(-5)$

B. $f(-5) = f''(-5) < f'(-5)$

C. $f'(-5) \leq f(-5) \leq f''(-5)$

D. $f(-5) < f'(-5) = f''(-5)$

解 由 $f(x)$ 以 1 为周期, 知 $f'(x), f''(x)$ 均以 1 为周期, 又由于 $f(x)$ 是奇函数, 故

$$\begin{aligned} f(-5) &= f(-5+5) = f(0) = 0, \\ f'(-5) &= f'(-5+6) = f'(1) > 0, \\ f''(-5) &= f''(-5+5) = f''(0) = 0. \end{aligned}$$

这里因为 $f'(x)$ 为偶函数, $f''(x)$ 为奇函数, 所以 $f''(0) = 0$, 选项 B 正确.

例 12 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则().

- A. 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数
- B. 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数
- C. 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数
- D. 当 $f(x)$ 是单调增加函数时, $F(x)$ 必是单调增加函数

解 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是偶函数, 选项 A 正确.

当 $f(x)$ 是偶函数且 $a = 0$ 时, $F(x)$ 才是奇函数, 选项 B 不正确.

对于选项 C, 设 $f(x+T) = f(x)$, 则

$$F(x+T) - F(x) = \int_a^{x+T} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_T^{x+T} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt,$$

而

$$\int_T^{x+T} f(t)dt \xrightarrow{t=u+T} \int_0^x f(u+T)du = \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt,$$

故

$$F(x+T) - F(x) = \int_0^T f(t)dt,$$

即 $F(x)$ 以 T 为周期的充分必要条件是 $\int_0^T f(t)dt = 0$.

选项 D 显然不正确, 例如: $f(x) = x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调增加函数, 但 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调增加函数.

例 13 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, $f'(x)$ 单调增加, $f(0) = 0$, 证明: $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, a)$ 内单调增加.

证 由于 $F(x)$ 可导, 故利用导数判别其单调性. 因为

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - [f(x) - f(0)]}{x^2} \\ &\xrightarrow[\text{中值定理}]{\text{拉格朗日}} \frac{xf'(x) - f'(\xi)x}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x} > 0 \quad (0 < \xi < x), \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加.

注 在本例中, 若 $f'(x)$ 单调减少, 其他条件不变, 则可证明: $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, a)$ 内单调减少.

第二节 函数极限

内容与方法提要

一、函数极限的概念

1. 邻域与去心邻域

称 $\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} \stackrel{\text{记}}{=} U(x_0, \delta)$ 为 x_0 的 δ 邻域;

称 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} \stackrel{\text{记}}{=} \dot{U}(x_0, \delta)$ 为 x_0 的去心邻域, 如图 1-1 所示.

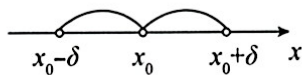


图 1-1

2. 函数极限的定义

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

注 ① 极限的定义是用“距离”刻画的.

② 定义中的 ε 具有任意性, δ 与 X 具有存在性, δ 与 X 一般与 ε 有关.

③ 利用极限定义验证极限的存在性, 关键是证明 δ 或 X 的存在性.

④ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关. 例如:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

3. 函数极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

4. 函数极限的四则运算法则

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2) \lim f(x)g(x) = AB;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

注 极限四则运算法则的条件是充分非必要条件. 例如:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = \infty,$$

极限均不存在, 但极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

存在.

5. 函数极限的复合运算法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 且在 $\dot{U}(x_0)$ 内, $\varphi(x) \neq u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

注 ① 复合运算法则是用变量替换法求极限的依据.

② 若将条件 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ 改为 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$ (连续), 其他条件不变, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)],$$

即函数的复合运算与极限运算交换了顺序, 如: $\lim u^v = \lim e^{v \ln u} = e^{\lim v \ln u}$.

二、函数极限的性质

1. 唯一性

若 $\lim f(x) = A$, 则 A 必唯一.

2. 有界性

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则 $\exists M > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

3. 保号性

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0 (< 0)$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0 (< 0)$.

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A > 0 (< 0)$, 则 $\exists X > 0$, 当 $|x| \geq X$ 时, 有 $f(x) > 0 (< 0)$.

4. 保序性

若 $f(x) > g(x) [f(x) < g(x)]$, 且 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均存在, 则

$$\lim f(x) \geq \lim g(x) [\lim f(x) \leq \lim g(x)].$$

注 有界性与保号性是常用的性质, 应重视. 例如: 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in (0, \delta)$

时, $f(x) > 0$.

三、无穷小与无穷大

1. 无穷小

(1) 无穷小的定义: 若 $\lim f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是无穷小.

(2) 无穷小的运算:

① 有界函数与无穷小之积是无穷小.

② 有限个无穷小之和是无穷小.

③ 有限个无穷小之积是无穷小.

注 这里应注意“有限个”这一条件, 无限个无穷小之和、之积不一定是无穷小.

2. 函数极限与无穷小的关系

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha \quad (\alpha \text{ 为无穷小}).$$

3. 无穷小的比较

设 α, β 是同一变化趋势下的无穷小, 则

(1) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 是比 β 高阶的无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$.

(2) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

(3) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c \neq 0$, 则称 α 与 β 是同阶无穷小.

(4) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = c \neq 0, k > 0$, 则称 α 是关于 β 的 k 阶无穷小.

注 只有当 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ 存在时, α 与 β 才能进行无穷小的比较.

4. 常用的等价无穷小(当 $x \rightarrow 0$ 时)

$$\sin x \sim x \sim \tan x, \quad \arcsin x \sim x \sim \arctan x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad \log_a(1+x) \sim \frac{1}{\ln a}x,$$

$$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad (\mu \text{ 为实数}).$$

5. 等价无穷小代换定理

设在同一极限过程中, $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

6. 等价无穷小代换的原则

(1) 乘、除运算可以用等价无穷小代换.

(2) 加、减运算可以略去高阶无穷小.

(3) 在下列条件下, 加、减运算可以用等价无穷小代换:

(i) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \neq 1$, 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.(ii) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \neq -1$, 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.**注** ① 例如, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.若利用 $\sin x \sim x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$ 是错误的.

事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow[\text{洛必达}]{\text{法}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

加、减运算要满足一定条件才能用等价无穷小代换.

② 例如, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x^2}{x}$.由 $\sin x^2 = o(x)$, 可以略去 $\sin x^2$, 即 $x + \sin x^2 \sim x (x \rightarrow 0)$.故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$.

7. 无穷大

(1) 无穷大的定义: 若 $\lim f(x) = \infty$, 则称 $f(x)$ 是无穷大.

(2) 无穷大与无穷小的关系:

若 $\lim f(x) = 0 [f(x) \neq 0]$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$.

四、函数极限的计算

1. 函数极限的夹逼准则

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x), \\ \lim h(x) = \lim g(x) = a \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = a.$$

2. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e.$$

3. 洛必达法则

法则一:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$(2) f'(x), g'(x) \text{ 在 } \dot{U}(x_0) \text{ 内存在, 且 } g'(x) \neq 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A (\text{或 } \infty),$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A (\text{或 } \infty).$$

法则二:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty;$$

(2) $f'(x), g'(x)$ 在 $\dot{U}(x_0)$ 内存在;

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A (\text{或 } \infty),$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A (\text{或 } \infty).$$

注 ① 法则一、法则二对 $x \rightarrow \infty$ 仍成立.

② 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 (∞ 除外), 则不能用洛必达法则, 应改用其他方法. 如:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right),$$

极限不存在, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0,$$

极限存在.

③ 计算极限时, 经常先利用等价无穷小、变量替换法化简, 再利用洛必达法则求极限.

④ 对数列极限, 若符合 $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 也可以用洛必达法则, 但应改 n (正整数) 为 x (实数), 因为数列是离散的, 所以不能对其求导数.

典型例题分析

题型一 利用两个重要极限求极限

例 1 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \tan x)^{\csc x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (7x - 4) \sin \frac{1}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}.$$

解 (1) 1^∞ 型.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + x - 1)^{\frac{-1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(1 + x - 1)^{\frac{1}{x-1}} \right]^{-1} = e^{-1}.$$

(2) 1^∞ 型. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \tan x)^{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - 2 \tan x)^{-\frac{1}{2 \tan x}} \right]^{-2 \tan x \csc x},$$

且

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-2 \tan x \csc x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = -2,$$

故原式 $= e^{-2}$.

(3) $\infty \cdot 0$ 型.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (7x - 4) \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(7x \sin \frac{1}{x} - 4 \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$= 7 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 7 - 0 = 7.$$

(4) 1^∞ 型. 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{2}} \right]^{\frac{2x^2}{x^2 - 1}},$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$, 故原式 $= e^2$.

例 2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^x.$$

(1) **解法 1** 因为

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1 + \sin x}{\tan x - \sin x}} \right]^{\frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{x^3}}, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \sin x}{(1 + \sin x) \cdot \cos x} \cdot \frac{1}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \sin x) \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以原式 $= e^{\frac{1}{2}}$.

解法 2 利用幂指函数 $u^v = e^{v \ln u}$ 以及等价无穷小代换求解.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^3} \ln \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x}}.$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \left(1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right) \\ &\stackrel{\text{等价}}{\underset{\text{无穷小}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \stackrel{\text{同“解法 1”}}{=} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故原式 $= e^{\frac{1}{2}}$.

(2) **解**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^2 \right]^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \sin \frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{2}{x}}} \right]^{\frac{\sin \frac{2}{x}}{2}} = e^1 = e. \end{aligned}$$

题型二 利用等价无穷小代换求极限

例 3 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} (a > 0, a \neq 1); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{x}{n}}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln a}{x} = \ln a \quad (e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a).$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \stackrel{\arcsin x = t}{x = \sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = 1.$

(4) 利用公式:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

结合有理化,有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{x}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x}{n} [\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1]} = 1.$$

例 4 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x(e^{2x} - 1)};$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right).$

解 (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\cos x - 1)}{x(e^{2x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$

(2) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - 1 + e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - 1 + e^{-x}}{x \cdot x}$
 $\stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x - e^{-x}}{2x} \stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + e^{-x}}{2}$
 $= \frac{3}{2}.$

注 题(2) 是 $\infty - \infty$ 型极限 $\Rightarrow \begin{cases} \text{通分,} \\ \text{提取公因式} \end{cases} \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ 型或 } \frac{\infty}{\infty} \text{ 型}.$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$

分析 此题的关键是处理幂指函数, $u^v = e^{v \ln u}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} (e^{x \ln \frac{2+\cos x}{3}} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \cdot x \ln \frac{2+\cos x}{3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(1 + \frac{2+\cos x}{3} - 1 \right)$
 $\stackrel{\ln(1+x) \sim x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\cos x - 1}{3}$
 $\stackrel{1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{(\arcsin x)^2}.$

分析 一般处理含根号的极限时,常用有理化方法,但此题不适合,应先作恒等变形,再利用等价无穷小代换.

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x - 1 + 1} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x - 1 + 1} - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{2}} - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left[(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{3}} - 1\right]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\cos x - 1)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}\sin^2 x}{x^2} \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

注 此解法将原函数极限拆成两个极限的和,要求每个极限均存在.**例 7** 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$, 其中 $a^2 + c^2 \neq 0$, 则().A. $b = 4d$ B. $b = -4d$ C. $a = 4c$ D. $a = -4c$ **分析** 此例中的分子、分母都是无穷小之和,一般不能直接用等价无穷小代换,但可以略去高阶无穷小.**解** 由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x}{c \ln(1 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot x}{c \cdot (-2x)} = \frac{a}{-2c} = 2,
\end{aligned}$$

故 $a = -4c$, 选项 D 正确.**注** 可以略去高阶无穷小的理由: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
a \tan x + b(1 - \cos x) &\sim a \tan x, \\
c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2}) &\sim c \ln(1 - 2x).
\end{aligned}$$

题型三 利用有理化方法求极限**例 8** 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} \cdot \cos x}{x^2}$.**解**

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x \cdot \cos 2x}{x^2(1 + \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x})} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x \cdot (1 - 2\sin^2 x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot (1 + 2\cos^2 x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

注 求极限时有两点应注意:

① 应先进行函数运算,再进行极限运算. 例如:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

② 原则上对表达式中的所有变量要同时求极限;但对乘法、除法运算,当表达式中每一项极限均存在(分母不为 0)时,可以利用运算法则,先求出一部分极限(如本例).

例9 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} \quad (\text{分子、分母同时除以 } x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注 当分子、分母同时除以 x 时, 由于 $x < 0$, 故根号前有一个负号.

题型四 利用左、右极限求极限

对于分段函数和绝对值函数, 常用左、右极限求其极限. 下面几个常用的左、右极限需要熟知:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- (4) 取整函数. 如 $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$.

例10 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin[a(e^x - 1)]}{e^x - 1}, & x < 0, \\ \frac{2(e^{ax} - 1)}{\ln(1 + 2x)}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin[a(e^x - 1)]}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a(e^x - 1)}{e^x - 1} = a, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(e^{ax} - 1)}{\ln(1 + 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot ax}{2x} = a,\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$.

例11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

解 由于极限表达式中含有 $|x|$ 与 $\frac{1}{x}$, 故分别考虑 $x \rightarrow 0^-, x \rightarrow 0^+$ 的情况.

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{-x} \right) &= 2 - 1 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,\end{aligned}$$

所以原式 = 1.

例12 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x}{e^x + x}$.

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $e^x \rightarrow +\infty, \arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $e^x \rightarrow 0, \arctan x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{e^x} \arctan x}{1 + \frac{x}{e^x}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{2}{\pi} \arctan x}{1 + \frac{e^x}{x}} = 1,$$

所以原式 = 1.

题型五 利用洛必达法则求极限

洛必达法则用于求 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限.

(1) $\infty - \infty$ 型 $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{通分,} \\ \text{提取公因式} \end{cases} \Rightarrow \frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

(2) $0 \cdot \infty$ 型 $\Rightarrow \frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

(3) 0^0 型、 1^∞ 型、 ∞^0 型 $\Rightarrow u^v = e^{v \ln u}$, 其中 1^∞ 型还可以用重要极限.

例13 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

分析 本题是 $\infty - \infty$ 型极限, 提取公因式 x .

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{t} \ln(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

注 提取公因式是求极限时的常用方法, 总结如下:

提取公因式常适用于情形 $\begin{cases} \infty - \infty \text{ 型,} \\ \text{幂函数, 如:} \\ \text{指数函数,} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} - x \right] &\stackrel{\text{通分}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \\ &\stackrel{\text{提取公因式 } x^{\frac{3}{2}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{1+x}{x} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

又如:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} &\stackrel{\text{提取公因式 } e}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1 - e^{\cos x - 1})}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot (1 - \cos x)}{\frac{1}{3}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot \frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3}{2}e. \end{aligned}$$

例14 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

分析 本题极限为 $\frac{0}{0}$ 型,应用洛必达法则时,可先用等价无穷小代换化简.

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \cdot x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cdot \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

注 这里利用了

$$1 - \cos(\sin x) \sim \frac{1}{2} \sin^2 x \quad (x \rightarrow 0).$$

这类复合函数的等价无穷小代换有特殊情形,如:

$$y = \sin u, \quad u = x \sin \frac{1}{x},$$

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \sin u = 0,$$

即 $\sin u$ 与 $u = x \sin \frac{1}{x}$ 均是无穷小,但 $\sin(x \sin \frac{1}{x})$ 与 $x \sin \frac{1}{x}$ 不是等价无穷小. 由于 $\frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}}$ 在

$x = 0$ 的去心邻域内有无穷多个点没有定义,如取 $x = \frac{1}{n\pi}$ (n 充分大),故不能求其极限.

题型六 利用泰勒公式与拉格朗日中值定理求极限

常用的泰勒公式如下:

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3);$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3);$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3);$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2);$$

$$(6) \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3);$$

$$(7) \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3);$$

$$(8) \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

利用泰勒公式求极限的关键是根据题的结构选择展开到第几项.

例15 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+x) - x](e^x - 1)}{x^3}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^4}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}.$$

(1) **解** 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, 故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x\right] \cdot x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

(2) **解** 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x^4 \sim x^4, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

(3) **解法1** 利用拉格朗日中值定理.

$$e^x - e^{\sin x} = e^{\xi}(x - \sin x) \quad (0 < \sin x < \xi < x).$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\xi}(x - \sin x)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\xi} = 1.$$

解法2

$$e^x - e^{\sin x} = e^{\sin x}(e^{x - \sin x} - 1).$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x}(e^{x - \sin x} - 1)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x - \sin x} - 1}{x - \sin x} = 1.$$

例16 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = 1$, 求 a, b, k 的值.

分析 极限是 $\frac{0}{0}$ 型, 用洛必达法则计算量较大, 考虑用泰勒公式, 由于分母是 kx^3 , 故分子只需展开到 x^3 即可.

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] + bx \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]}{kx^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+1)x + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \frac{ax^3}{3} - \frac{bx^4}{6} + o(x^3)}{kx^3} = 1, \end{aligned}$$

故 $a+1=0$, $b - \frac{a}{2}=0$, $\frac{a}{3}=k$, 解得 $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$, $k=-\frac{1}{3}$.

注 $o(x^3) + o(x^4) = o(x^3)$.

题型七 无穷小的比较

例17 (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(e^{\tan x} - e^x)$ 与 x^n 是同阶无穷小, 求 n ;

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1+x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的

无穷小,求 n .

解 (1) 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot (e^{\tan x - x} - 1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x^n},\end{aligned}$$

故当 $n = 3$ 时,上述极限为 $\frac{1}{3}$,从而 $n = 3$.

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时,有

$$(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{x^2}{2} \cdot x^2 = \frac{x^4}{2},$$

$$x \sin x^n \sim x \cdot x^n = x^{n+1}, \quad e^{x^2} - 1 \sim x^2,$$

依题设,有 $4 > n + 1$, $n + 1 > 2$,故 $n + 1 = 3$,即 $n = 2$.

例 18 设 $\alpha(x) = kx^2$, $\beta(x) = \sqrt{1 + x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小,则 $k =$ _____.

解 由等价无穷小的定义,得

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2} \\ &\stackrel{\text{分子有理化}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \arcsin x}{kx^2(\sqrt{1 + x \arcsin x} + \sqrt{\cos x})} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{kx^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{kx^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{3}{4k},\end{aligned}$$

故 $k = \frac{3}{4}$.

例 19 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,将无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排序,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列顺序是().

A. α, γ, β

B. α, β, γ

C. β, γ, α

D. β, α, γ

解法 1 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt}{\int_0^x \cos t^2 dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \arctan x}{\cos x^2} = 0$, 知 β 是比 α 高阶的无穷小.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\gamma} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt}{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \arctan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}}} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0,\end{aligned}$$

即 β 是比 γ 高阶的无穷小,故可排除选项 B、C、D,选项 A 正确.

解法 2 利用求一次导数后,无穷小量的阶数降低 1.

由

$$\left(\int_0^x \cos t^2 dt \right)' = \cos x^2 \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0^+),$$

知 α 是 x 的一阶无穷小.

$$\left(\int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt\right)' = 2x \arctan x \sim 2x^2 \quad (x \rightarrow 0^+),$$

即 β 是 x 的三阶无穷小.

$$\left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}} \sim \frac{1}{2}x \quad (x \rightarrow 0^+),$$

即 γ 是 x 的二阶无穷小.

故正确的排序为 α, γ, β . 选项 A 正确.

题型八 已知极限, 确定参数或求另一个函数的极限

例20 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - ax - b\right) = 0$, 求 a, b 的值.

分析 先通分, 再由题设, 确定 a, b 的值.

解 由

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - ax - b\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x - b}{1+x} = 0,$$

得 $1-a=0$, $-(a+b)=0$, 即 $a=1$, $b=-1$.

例21 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} \cdot (\cos x - b) = 5$, 求 a, b 的值.

解 由已知, 不论 b 取何值, 都有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot (\cos x - b) = 0.$$

若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) \neq 0$, 则已知极限为 0, 而不是 5, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$, 得 $a=1$. 又由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} \cdot (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot (\cos x - b) = 1 - b = 5,$$

得 $b=-4$.

注 由已知极限, 确定参数, 实际上就是极限的计算, 由于有未知参数, 故常用极限的存在性讨论参数, 与此同时, 还需注意计算过程的合理性.

例如 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = 1$, 求 a, b 的值.

解 由于

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} = -\frac{a^3}{6b}, \end{aligned}$$

故 $a^3 = -6b$.

这里第二次用洛必达法则时需要检验它是否是 $\frac{0}{0}$ 型极限. 当 $a \neq 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \cos ax) = 1 - a \neq 0,$$

极限不是 $\frac{0}{0}$ 型, 当然不能用洛必达法则.

正确的解法: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} = 1$, 可知当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$1 - a \cos ax \rightarrow 1 - a,$$

若 $a \neq 1$, 则由分母趋于 0, 可知极限为 ∞ , 与极限是 1 矛盾, 故 $a=1$, 从而有

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-3bx^2} = -\frac{1}{6b},$$

解得 $b = -\frac{1}{6}$.

例22 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{3\varphi(x)}{1 - \cos x} \right]}{e^x - 1} = 9$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\tan x - \sin x}$.

解 由于分母 $\rightarrow 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{3\varphi(x)}{1 - \cos x} \right] = 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\varphi(x)}{1 - \cos x} = 0$. 又当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$e^x - 1 \sim x \sim \tan x, \quad \ln \left[1 + \frac{3\varphi(x)}{1 - \cos x} \right] \sim \frac{3\varphi(x)}{1 - \cos x}.$$

因此依题设, 有

$$9 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3\varphi(x)}{1 - \cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\varphi(x)}{(1 - \cos x) \cdot \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\varphi(x)}{\tan x - \sin x},$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\tan x - \sin x} = 3$.

第三节 数列极限

内容与方法提要

一、数列极限的概念

1. 数列极限的定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

2. 收敛数列与其子列的关系

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 对于 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. 特别地,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = a.$$

3. 海涅(Heine)定理

设 $f(x)$ 在 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件如下:

对任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\} (x_n \neq x_0)$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

注 海涅定理揭示了函数极限与数列极限之间的关系(对 $x \rightarrow \infty$ 也成立), 常用于证明函数极限不存在, 即一般可取两个以 x_0 为极限的数列 x_n , 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 为不同的值, 即可证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在. 如证明

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在, 取 $x_n = 2n\pi \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 有 $f(x_n) = 0$; 取 $x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 有 $f(x'_n) = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在.

二、数列极限的性质

1. 收敛数列的性质

(1) 唯一性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 a 必唯一.

(2) 有界性: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\{x_n\}$ 必有界.

(3) 保号性: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0 (< 0)$, 则 $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, $x_n > 0 (< 0)$.

(4) 保序性: 设 $x_n < y_n (x_n > y_n)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

2. 数列极限存在准则

$$(1) \text{ 夹逼准则: } \begin{cases} z_n \leq x_n \leq y_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

(2) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限, 即单调增加有上界的数列必有极限, 单调减少有下界的数列必有极限.

(3) 证明单调有界的常用方法:

① 若 $x_{n+1} - x_n > 0 (< 0)$, 则 $\{x_n\}$ 单调递增 (单调递减).

② 若 $x_n > 0$, 当 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 (< 1)$ 时, 则 $\{x_n\}$ 单调递增 (单调递减).

若 $x_n < 0$, 当 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 (< 1)$ 时, 则 $\{x_n\}$ 单调递减 (单调递增).

③ 常用不等式:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0), \quad a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$\sin x < x (x > 0), \quad \ln(1+x) < x (x > 0), \quad e^x - 1 > x (x > 0).$$

④ 数学归纳法.

⑤ 拉格朗日中值定理: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, 其中 $a < \xi < b$.

(4) 递推关系: $x_{n+1} = f(x_n)$.

设 $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n), x_n \in I (n = 1, 2, \dots)$.

① 若 $f(x)$ 在 I 上单调递增, 则

当 $x_1 \leq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调递增;

当 $x_1 \geq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调递减.

② 若 $f(x)$ 在 I 上单调递减, 则 $\{x_n\}$ 不单调.

注 ① 当 $x_1 \leq x_2$ 时, 利用数学归纳法, 假设 $x_{n-1} \leq x_n$, 则由 $f(x)$ 单调递增, 有 $x_{n+1} = f(x_n) \geq f(x_{n-1}) = x_n$. 故 $\{x_n\}$ 单调递增. 同理可证, 当 $x_1 \geq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调递减.

② 当 $f(x)$ 在 I 上单调递减时, 则 $\{x_n\}$ 不单调, 可以假设, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 利用 $x_{n+1} = f(x_n)$, 求出 A , 再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 见本节例 9.

(5) 已知一个数列的敛散性, 讨论另一个相关联的数列的敛散性, 常见情形有以下两类:

① 已知 $\{x_n\}$ 的敛散性, 讨论 $\{f(x_n)\}$ 的敛散性.

此类问题常用到数列极限与复合函数极限运算法则, 若有单调性的条件, 则可考虑利用单调有界准则判别敛散性.

例如: 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(a)$.

又如: 设函数 $f(x)$ 单调有界, 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 故 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

但若 $\{f(x_n)\}$ 单调或 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则不能推出 $\{x_n\}$ 收敛.

如: $f(x) = \arctan x$, $f(x)$ 单调有界, 取 $x_n = n$, 则 $f(x_n) = \arctan n$ 单调且收敛, 但 $\{x_n\}$ 不收敛.

② 已知 $\{f(x_n)\}$ 的敛散性, 讨论 $\{x_n\}$ 的敛散性.

若 $f(x)$ 单调, 则可通过其反函数 $f^{-1}(x)$ 讨论.

若 $f(x)$ 不单调, 则对于选择题可举反例进行排除.

三、数列极限的计算

1. 利用定积分的定义求无穷和式的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f \left[a + \frac{(b-a)i}{n} \right] \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx.$$

2. 数列极限计算 (证明) 方法

(1) 变量连续化, 即将 n 换为 x , 将数列极限化为函数极限 (海涅定理).

- (2) 利用夹逼准则.
(3) 利用单调有界准则.
(4) 利用定积分的定义求无穷和式的极限.

典型例题分析

例 1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

分析 1^∞ 型极限, 将 n 换为 x , 再利用重要极限.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \tan \frac{1}{x}\right)^{x^2} \stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \ln \frac{\tan t}{t}},$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \ln \frac{\tan t}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \ln \left(1 + \frac{\tan t}{t} - 1\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \left(\frac{\tan t}{t} - 1\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\tan t - t}{t^3} \stackrel{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}{3t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 t}{3t^2 \cos^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 t}{3t^2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

所以原式 $= e^{\frac{1}{3}}$.

例 2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n} (a > 0)$.

分析 用夹逼准则, 关键是对数列进行适当的放大与缩小.

解 当 $a^n \leq 1$, 即 $0 < a \leq 1$ 时, 有

$$1^{\frac{1}{n}} < (1+a^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}},$$

由于两端极限均为 1, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n} = 1$.

当 $a^n > 1$, 即 $a > 1$ 时, 有

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} < (1+a^n)^{\frac{1}{n}} < (2a^n)^{\frac{1}{n}},$$

由于两端极限均为 a , 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n} = a$.

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n} = \begin{cases} 1, & 0 < a \leq 1, \\ a, & a > 1. \end{cases}$$

注 ① 本题利用了极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$.

② 讨论数列极限时, 常用到无穷大从低阶到高阶的比较:

$$\ln^{\lambda} n (\lambda \geq 1) \rightarrow n^{\alpha} (\alpha > 0) \rightarrow a^n (|a| > 1) \rightarrow n! \rightarrow n^n (n \rightarrow \infty).$$

例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, 可用夹逼准则证明. 由于

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n},$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

$$\textcircled{3} \begin{cases} z_n \leq x_n \leq y_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - z_n) = 0 \end{cases} \nRightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 存在.}$$

原因: $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - z_n) = 0 \nRightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在和 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 存在. 如:

$$x_n = n, \quad y_n = n + \frac{1}{n}, \quad z_n = n - \frac{1}{n}.$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} z_n \leq A \leq y_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - z_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A.$$

证 由条件, 得

$$0 \leq A - z_n \leq y_n - z_n,$$

故由夹逼准则, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - z_n) = 0,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$. 同理, 由

$$0 \leq y_n - A \leq y_n - z_n,$$

可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$.

例 3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n^2+1} + \frac{2}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} \right)$.

分析 数列是分式和的形式, 分子不变, 对分母取小(大) 进行放大(缩小).

解 记 $x_n = \frac{1}{2n^2+1} + \frac{2}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n}$, 则

$$\frac{1}{2n^2+n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2+n} \leq x_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2+1} = \frac{1}{2n^2+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2+n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4},$$

所以原式 $= \frac{1}{4}$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right) f(1)}.$$

分析 取对数, 化“积”为“和”, 再用定积分的定义求之.

解 令 $x_n = \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right) f(1)}$, 则

$$\ln x_n = \frac{1}{n} \left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right) + \ln f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right),$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln f(x) dx,$$

从而原式 $= e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}$.

例 5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

分析 先用夹逼准则, 再用定积分的定义求之.

解 令 $x_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$, 则

$$\frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \leq x_n \leq \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right),$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi},$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi},$$

所以原式 $= \frac{2}{\pi}$.

注 应用定积分的定义求和式极限的公式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx.$$

从 $\frac{b-a}{n}$ 中看出积分区间, 从 $a + \frac{b-a}{n}k$ 中找到 x . 若含 k 的项不能化为 $a + \frac{b-a}{n}k$, 则可用夹逼准则或放大与缩小, 再用定积分的定义, 如本例.

例 6 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

分析 题设条件为递推关系, 考虑用单调有界准则.

解 由 $0 < x_1 < 3$, 可知

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{x_1 + 3 - x_1}{2} = \frac{3}{2},$$

假设 $0 < x_k \leq \frac{3}{2}$ ($k \geq 2$), 则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{x_k + 3 - x_k}{2} = \frac{3}{2},$$

由数学归纳法, 可知 $0 < x_n \leq \frac{3}{2}$ ($n \geq 2$), 故 $\{x_n\}$ ($n \geq 2$) 有界.

再证单调性: 因为当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{x_n(3-x_n)}}{x_n} = \sqrt{\frac{3}{x_n} - 1} \geq \sqrt{2-1} = 1,$$

所以 $\{x_n\}$ ($n \geq 2$) 单调增加, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边同时取极限, 得

$$A = \sqrt{A(3-A)},$$

解得 $A = \frac{3}{2}$, $A = 0$ (舍去), 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

例 7 设 $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$ ($n \geq 0$), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

解 由 $x_0 > 0$, 可知

$$x_1 = \frac{2(1+x_0)}{2+x_0} = \frac{2+2x_0}{2+x_0} > 1,$$

根据数学归纳法, 可知 $x_n > 1$ ($n \geq 1$), 又因为

$$x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n} = 2 \cdot \frac{1+x_n}{2+x_n} < 2,$$

所以 $1 < x_{n+1} < 2$. 由于

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n} - \frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}} = \frac{2(x_n - x_{n-1})}{(2+x_n)(2+x_{n-1})},$$

且分母为正, 故 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号, 从而 $\{x_n\}$ 为单调数列.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a = \frac{2(1+a)}{2+a}$, 解得 $a = \sqrt{2}$, $a = -\sqrt{2}$ (舍去), 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

注 证明 $\{x_n\}$ 的单调性, 也可利用导数.

令 $f(x) = \frac{2(1+x)}{2+x}$, 则

$$f'(x) = \frac{2(2+x) - 2(1+x)}{(2+x)^2} = \frac{2}{(2+x)^2} > 0,$$

故 $f(x)$ 单调增加, 由 $x_{n+1} = f(x_n)$, 若 $x_1 > x_0$, 则 $\{x_n\}$ 为单调增加数列; 若 $x_1 < x_0$, 则 $\{x_n\}$ 为单调减少数列.

例 8 设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$.

(1) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}}$.

解 (1) 由 $x_1 > 0$, 可知 $x_2 = \ln(1+x_1) > 0$, 设 $x_k = \ln(1+x_{k-1}) > 0$, 则 $x_{k+1} = \ln(1+x_k) > 0$, 故由数学归纳法, 可知 $x_n > 0$, 故 $\{x_n\}$ 有下界.

又当 $x_n > 0$ 时, 由

$$x_{n+1} = \ln(1+x_n) < x_n \quad [\ln(1+x) < x, x > 0],$$

可知 $\{x_n\}$ 单调减少, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ 两端同时取极限 ($n \rightarrow \infty$), 得

$$a = \ln(1+a),$$

解得 $a = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \ln(1+x_n)}{x_n - \ln(1+x_n)} \xrightarrow{\text{改 } x_n \text{ 为 } x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x - \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x - \ln(1+x)} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - \frac{1}{1+x}} = 2. \end{aligned}$$

注 由 $\ln(1+a) = a$, 得 $a = 0$, 可用单调性证明 $a = 0$ 是唯一的.

令 $f(x) = x - \ln(1+x)$, 则

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0,$$

故 $f(x)$ 单调增加, $a = 0$ 是唯一的零解.

例 9 设 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 令 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, 则 $x_{n+1} = f(x_n)$, 而 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

故 $\{x_n\}$ 不单调.

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)$, 得 $A = 1 + \frac{1}{A}$, 解得 $A = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 由已知 $1 \leq x_n \leq 2$, 故 $A =$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} (> \frac{3}{2})$, 下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} |x_n - A| &= \left| \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{A}\right) \right| = \left| \frac{x_{n-1} - A}{Ax_{n-1}} \right| \leq \frac{|x_{n-1} - A|}{A} \\ &\leq \frac{2}{3} |x_{n-1} - A| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |x_{n-2} - A| \leq \cdots \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |x_1 - A| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

注 可以验证此题中 $\{x_{2n+1}\}$ 单调递增, $\{x_{2n}\}$ 单调递减.

例10 设 $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} (n \geq 1)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

解 由 $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, 知

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

故

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (x_2 - x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (b-a), \end{aligned}$$

从而

$$x_n = x_1 + \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) = x_1 + (b-a) \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

又因为 $\sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ 是等比数列的和, 且 $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且

$$x_n = a + \frac{2}{3}(b-a) \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b)$.

例11 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - 1) - \ln x_n (n = 1, 2, \cdots)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

证 依题设, 有 $x_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right)$, 下面利用数学归纳法证明 $x_n > 0$.

由已知 $x_1 > 0$, 假设当 $n = k$ 时, $x_k > 0$, 则

$$x_{k+1} = \ln\left(\frac{e^{x_k} - 1}{x_k}\right) > \ln 1 = 0 \quad (\text{这里利用了 } e^x - 1 > x, x > 0).$$

故 $x_n > 0$, 即数列 $\{x_n\}$ 有下界, 下面证明 $\{x_n\}$ 单调递减. 由 $x_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right)$, 知 $e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$. 由拉格朗日中值定理, 有

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - e^0}{x_n - 0} = e^{\xi_n} \quad (0 < \xi_n < x_n).$$

由函数 e^x 单调递增, 知

$$e^{x_{n+1}} = e^{\xi_n} < e^{x_n},$$

从而 $x_{n+1} < x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调递减.

由单调有界准则, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$ 两边取极限 ($n \rightarrow \infty$), 得

$$e^a = \frac{e^a - 1}{a}, \quad \text{即} \quad ae^a - e^a + 1 = 0.$$

显然 $x = 0$ 是方程 $xe^x - e^x + 1 = 0$ 的根, 记 $f(x) = xe^x - e^x + 1$, 则

$$f'(x) = xe^x > 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

故 $x = 0$ 是 $xe^x - e^x + 1 = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上唯一的根.

所以, $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 0$.

例12 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则().

A. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

B. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

C. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

D. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

解法1 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则由 $x + \sin x$ 是连续函数, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = a + \sin a = 0,$$

从而 $x = a$ 是函数 $f(x) = x + \sin x$ 的零点.

又由 $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, 知 $f(x)$ 单调递增, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的唯一零点, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 选项 D 正确.

解法2 记 $f(x) = x + \sin x$, 则 $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, 故 $f(x)$ 是单调递增的可导函数, 从而 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$ 且连续.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$, 知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}[f(x_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(x_n + \sin x_n) \\ &= f^{-1}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n)\right] = f^{-1}(0) = 0, \end{aligned}$$

故选项 D 正确.

对于选项 A, 取 $x_n = \pi + \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.

对于选项 B、C, 取 $x_n \equiv -1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0,$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$, 可排除选项 A、B、C.

例13 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则().

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

B. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

D. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

解 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 记为 a , 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\sin x$ 的反函数为 $\arcsin x$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin[\sin(\cos x_n)] \\ &= \arcsin\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)\right] = \arcsin a. \end{aligned}$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在并不能证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 如取 $x_n = (-1)^n \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, 故

选项 B 不正确, 选项 D 正确.

对于选项 A、C, $\cos x$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上不单调, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在并不能证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在,

如取 $x_n = (-1)^n \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n) = \cos 1$. 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 均不存在, 故排除选项 A、C.

例 14 已知数列 $\{x_n\}$ 发散 ($x_n \neq 0$), 则 ().

- A. $\left\{x_n + \frac{1}{x_n}\right\}$ 发散 B. $\left\{x_n - \frac{1}{x_n}\right\}$ 发散
C. $\left\{e^{x_n} + \frac{1}{e^{x_n}}\right\}$ 发散 D. $\left\{e^{x_n} - \frac{1}{e^{x_n}}\right\}$ 发散

解 记 $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$, 则由 $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$, 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增, 从而存在反函数 $f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增且连续.

记 $y_n = e^{x_n} - \frac{1}{e^{x_n}}$, 则 $y_n = f(x_n)$, 故 $x_n = f^{-1}[f(x_n)] = f^{-1}(y_n)$.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 记为 b , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = f^{-1}(b),$$

即 $\{x_n\}$ 收敛, 与已知条件矛盾, 故 $\left\{e^{x_n} - \frac{1}{e^{x_n}}\right\}$ 发散, 选项 D 正确.

对于选项 A, 取 $x_n = \begin{cases} 2, & n = 2k-1, \\ \frac{1}{2}, & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$, 则 $\{x_n\}$ 发散. 但 $x_n + \frac{1}{x_n} \equiv 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$,

故 $\left\{x_n + \frac{1}{x_n}\right\}$ 收敛.

对于选项 B、C, 取 $x_n = (-1)^n$, 则 $\{x_n\}$ 发散, 但 $x_n - \frac{1}{x_n} \equiv 0$, $e^{x_n} + \frac{1}{e^{x_n}} \equiv e + \frac{1}{e}$, 故 $\left\{x_n - \frac{1}{x_n}\right\}$ 与 $\left\{e^{x_n} + \frac{1}{e^{x_n}}\right\}$ 均收敛, 从而排除选项 A、B、C.

例 15 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $y_{n+1} = y_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, ().

- A. x_n 是 y_n 的高阶无穷小 B. y_n 是 x_n 的高阶无穷小
C. x_n 与 y_n 是等价无穷小 D. x_n 与 y_n 是同阶但不等价无穷小

解 可用数学归纳法证明 $x_n \in (0, 1)$.

当 $n = 1$ 时, $x_1 = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, 假设 $x_k \in (0, 1)$, 则 $x_{k+1} = \sin x_k \in (0, 1)$, 故对任意正整数 n , 有 $x_n \in (0, 1)$, 由 $\sin x$ 的泰勒公式, 有

$$x_{n+1} = \sin x_n = x_n - \frac{1}{6} x_n^3 \cos \xi_n > x_n - \frac{x_n^3}{6} > \frac{x_n}{2},$$

其中 $\xi_n \in (0, x_n)$, 故

$$x_n > \frac{1}{2} x_{n-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 x_{n-2} > \dots > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由 $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_{n+1} = y_n^2$, 知

$$y_n = y_{n-1}^2 = y_{n-2}^4 = \dots = y_1^{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}},$$

$$\text{故 } 0 < \frac{y_n}{x_n} < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}-n}.$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}-n} = 0$, 由夹逼准则, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$, 即 y_n 是 x_n 的高阶无穷小. 选项 B 正确.

第四节 函数的连续性

内容与方法提要

一、函数连续性的概念与性质

1. 函数连续性的定义

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

$f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

2. 连续函数的四则运算

连续函数的和、差、积、商(分母不为 0)是连续函数.

3. 复合函数的连续性

设 $u = \varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 处连续, 则 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

4. 反函数的连续性

设 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续, 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在对应区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上连续, 且与 $y = f(x)$ 具有相同的单调性.

5. 定理

一切初等函数在其定义区间上都是连续函数.

6. 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取得最大值、最小值.

(3) 介值定理: 对任一介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ [$f(a) \neq f(b)$] 之间的实数 C , 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$.

注 若 $m \leq C \leq M$ (M, m 分别为 $f(x)$ 的最大值与最小值), 则存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = C$.

(4) 零点定理: 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

二、函数的间断点

1. 间断点的定义

设函数 $f(x)$ 在 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义, 若 $f(x)$ 具有下列情形之一, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断(不连续):

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

2. 第一类间断点与第二类间断点

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在, 且 x_0 是间断点, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 特别地, 若

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点. 例如: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, 称 $x = 0$ 是 $\frac{1}{x}$ 的无穷间断点; $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 称 $x = 0$ 是 $\sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

典型例题分析

题型一 概念题

例 1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $g(x)$ 有间断点, 讨论下列函数是否必有间断点:

- (1) $f(x) \pm g(x)$; (2) $\frac{g(x)}{f(x)}$; (3) $\frac{f(x)}{g(x)}$; (4) $f[g(x)]$.

解 利用连续函数的定义与运算法则进行判断.

(1) $f(x) \pm g(x)$ 必有间断点.

反证法: 假设 $f(x) \pm g(x)$ 连续, 则 $f(x) \pm g(x) - f(x) = \pm g(x)$ 连续, 这与 $g(x)$ 有间断点矛盾, 因此 $f(x) \pm g(x)$ 不连续.

(2) $\frac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

反证法: 若 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 连续, 则 $f(x) \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = g(x)$ 连续, 这与 $g(x)$ 有间断点矛盾.

(3) $\frac{f(x)}{g(x)}$ 不一定有间断点. 例如: 若 $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)} = x^3 + x$ 连续.

(4) $f[g(x)]$ 不一定有间断点. 例如: 若 $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $f(x) = x^2 + 1$, 则 $f[g(x)] \equiv 2$

连续.

题型二 间断点问题

例 2 求函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)} e^{\frac{1}{x-2}}$ 的间断点, 并指出其类型.

解 $x = 0, x = \pm 1, x = 2$ 是 $f(x)$ 的间断点.

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x(x^2 - 1)} e^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{-\frac{1}{2}}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x(x^2 - 1)} e^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} e^{\frac{1}{x-2}} = -e^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点(跳跃间断点).

由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x(x^2 - 1)} e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} e^{\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{2} e^{-1},$$

故 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点(可去间断点).

由于

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{-x(x^2 - 1)} e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{x+1} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x}{x(x^2 - 1)} e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+1} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty,$$

故 $x = -1, x = 2$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点).

例 3 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解 由 $f(x)$ 在 $x = 0, x = -1, x = 1$ 处无定义, 知它们为 $f(x)$ 的间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \sqrt{1 + x^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \sqrt{1 + x^2} = -1,$$

所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点. 又由于

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 $x = -1$ 是无穷间断点, $x = 1$ 是可去间断点, 选项 B 正确.

注 有的考生误认为 $x = 0$ 是无穷间断点.

例 4 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$, 问当 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续?

分析 先求出 $f(x)$ 的表达式, 再利用连续性确定 a, b 的值.

解

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1, \\ x, & |x| > 1, \\ \frac{a-b-1}{2}, & x = -1, \\ \frac{a+b+1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

选取 a, b , 使得 $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处同时连续. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1),$$

故 $a+b=1, a-b=-1$, 解得 $a=0, b=1$.

注

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \infty, & |x| > 1, \\ 1, & x = 1, \\ \text{不存在}, & x = -1, \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ +\infty, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

例 5 求 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$ 的间断点, 并指出间断点的类型.

解 因为 $f(x) = e^{\lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \cdot \ln \frac{\sin t}{\sin x}}$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \cdot \ln \frac{\sin t}{\sin x} &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \cdot \ln \left(1 + \frac{\sin t}{\sin x} - 1 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \cdot \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}, \end{aligned}$$

所以 $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$.

由 $\sin x = 0$, 得间断点 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

当 $x = 0 (k = 0)$ 时, 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = e,$$

可知 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点(可去间断点).

当 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 极限不存在, 故 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

例 6 设 $f(x) = \frac{e^x - a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x = 0$ 和可去间断点 $x = 1$, 求常数 a .

分析 已知 $f(x)$ 的间断点及类型, 确定参数.

解 由 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点, 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - a}{x(x-1)} = \infty$, 故 $a \neq 1$ [否则 $e^x - 1 \sim x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1].$$

由 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 可知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - a}{x(x-1)}$ 存在, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} (e^x - a) = e - a = 0 \quad (\text{因为分母趋于 } 0),$$

解得 $a = e$.

例 7 $x = \frac{1}{n} (n = 2, 3, \dots)$ 是函数 $f(x) = x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$ 的().

A. 无穷间断点

B. 跳跃间断点

C. 可去间断点

D. 连续点

解 当 $x \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^-$ 时, 有

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, \quad n < \frac{1}{x} < n+1,$$

故 $\left[\frac{1}{x} \right] = n$, 从而有

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^-} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

当 $x \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^+$ 时, 有

$$\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n-1}, \quad n-1 < \frac{1}{x} < n,$$

故 $\left[\frac{1}{x} \right] = n-1$, 从而有

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^+} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = \frac{n-1}{n} < 1.$$

综上所述, $x = \frac{1}{n} (n = 2, 3, \dots)$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 选项 B 正确.

题型三 介值定理与零点定理的应用

例 8 设 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in [0, 2]$, 使得 $f(\xi) = f(3)$.

分析 由 $f(3) = 1$, 利用介值定理证明 $f(\xi) = 1$ 即可.

解 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m , 由

$$m \leq f(0) \leq M, \quad m \leq f(1) \leq M, \quad m \leq f(2) \leq M,$$

得

$$m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M,$$

故由介值定理, 可知至少存在一点 $\xi \in [0, 2]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1 = f(3).$$

例 9 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) = f(b)$, 证明: 存在一点 $x_0 \in [a, b]$, 使得

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{b-a}{2}\right).$$

证法 1 构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{b-a}{2}\right), \quad x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right],$$

则 $F(x)$ 在 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 上连续, 且

$$F(a) = f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad F\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b).$$

若 $f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 则由已知 $f(a) = f(b)$, 得 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b) = 0$, 此时取 $x_0 = a$ 或 $\frac{a+b}{2}$ 即可;

若 $f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, 则由 $f(a) = f(b)$, 知 $F(a)$ 与 $F\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 异号, 故由零点定理可知存在一点 $x_0 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right) \subset [a, b]$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{b-a}{2}\right)$.

证法 2 反证法也是常用方法.

构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{b-a}{2}\right), \quad x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right],$$

若 $F(x)$ 在 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 上无零点, 即不变号, 不妨设 $F(x) > 0$, 当 $x = a$ 时, $F(a) = f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$;

当 $x = \frac{a+b}{2}$ 时, $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b) > 0$, 即

$$f(a) > f\left(\frac{a+b}{2}\right) > f(b),$$

这与已知 $f(a) = f(b)$ 矛盾, 故 $F(x)$ 在 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 上必有零点. 由零点定理可知存在一点 $x_0 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right) \subset [a, b]$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{b-a}{2}\right)$.

例 10 (1) 证明: 方程 $2\ln(1+x) = x$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一实根 ξ ;

(2) 任取 $x_0 > 0$, 令 $x_n = 2\ln(1+x_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

证 (1) 先用零点定理证明方程有实根 ξ , 再用单调性证明唯一性.

设 $f(x) = x - 2\ln(1+x)$, $x \geq 0$, 则

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x}.$$

当 $0 < x < 1$ 时, 由 $f'(x) < 0$, 知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调减少, 故存在一点 $x_1 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_1) < f(0) = 0$. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 2\ln(1+x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{2\ln(1+x)}{x} \right] = +\infty,$$

所以存在一点 $x_2 > 0$ (x_2 充分大), 使得 $f(x_2) > 0$, 从而由零点定理, 知存在一点 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

由 $f'(x) < 0, x \in (0, 1)$; $f'(x) > 0, x \in (1, +\infty)$, 且 $f(0) = 0$, 可知 ξ 是唯一的.

(2) 由(1)知, 在 $(0, \xi)$ 内, $f(x) = x - 2\ln(1+x) < 0$; 在 $(\xi, +\infty)$ 内, $f(x) = x - 2\ln(1+x) > 0$.

任取 $x_0 > 0, x_1 = 2\ln(1+x_0), x_n = 2\ln(1+x_{n-1})$, 下面证 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界.

当 $x_0 < \xi$ 时, $x_0 < 2\ln(1+x_0) = x_1$, 设 $x_{k-1} < x_k$, 则

$$x_k = 2\ln(1+x_{k-1}) < 2\ln(1+x_k) = x_{k+1},$$

故由数学归纳法, 知 $\{x_n\}$ 单调增加.

另外, 因为 $2\ln(1+x)$ 单调增加, 所以对 $\forall x \in (0, \xi)$, 有

$$2\ln(1+x) < 2\ln(1+\xi),$$

从而由 $0 < x_0 < \xi$, 知

$$x_1 = 2\ln(1+x_0) < 2\ln(1+\xi) = \xi,$$

故用数学归纳法易证 $x_n < \xi$, 即 $\{x_n\}$ 有上界, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = 2\ln(1+A)$, 由(1)知 $A = \xi$.

同理可证, 当 $x_0 > \xi$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. 当 $x_0 = \xi$ 时, 结论显然成立, 此时 $x_n = \xi$.

注 应用零点定理的关键是证明 $f(a) \cdot f(b) < 0$ (异号). 常用方法如下:

- ① 计算具体点, $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- ② 利用极限, 主要用到极限的保号性.
- ③ 利用单调性.

习题演练

一、选择题

(1) 下列结论正确的是().

- A. 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都无界, 则数列 $\{x_n y_n\}$ 也无界
- B. 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散, 则数列 $\{x_n y_n\}$ 也发散
- C. 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散, 则数列 $\{x_n \pm y_n\}$ 也发散
- D. 若数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$

(2) 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列结论正确的是().

- A. 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 为无穷小
- B. 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 一定有界
- C. 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 发散
- D. 若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小, 则 $\{y_n\}$ 也为无穷小

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] = ()$.

- A. $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$
- D. $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

(4) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小中, 比其余三个都高阶的无穷小为().

- A. x
- B. $1 - \cos x$
- C. $\arcsin x^2$
- D. $x - \tan x$

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $\tan x - \sin 3x$ 与 ax^b 为等价无穷小, 则().

- A. $a = -2, b = 1$
- B. $a = -1, b = 2$

C. $a = 2, b = -1$

D. $a = 1, b = -2$

二、填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^x - 2^x}{2(1 - \cos x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 函数 $f(x) = \frac{2 - \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ 的跳跃间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

(1) 求下列极限:

(I) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}};$

(II) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\sin x};$

(III) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\sin x - x \cos x};$

(IV) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n} + \left(\frac{x^4}{4}\right)^n}.$

(3) 求下列极限:

(I) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$

(II) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x};$

(III) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2(1 - \cos 2x)}{3x^3 + 4\sin x^2};$

(IV) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}};$

(V) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\arctan \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{1+x}\right);$

(VI) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$

(4) 求下列极限:

(I) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n}\right);$

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1^2}}{n} + \frac{\sqrt{n^2 - 2^2}}{n} + \cdots + \frac{\sqrt{n^2 - n^2}}{n}\right).$

(5) 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{\frac{1}{4}x^2}, & x > 0, \end{cases}$ 当 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续?

(7) 讨论 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ 的间断点, 并指出其类型.

(8) 设 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 求 a, b 的取值范围.

(9) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$, 证明: 存在一点 $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 使得

$$f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) = f(\xi).$$

(10) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $f[f(x)] = x$, 证明: 存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = \xi$.

习题演练解答

一、选择题

(1) D.

解 由于 $\{x_n\}$ 有界, 故存在 $M > 0$, 对一切 n , 有 $|x_n| \leq M$, 从而有

$$|x_n y_n| \leq M |y_n|.$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} M |y_n| = +\infty$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, 选项 D 正确.

对于选项 A 和选项 B, 取

$$x_n = n[1 + (-1)^n], \quad y_n = n[1 - (-1)^n],$$

则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均无界, 但 $x_n y_n \equiv 0$, 故排除选项 A 和选项 B.

对于选项 C, 取

$$x_n = \frac{1}{2}(n+1), \quad y_n = \frac{1}{2}(1-n),$$

则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均发散, 而 $x_n + y_n \equiv 1$, 故 $\{x_n + y_n\}$ 收敛, 排除选项 C.

(2) D.

解 选项 D 正确, 用排除法.

取 $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, $\{x_n\}$ 有界, 但 $\{y_n\}$ 不是无穷小, 故排除选项 A.

取

$$x_n = n[1 + (-1)^n], \quad y_n = n[1 - (-1)^n],$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 但 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均无界, 故排除选项 B.

取 $x_n = n$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, $\{x_n\}$ 发散, $\{y_n\}$ 收敛, 故排除选项 C.

(3) D.

解 由于

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 - f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x) + 2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 + x, & x \geq 0, \\ x^2 + 2, & x < 0, \end{cases}$$

故选项 D 正确.

(4) D.

解 由于

$$x - \tan x = x - \left[x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] = -\frac{x^3}{3} - o(x^3),$$

故选项 D 正确.

(5) A.

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin 3x}{ax^b} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) \right]}{ax^b} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + \frac{x^3}{3} + \frac{3^3 x^3}{3!} + o(x^3)}{ax^b} = 1, \end{aligned}$$

故 $a = -2, b = 1$, 选项 A 正确.

二、填空题

(1) $\frac{1}{2}$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^x - 2^x}{2 \cdot \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot \left[\left(\frac{2+x}{2} \right)^x - 1 \right]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1+\frac{x}{2})} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) 2.

解

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

(3) $\frac{1}{9}$.

解

$$\text{原式} \stackrel{\sqrt[3]{x}=t}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 2t + 1}{(t^3 - 1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{(t^2 + t + 1)^2} = \frac{1}{9}.$$

(4) 12.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}e^{3x} - 1 &\sim 3x, \quad f(x) \sin x \rightarrow 0, \\ \sqrt{1 + f(x) \sin x} - 1 &\sim \frac{1}{2} f(x) \sin x,\end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \sin x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{6} = 2,$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12$.

(5) 0.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 + \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

三、解答题

(1) **解** (I)

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = 1.$$

(II)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{x} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{e}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\tan x - x} - 1}{\sin x - x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\sin x - x \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] - x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x \cos x} \\
 &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x \sin x} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(IV)} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \ln(1+x)](\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1+x \sin x - \cos x} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1+x \sin x - \cos x} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{x \sin x}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}} \\
 &= \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

注 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1+x \sin x - \cos x}$ 也可以利用泰勒公式进行求解.

$$\begin{aligned}
 \text{(2) 解} \quad \text{原式} &= \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n} + \left(\frac{x^4}{4}\right)^n}, & |x| \leq 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^{2n} \left[\frac{1}{x^{2n}} + 1 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \right]}, & 1 < |x| \leq 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{x^4}{4}\right)^n \left[\frac{1}{\left(\frac{x^4}{4}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n} + 1 \right]}, & |x| > 2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ x^2, & 1 < |x| \leq 2, \\ \frac{x^4}{4}, & |x| > 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(3) 解} \quad \text{(I)} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \left(\tan \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{1 - \tan x}{2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1 + \tan x} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{(II)} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 + \sqrt{1-x} - 1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot (-x)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad \text{原式} &\stackrel{\text{略去高阶}}{\underset{\text{无穷小}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2(1 - \cos 2x)}{4\sin x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2(1 - \cos 2x)}{4x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{4x^2} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{4x^2} \\
 &= \frac{5}{4} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(IV)} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \right)^{\frac{n}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n} \cdot \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{nx}} \\
 &= e^{\frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \frac{e^{nx} - 1}{x} \right)} = e^{\frac{n+1}{2}}.
 \end{aligned}$$

(V) 利用拉格朗日中值定理, 有

$$\arctan \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\xi^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{1+\xi^2} \frac{1}{x(1+x)},$$

其中 ξ 介于 $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{x+1}$ 之间, 故原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{x}{x+1} = 1$.

(VI) 由于

$$\text{原式} \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + \cos t)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1 + t^2 + \cos t - 1)^{\frac{1}{t^2 + \cos t - 1}} \right]^{\frac{t^2 + \cos t - 1}{t^2}},$$

且

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + \cos t - 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1 - \cos t}{t^2} \right) = \frac{1}{2},$$

故原式 $= e^{\frac{1}{2}}$.

(4) **解** (I) 由已知, 有

$$\frac{i}{n^2 + 2n} \leq \frac{i}{n^2 + n + i} \leq \frac{i}{n^2 + n + 1}.$$

又因为

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + 2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 2n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + n + 1} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

所以由夹逼准则, 知原式 $= \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1^2}}{n} + \frac{\sqrt{n^2 - 2^2}}{n} + \cdots + \frac{\sqrt{n^2 - n^2}}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n} \right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

(5) 解 根据数学归纳法, 显然有 $x_n > 0$. 由于当 $n \geq 1$ 时, 有

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \geq \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

故 $\{x_n\} (n \geq 2)$ 有下界 1.

又由于当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{1^2} \right) = 1,$$

故 $\{x_n\} (n \geq 2)$ 单调减少, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{A} \right)$, 解得 $A = 1$.

(6) 解 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -6a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2a^2 + 4.$

当 $-6a = 2a^2 + 4$ 时, 解得 $a = -1, a = -2$.

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 6$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

当 $a = -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, 即 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

综上所述, $a = -1$.

(7) 解
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -1, & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -1, \end{aligned}$$

故 $x = \pm 1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

(8) 解 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{a + e^{bx}} = 0$, 可知 $b < 0$. 又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 所以 $a + e^{bx} \neq 0$, 而 e^{bx} 的值域为 $(0, +\infty)$, 因此 $a \geq 0$. 故 $a \geq 0, b < 0$.

(9) 证 令 $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$, 则只需证明 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上必有一个零点.

由已知, $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上连续, 且

$$\begin{aligned} g(0) &= f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0), \\ g\left(\frac{1}{2}\right) &= f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

故 $g(0) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$, 从而由介值定理, 可知存在一点 $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 使得

$$g(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) - f(\xi) = 0.$$

(10) 证 令 $g(x) = f(x) - x$, 由已知 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

用反证法, 假设 $g(x) \neq 0$, 不妨设 $g(x) > 0$, 则

$$g(x) = f(x) - x = f(x) - f[f(x)] = -g[f(x)].$$

由 $g(x) > 0$, 且 $-g[f(x)] < 0$, 可知这与上式矛盾, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有零点, 即存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = \xi$.

第二章 导数与微分

考试要求

1. 理解导数和微分的概念, 理解导数与微分的关系, 理解导数的几何意义, 会求平面曲线的切线方程和法线方程, 了解导数的物理意义, 会用导数描述一些物理量, 理解函数的可导性与连续性之间的关系.
2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则, 掌握基本初等函数的导数公式. 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性, 会求函数的微分.
3. 了解高阶导数的概念, 会求简单函数的高阶导数.
4. 会求分段函数的导数, 会求隐函数和由参数方程所确定的函数, 以及反函数的导数(数学三不要求参数方程求导).
5. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

第一节 导数与微分的相关概念

内容与方法提要

一、导数的概念

1. 导数的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \frac{x_0 + \Delta x = x}{\lim_{x \rightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. 导数的几何意义

导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线切线的斜率, 一般表示变化率, 例如, 瞬时速度 $v(t_0) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0}$, 其中

$s = s(t)$ 表示路程.

3. 切线方程与法线方程

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, 法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

其中 $f'(x_0) \neq 0$.

4. 可导的充分必要条件

$$f'(x_0) \text{ 存在} \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

5. 函数可导性与连续性的关系

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 所以 $f(x)$ 在 x_0 处可导的必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

6. 高阶导数

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x} \quad (n \geq 2).$$

二、微分的概念

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 若函数的增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 记作 $dy|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$, 其中 A 是与 Δx 无关的常数, 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

由此可知 $f'(x_0) = A$, 又 $dx = \Delta x$, 故 $dy|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot dx$.

注 ① 对于一元函数 $y = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处可导与 $f(x)$ 在 x_0 处可微是等价的.

② 由可微的定义, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \\ f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

故

典型例题分析

题型一 与导数定义有关的综合题

例 1 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f(0) = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$.

分析 通过恒等变形将极限化为导数的定义.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right]$$
$$= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).$$

注 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f'_+(0).$

例 2 设 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公切线, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right)$.

解 依题设, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+2} \cdot \frac{f\left(1 + \frac{-2}{n+2}\right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2}} \\ &= -2f'(1) = (-2) \times 1 = -2. \end{aligned}$$

例 3 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0) = 4$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 及 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续 (由 $f''(0) = 4$ 知), 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0.$$

由 $f''(0) = 4$, 即 $4 = f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$, 可知 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内存在, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}} \right\}^{\frac{f(x)}{x^2}},$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2(x - 0)} = \frac{1}{2} f''(0) = 2,$$

故原式 $= e^2$.

注 ① 若 $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 即 $f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数存在, 可以推得 $f(x)$

在 x_0 的某邻域内的一阶导数存在.

② 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x}$ 时不能用洛必达法则, 因为条件 $f''(0) = 4$ 只能说明 $f''(x)$ 在 $x = 0$ 处存在, 不能判断 $f''(x)$ 在 $x = 0$ 的某去心邻域内是否存在.

例 4 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得().

- A. $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加 B. $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少
C. 对任意 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$ D. 对任意 $x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) > f(0)$

解 由已知, 有

$$f'(0) = f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0,$$

根据极限的保号性, 知存在 $\delta > 0$, 对任意 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$, 故选项 C 正确.

注 不要误认为由 $f'(0) > 0$ 可推得在 $x = 0$ 的某邻域内 $f(x)$ 单调增加. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} + x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

求导得

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2\cos \frac{1}{x^2} + 1, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

$f'(0) = 1 > 0$, 但 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的任意去心邻域内并不保持确定的符号, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任意去心邻域内并不是单调函数.

例 5 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则下列错误的是().

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在 D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在及 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续 $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \end{cases}$ 存在, 故排除选项 A、C.

对于选项 B, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(-x)] = 0 = 2f(0)$, 于是 $f(0) = 0$, 排除选项 B, 故选 D.

注 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{f(-x) - f(0)}{-x} \right]$

存在, 不能推出 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{-x}$ 存在, 原因是: 极限的运算法则条件是充分非必要的.

对选项 D, 也可举例说明它是错误的, 如 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处连续、不可导, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |-x|}{x} = 0$.

例 6 设 $y = y(x)$ 在 x 处的增量为 $\Delta y = \frac{y \Delta x}{1 + x^2} + \alpha$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=\pi}}$.

解 由已知, 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{1 + x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 + x^2}$, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=\pi}} = \pi$.

例 7 设函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$, 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1) = (\quad)$.

A. 1

B. 0.1

C. 0.2

D. 0.5

解 增量 Δy 的线性主部为微分 $dy = f'(x) \Delta x$.

$$\Delta y = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

由已知, 有

$$\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = f'(x^2) \cdot 2x \cdot \Delta x, \quad \text{①}$$

将 $x = -1, \Delta x = -0.1$ 代入式 ① 得

$$\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = f'(1) \times 0.2 = 0.1,$$

于是 $f'(1) = 0.5$, 故选项 D 正确.

题型二 利用导数的定义求导

以下情形可用定义求导:

- (1) 求分段函数在分界点处的导数.
- (2) 求绝对值函数在分段点处的导数.
- (3) 求抽象函数的导数.
- (4) 求函数为连乘积形式的导数.
- (5) 求“不能直接代入求导”的函数的导数.

例 8 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(0)$ 在 $x = 0$ 处().

A. 极限不存在

B. 极限存在, 但不连续

C. 连续, 但不可导

D. 可导

分析 分段函数在分界点处的极限、连续性、导数均通过左、右极限来考查.

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 g(x) = 0, \end{aligned}$$

而 $f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x} \cdot x} = 0, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x g(x) = 0, \end{aligned}$$

所以 $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, 故选项 D 正确.

例 9 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 2, f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{\ln(1 + x^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{\ln(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1 + x^2)} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{f(1 - \cos x) - f(0)}{1 - \cos x}.$

由于当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\ln(1 + x^2) \sim x^2, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

故

$$\text{原式} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot f'(0) = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

例10 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x > 0, \\ ax + b, & x \leq 0, \end{cases}$ 且 $g''(0) = 5, g'(0) = 2, g(0) = 1$, 确定 a, b 的值, 使

得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

解 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导知, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处必连续.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - \cos x}{x} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) + \sin x}{1} = g'(0) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = b = f(0).$$

由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 得 $b = 2$.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - \cos x - 2x}{x^2} \\ &\xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) + \sin x - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{g'(x) - g'(0)}{2(x - 0)} + \frac{\sin x}{2x} \right] \\ &= \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} = 3, \end{aligned}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 2 - 2}{x} = a.$$

由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 可知 $a = 3$, 且 $f'(0) = 3$.

注 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) + \sin x - 2}{2x}$ 不能再用洛必达法则, 因为只有 $g''(0) = 5$ 这一条件, 没有 $g''(x)$ 在 $x = 0$ 的去心邻域内存在的条件.

例11 设 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ (n 为正整数), 求 $f'(0)$.

解 利用导数的定义进行求解.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) - 0}{x - 0} \\ &= 1 \times (-1) \times (-2) \cdots [-(n-1)] = (-1)^{n-1} (n-1)!. \end{aligned}$$

例12 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 在 $x = 0$ 的某邻域内满足

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

解 因为 $f(x)$ 以 5 为周期, 所以 $f(6) = f(1), f'(6) = f'(1)$.

切线方程为 $y - f(6) = f'(6)(x - 6)$, 因此只要求出 $f(1)$ 和 $f'(1)$. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [8x + \alpha(x)] = 0,$$

得 $f(1) - 3f(1) = 0$, 故 $f(1) = 0$. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \alpha(x)}{x} = 8,$$

且

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x}{x} \cdot \left[\frac{f(1 + \sin x) - f(1)}{\sin x} + 3 \cdot \frac{f(1 - \sin x) - f(1)}{-\sin x} \right] \right\} \\ &= 4f'(1) = 8, \end{aligned}$$

则 $f'(1) = 2$. 所以切线方程为 $y = 2(x - 6)$, 即 $2x - y - 12 = 0$.

例13 设 $f(x) = e^{x^{\frac{2}{3}}} - 1 - x^{\frac{2}{3}}$, 求 $f'(0)$.

解

$$f'(x) = \frac{2}{3} e^{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad (1)$$

由于 $x = 0$ 不能代入式 ①, 故利用导数的定义进行计算, 有

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^{\frac{2}{3}}} - 1 - x^{\frac{2}{3}} - 0}{x - 0} \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} e^{x^{\frac{2}{3}}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \cdot (e^{x^{\frac{2}{3}}} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} = 0. \end{aligned}$$

注 ① 结论: 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某去心邻域内可导, 且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$, 则 $f'(x_0) = A$.

证

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = A.$$

② 求出 $f'(x)$, $x = 0$ “不能直接代入求导” (没有定义), 不能确定 $f'(0)$ 不存在.

③ “不能直接代入求导” 时, 用下列方法处理:

(i) 用导数的定义进行求解 (如例 13).

(ii) 用结论 ① 进行求解, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, 如上例, 也可用该方法.

(iii) 利用结论 ① 求 $f'(x_0)$, 注意检验条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 否则结论 ① 不一定成立. 另外, 条件 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$, 由极限的定义, 知 $f'(x)$ 在 x_0 的去心邻域内存在, 不能直接确定 $f'(x_0)$ 存在.

例如 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 1$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 1$.

故 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1$.

又

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x-1}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \infty, \end{aligned}$$

故 $f'(0)$ 不存在.

事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0,$$

即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 不能利用结论 ①.

例14 设 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t - |t|, \\ y = |t| \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 求 $f'(x)$, 并证明 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

解 由已知, 有

$$\text{当 } t > 0 \text{ 时, } \begin{cases} x = t, \\ y = t \ln(1+t), \end{cases} \frac{dy}{dx} = \ln(1+t) + \frac{t}{1+t};$$

$$\text{当 } t < 0 \text{ 时, } \begin{cases} x = 3t, \\ y = -t \ln(1+t), \end{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} \ln(1+t) - \frac{1}{3} \frac{t}{1+t};$$

当 $t = 0$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \ln(1+t)}{t} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t \ln(1+t)}{3t} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$.

又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\ln(1+t) + \frac{t}{1+t} \right] = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{3} \ln(1+t) - \frac{1}{3} \frac{t}{1+t} \right] = 0.$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, 从而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

题型三 可导性的常用结论

(1) 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, $y = g(x)$ 在 x_0 处连续但不可导, 则函数 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x_0) = 0$.

说明 若 $f(x_0) = 0$, 由导数的定义有

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ &= f'(x_0)g(x_0). \end{aligned}$$

若 $F'(x_0)$ 存在, 则要证明 $f(x_0) = 0$, 用反证法. 若 $f(x_0) \neq 0$, 则 $g(x) = \frac{F(x)}{f(x)}$ 在 x_0 处可导, 这与 $g(x)$ 在 x_0 处不可导矛盾, 因此, $f(x_0) = 0$.

(2) 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则

① 当 $f(x_0) \neq 0$ 时, $y = |f(x)|$ 在 x_0 处可导.

② 当 $f(x_0) = 0$ 且 $f'(x_0) \neq 0$ 时, $y = |f(x)|$ 在 x_0 处不可导.

③ 当 $f(x_0) = 0$ 且 $f'(x_0) = 0$ 时, $y = |f(x)|$ 在 x_0 处可导, 且 $y'|_{x_0} = 0$.

说明 此结论可以用导数的定义进行证明. 如①, 当 $f(x_0) \neq 0$ 时, 不妨设 $f(x_0) > 0$, 又由于 $f'(x_0)$ 存在, 所以 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有 $f(x) > 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)| - |f(x_0)|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

即 $y = |f(x)|$ 在 x_0 处可导.

(3) 设 $f(x) = (x - x_0)^k |x - x_0|$, 则

① 当 $k = 0$ 时, $f(x) = |x - x_0|$ 在 x_0 处不可导.

② 当 $k = 1$ 时, $f(x) = (x - x_0) |x - x_0|$ 在 x_0 处一阶可导, 但二阶不可导.

③ 一般地, 若 k 为正整数, 则 $f(x)$ 在 x_0 处 k 阶可导, 但 $k + 1$ 阶不可导.

说明 此结论可用导数的定义证明. 如②, 当 $k = 1$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2, & x \geq x_0, \\ -(x - x_0)^2, & x < x_0, \end{cases}$$

则

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x - x_0), & x \geq x_0, \\ -2(x - x_0), & x < x_0, \end{cases}$$

$$f_+'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{2(x-x_0)-0}{x-x_0} = 2,$$

$$f_-'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{-2(x-x_0)-0}{x-x_0} = -2,$$

故 $f''(x_0)$ 不存在.

注 本结论经常在选择題中用到.

(4) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $f(x_0) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导.

证 由 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $f(x_0) \neq 0$, 又由保号性, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) \begin{cases} > 0, & f(x_0) > 0, \\ < 0, & f(x_0) < 0, \end{cases}$$

于是

$$f(x) = \begin{cases} |f(x)|, & f(x_0) > 0, \\ -|f(x)|, & f(x_0) < 0, \end{cases}$$

所以 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

例15 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)[1 - |\ln(1+x)|]$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的().

A. 充分必要条件

B. 充分但非必要条件

C. 必要但非充分条件

D. 既非充分也非必要条件

解 用结论(1).

$$F(x) = f(x)[1 - |\ln(1+x)|] = f(x) - f(x)|\ln(1+x)|,$$

由已知, $f(x)$ 可导, $|\ln(1+x)|$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导, 由结论(1), $f(x)|\ln(1+x)|$ 在 $x = 0$ 处可导的充分必要条件是 $f(0) = 0$, 故选项 A 正确.

例16 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处不可导的充分必要条件是().

A. $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$

B. $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$

C. $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$

D. $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$

解 用结论(1)(2)(3), 可知选项 B 正确. 另外, 也可用特殊函数检验, 如 $f(x) = x$, 在 $x = 0$ 处,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

故选 B.

例17 设 $f(x) = x^5 + x^4|x|$, 使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为().

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

解 第一项 x^5 有任意阶导数, 令 $F(x) = x^4|x|$, 由结论(3)知, $F(x)$ 有四阶导数, 但五阶导数不存在, 故选项 C 正确.

例18 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 不可导点的个数为().

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

分析 此题可去绝对值, 写成分段函数, 在分界点处利用导数的定义判别不可导点的个数, 但用这种方法较烦琐, 用结论(1)、结论(3) 较为方便.

$$f(x) = (x-2)(x+1)|x+1||x||x-1|,$$

由结论(3)知, $(x+1)|x+1|$ 在 $x = -1$ 处可导, 则 $(x-2)(x+1)|x+1|$ 可导, 而 $|x|$, $|x-1|$ 分别在 $x = 0$, $x = 1$ 处不可导, 且 $(x-2)(x+1)|x+1||x-1|$ 在 $x = 0$ 处不为 0, $(x-2) \cdot (x+1)|x+1||x|$ 在 $x = 1$ 处不为 0, 所以由结论(1)知, $f(x)$ 在 $x = 0$, $x = 1$ 处不可导, 故选 B.

注 设 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, 其中 $f(x)$ 在 x_0 处可导, $g(x)$ 在 x_0 处连续但不可导, 则 $f(x_0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件.

第二节 导数与微分的计算

内容与方法提要

一、导数的计算

1. 导数公式

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} (\mu \text{ 为常数}),$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x},$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

$$(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1),$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1),$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x,$$

2. 导数的四则运算法则

设 $u(x), v(x)$ 可导, 则

$$(1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$$

$$(2) [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

$$(3) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} (v(x) \neq 0).$$

注 以上运算法则对有限个函数都成立. 导数公式和导数的四则运算法则可分别改为微分公式和微分的四则运算法则, 如 $d(uv) = u dv + v du$.

3. 复合函数的导数

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 均可导, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

4. 反函数的导数

设 $y = f(x)$ 可导且单调, 其反函数 $x = f^{-1}(y)$, 则 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, 其中 $\frac{dy}{dx} \neq 0$.

注 这里 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 表示同一图形. 若将 $y = f(x)$ 的反函数写成习惯写法 $y = f^{-1}(x)$, 则 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 不一定成立.

5. 由参数方程确定的函数的导数

设函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定, 其中 t 是参数, $x'(t), y'(t)$ 存在且 $x'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

6. 隐函数求导法

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定, 则在方程 $F(x, y) = 0$ 两边同时对 x 求导, 解出 y' 即可.

7. 对数求导法

对于幂指函数或多项乘、除、乘方、开方的函数,可先取对数再求导.

注 幂指函数也常用 $u^v = e^{v \ln u}$ 求导,即先写成指数函数的形式,再求导.

二、高阶导数的计算

1. 高阶导数

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \quad (\text{莱布尼茨公式}).$$

注 下面是几个初等函数的 n 阶导数公式:

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \quad (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n,$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{x+x_0}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+x_0)^{n+1}}, \quad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (x > 0),$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}.$$

2. 反函数的二阶导数

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y},$$

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^2} \cdot \frac{1}{x'_y},$$

其中 y'_x 表示 y 对 x 求导; x'_y 表示 x 对 y 求导.

3. 参数方程的二阶导数

设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2} \cdot \frac{1}{x'(t)}.$$

典型例题分析

题型一 导数与微分的计算

例 1 设 $y = (1+x^2)^{\arctan x}$, 求 y' .

分析 对幂指函数 u^v , 利用 $u^v = e^{v \ln u}$, 再利用复合函数求导.

解

$$y = e^{(\arctan x) \cdot \ln(1+x^2)},$$

$$y' = e^{(\arctan x) \cdot \ln(1+x^2)} \cdot [(\arctan x) \cdot \ln(1+x^2)]'$$

$$= (1+x^2)^{\arctan x} \cdot \left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2} \cdot \arctan x \right].$$

注 复合函数求导,“从外层到内层”逐层求导.

例 2 设 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 确定, f 有二阶导数且 $f' \neq 1$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解 $xe^{f(y)} = e^y$ 两边同时对 x 求导, 有

$$1 \cdot e^{f(y)} + xe^{f(y)} \cdot f'(y) \cdot y' = e^y \cdot y',$$

解得

$$y' = \frac{e^{f(y)}}{e^y - x e^{f(y)} \cdot f'(y)} = \frac{e^{f(y)}}{x e^{f(y)} - x e^{f(y)} \cdot f'(y)} = \frac{1}{x[1 - f'(y)]},$$

$$y'' = \frac{-[1 - f'(y) - x f''(y) \cdot y']}{x^2[1 - f'(y)]^2} = \frac{-[1 - f'(y)]^2 + f''(y)}{x^2[1 - f'(y)]^3}.$$

例 3 设 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 确定, 求 $dy \Big|_{x=0}$.

解法 1 方程两边同时对 x 求导, 有 $2^{xy} \cdot (y + xy') \cdot \ln 2 = 1 + y'$, 解得

$$y' = \frac{1 - 2^{xy} \cdot y \cdot \ln 2}{2^{xy} \cdot x \cdot \ln 2 - 1},$$

当 $x = 0$ 时, $y = 1, y' \Big|_{x=0} = \frac{1 - \ln 2}{-1} = \ln 2 - 1$, 故

$$dy \Big|_{x=0} = y' \Big|_{x=0} \cdot dx = (\ln 2 - 1)dx.$$

解法 2 方程两边同时求微分, 有 $2^{xy}(ydx + xdy)\ln 2 = dx + dy$, 解得

$$dy = \frac{1 - y \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2}{x \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2 - 1} dx.$$

由已知方程, 知当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 所以

$$dy \Big|_{x=0} = (\ln 2 - 1)dx.$$

例 4 设 $y = y(x)$ 由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定, 求 $y''(0)$.

解 方程 $xy + e^y = x + 1$ 两边同时对 x 求导, 有

$$y + xy' + y'e^y = 1, \quad \text{①}$$

两边再同时对 x 求导, 有

$$2y' + xy'' + y''e^y + (y')^2e^y = 0. \quad \text{②}$$

将 $x = 0$ 代入原方程, 得 $y = 0$, 又由式 ①, 知 $y'(0) = 1$, 代入式 ②, 得 $y''(0) = -3$.

例 5 已知 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arctan x^2$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.

解 因为 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$ 由 $y = f(u)$, $u = \frac{3x-2}{3x+2}$ 复合而成, 且 $f'(u) = \arctan u^2$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)' \\ &= f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \frac{3(3x+2) - 3(3x-2)}{(3x+2)^2} \\ &= f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \frac{12}{(3x+2)^2}, \end{aligned}$$

故

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = f'(-1) \cdot 3 = 3\arctan(-1)^2 = \frac{3\pi}{4}.$$

例 6 (数学三不要求) 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

分析 此题是参数方程与隐函数的综合题.

解 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2},$

$$2 \cdot \frac{dy}{dt} - y^2 - 2ty \cdot \frac{dy}{dt} + e^t = 0,$$

解得 $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1 - ty)}$, 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(y^2 - e^t)(1 + t^2)}{2(1 - ty)}.$$

例 7 (数学三不要求) 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1 + u^2) du \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0}$.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\ln(1 + t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1 + t^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d[-e^t \ln(1 + t^2)]}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \left[\frac{-2t}{1 + t^2} \cdot e^t - e^t \ln(1 + t^2) \right] \cdot (-e^t), \end{aligned}$$

故 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = 0$.

例 8 已知 $f'(x) = ae^x$ ($a > 0$ 且为常数), 求 $f(x)$ 的反函数的二阶导数.

解 设 $y = f(x)$, 则 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dy^2} &= \frac{d\left[\frac{dx}{dy}\right]}{dy} = \frac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} \\ &= -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} = -\frac{ae^x}{(ae^x)^3} = -\frac{1}{a^2 e^{2x}}. \end{aligned}$$

例 9 设可导函数 $y = f(x)$ 有反函数 $g(x)$, 且 $f(a) = 3, f'(a) = 1, f''(a) = 2$, 求 $g''(3)$.

解 要利用反函数求导公式, 须改 $g(x)$ 为 $g(y)$, 则

$$f'(x) \cdot g'(y) = 1,$$

两边同时对 x 求导, 有

$$f''(x)g'(y) + f'(x)g''(y) \cdot y' = 0,$$

即

$$f''(x)g'(y) + [f'(x)]^2 \cdot g''(y) = 0, \quad \textcircled{1}$$

由 $g'(3) = \frac{1}{f'(a)} = 1$, 将 $x = a, y = 3$, 及已知条件代入式 ① 得 $g''(3) = -2$.

例 10 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x - 16, & x > 2. \end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

(2) 问 $g(x)$ 是否有间断点、不可导点, 若有, 请指出这些点.

解 (1)

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8. \end{cases}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt[3]{x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\sqrt{\frac{1-x}{2}} \right) = -1,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = g(-1) = -1.$$

于是 $g(x)$ 在 $x = -1$ 处连续, 同样可得

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} g(x) = g(8) = 2,$$

所以 $g(x)$ 在 $x = 8$ 处连续, 从而 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内没有间断点.

下面讨论 $g(x)$ 在 $x = -1, x = 8$ 处的可导性.

$$\begin{aligned} g'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-\sqrt{\frac{1-x}{2}} + 1}{x + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1-x}}{x + 1} = \frac{1}{4}, \\ g'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

故 $x = -1$ 是 $g(x)$ 的不可导点. 同样可求得 $g'_-(8) = g'_+(8) = \frac{1}{12}$, 所以, $x = 8$ 是 $g(x)$ 的可导点.

在 $x = 0$ 处, 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \infty,$$

故 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的不可导点.

注 ① 由 $f'(0) = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0$, 知其反函数的导数 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处不存在.

$$\begin{aligned} \text{② } x^3 + 1 &= (x+1)(x^2 + 1 - x); & x+1 &= (x^{\frac{1}{3}} + 1)(x^{\frac{2}{3}} + 1 - x^{\frac{1}{3}}); \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + b^2 + ab); & a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 + b^2 - ab). \end{aligned}$$

例 11 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

解 由莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

及 $[\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, 得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x^2 \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \cdot \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + \\ &\quad n(n-1) \frac{(-1)^{n-3} \cdot (n-3)!}{(1+x)^{n-2}} \quad (n \geq 3), \end{aligned}$$

所以

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3} n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2} \quad (n \geq 3).$$

注 本题也可用麦克劳林公式,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

于是

$$\begin{aligned} x^2 \ln(1+x) &= x^2 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}) \right] \\ &= x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n-2} + o(x^n), \end{aligned}$$

比较 x^n 的系数, 得 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$, 故

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2} \quad (n \geq 3).$$

例12 已知函数有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解 等式 $f'(x) = [f(x)]^2$ 两边对 x 同时求导, 得

$$f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2[f(x)]^3,$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3[f(x)]^2 \cdot f'(x) = 2 \cdot 3[f(x)]^4,$$

$$f^{(4)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4[f(x)]^3 \cdot f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4[f(x)]^5,$$

由此看出规律, 得 $f^{(n)}(x) = n! [f(x)]^{n+1}$.

注 ① 本题也可用求解微分方程的方法求得 $f^{(n)}(x)$. 因为 $f'(x) = f^2(x)$, 设 $y = f(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} = y^2$, 分离变量得 $\frac{dy}{y^2} = dx$, 两边同时积分, 得 $c - \frac{1}{y} = x$, 故 $y = f(x) = \frac{1}{c-x}$. 易得 $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(c-x)^{n+1}}$, 即 $f^{(n)}(x) = n! [f(x)]^{n+1}$.

② 求 $f^{(n)}(x)$ 的常用方法:

(i) 直接求 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$, 从中找出规律.

(ii) 利用公式 $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$ 和莱布尼茨公式.

(iii) 求一点处的高阶导数, 也可利用泰勒公式或麦克劳林公式

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n,$$

其中 a_n 为 $(x - x_0)$ 的 n 次幂的系数.

例13 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

解 极坐标方程可以化为参数方程:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = \cos \theta - \cos^2 \theta, \\ y = r \sin \theta = \sin \theta - \sin \theta \cos \theta, \end{cases}$$

由 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 得切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{-\sin \theta + 2 \cos \theta \sin \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1,$$

于是切线方程为 $y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}$, 即 $x - y - \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{5}{4} = 0$.

法线方程为 $y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = -\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}\right)$, 即 $x + y - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = 0$.

注 当曲线以极坐标形式给出时, 为求曲线的某条切线的斜率, 一般利用直角坐标与极坐标之间的关系, 将曲线的极坐标方程转化为参数方程, 再求切线的斜率. 特别注意: $r'(\theta_0)$ 不是曲线 $r = r(\theta)$ 在 $\theta = \theta_0$ 对应点处的切线斜率.

题型二 变化率与相关变化率

例 14 如图 2-1 所示, 一动点 P 在曲线 $9y = 4x^2$ 上运动, P 点的横坐标的运动速度为 30 cm/s, 当 P 点经过点 $(3, 4)$ 时, 从原点到 P 点的距离 s 的变化率是多少? (设坐标轴的单位长为 1 cm)

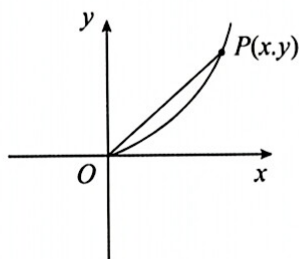


图 2-1

解 依题意, 设 P 点的坐标为 (x, y) , 则 $\frac{dx}{dt} = 30$, $9y = 4x^2$ 两边同时对 t 求导, 有

$$9 \frac{dy}{dt} = 8x \cdot \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8x}{9} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{80}{3}x.$$

又由于 $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, 两边同时对 t 求导, 有

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(30x + \frac{80}{3}xy \right), \quad ①$$

将 $x = 3, y = 4$ 代入式 ①, 得 $\frac{ds}{dt} = 82$, 即 P 点经过点 $(3, 4)$ 时, 从原点到 P 点的距离 s 的变化率为 82 cm/s.

注 在某一变化过程中, 涉及多个变量, 如 x, y 等. 如果这几个变量之间存在某种相互依赖的关系, 而它们又都是另一个变量 t 的可导函数, 则这几个变量以及 t 之间存在等式关系, 这种关系称为相关变化率. 解决相关变化率问题时, 应先建立这几个变量之间的等式关系, 再用复合函数的链式法则对 t 求导.

习题演练

一、选择题

- (1) 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的().
A. 充分必要条件
B. 充分非必要条件
C. 必要非充分条件
D. 既非充分也非必要条件
- (2) 下列函数中, 在 $x = 0$ 处不可导的是().
A. $f(x) = |x| \sin |x|$
B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$
C. $f(x) = \cos |x|$
D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$
- (3) 设 $f(x)$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $f(1+x) = 2f(x)$, 且 $f'(0) = 3$, 则().
A. $f'(1) = 1$
B. $f'(1) = 2$
C. $f'(1) = 6$
D. $f'(1)$ 不存在
- (4) 设曲线 $y = kx^2$ 与 $y = \ln x$ 相切, 则 $k =$ ().
A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{2e}$
C. e
D. $\sqrt{e}$
- (5) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导的一个充分必要条件是().
A. $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(x_0 + \frac{1}{h}\right) - f(x_0) \right]$ 存在
B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ 存在
C. $\lim_{h \rightarrow -\infty} h \left[f\left(x_0 + \frac{1}{h}\right) - f(x_0) \right]$ 存在
D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ 存在
- (6) 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cdot \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则().
A. $\alpha - \beta > 1$
B. $0 < \alpha - \beta \leq 1$

C. $\alpha - \beta > 2$

D. $0 < \alpha - \beta \leq 2$

(7) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充分必要条件为().

A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在

B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在

D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在

二、填空题

(1) 若 $f(x) = x^n$ 过点 $(1, 1)$ 的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \underline{\hspace{2cm}}$.(2) 设 $f(x) = x^3 + x^2 \cdot |x|$, 则 $f(x)$ 的最高阶导数 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.(3) 设 $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-100)$, 则 $f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.(4) 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.(5) 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.(6) (仅数学一、数学二要求) 已知曲线的极坐标方程为 $r = 1 - \cos \theta$, 则该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线的直角坐标方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.(7) 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 点处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(1) 求下列函数的导数或微分:

(I) $y = \frac{e^x \sin x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 y' ;

(II) $y = (1+x^2)^{\sqrt{x}} (x > 0)$, 求 y' ;

(III) 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$;

(IV) 设 $x = y^y$, 求 dy ;

(V) (仅数学一、数学二要求) 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ 2y - ty^2 = 5 - e^t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(VI) 设 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, 且 $f'(x) = \arcsin x^2$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.

(2) 求高阶导数:

(I) 设 $y = e^x \sin x$, 求 $y^{(n)}(x)$;

(II) 设 $y = x^2 \ln(1+x)$, 求 $y^{(10)}(0)$;

(III) 设 $f(x) = \frac{5x-1}{2x^2+x-1}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

(3) 设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, $|a| \neq |b|$, 求 $f'(x)$.

(4) 设 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) \right]$.

(5) 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 1, \varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0, \\ k, & x = 0, \end{cases}$ $\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(I) 求 k 的值;(II) 证明: $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(6) 求函数 $f(x) = (x-1)|x^2+x-2|$ 的不可导点.

(7) 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0}$.

习题演练解答

一、选择题

(1) A.

解 利用结论, $f(x)$ 可导, $|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导(但连续), 故 $f(x) \cdot |\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是 $f(0)=0$.

(2) D.

解 由导数的定义, 知

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = -\frac{1}{2},$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = \frac{1}{2},$$

故 $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导, 所以选项 D 正确.

(3) C.

解

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 2f(0)}{x} = 2f'(0) = 2 \times 3 = 6.$$

(4) B.

解 令切点为 $P(x_0, y_0)$, 则由已知, 有 $\begin{cases} 2kx_0 = \frac{1}{x_0}, \\ kx_0^2 = \ln x_0, \end{cases}$ 解得 $x_0 = \sqrt{e}$, 故 $k = \frac{1}{2e}$, 选项 B 正确.

(5) B.

解

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = f'(x_0).$$

(6) A.

分析 先求出 $f'(x)$, 由于 $f(x)$ 为分段函数, 故在 $x=0$ 处, 用导数的定义进行计算.

解 当 $x=0$ 时, 有

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cdot \cos \frac{1}{x^\beta}.$$

由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 可得 $\alpha-1 > 0$, 且 $f'_+(0) = 0$, 故 $f'(0) = 0$.

当 $x > 0$ 时, 有

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + x^\alpha \left(-\sin \frac{1}{x^\beta} \right) (-\beta x^{-\beta-1})$$

$$= \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \cdot \sin \frac{1}{x^\beta}.$$

当 $x < 0$ 时, 有 $f'(x) = 0$.

若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \cdot \sin \frac{1}{x^\beta} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \beta x^{\alpha-\beta-1} \cdot \sin \frac{1}{x^\beta} = f'(0) = 0,\end{aligned}$$

可得 $\alpha-1 > 0$, $\alpha-\beta-1 > 0$, 故选项 A 正确.

(7)B.

解 由 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 可推出选项 A、B、C、D 中的极限均存在, 即

$$\text{对于选项 A, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h) - f(0)}{1 - \cos h} \cdot \frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2} f'(0).$$

$$\text{对于选项 B, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h) - f(0)}{1 - e^h} \cdot \frac{1 - e^h}{h} = (-1) \cdot f'(0) = -f'(0).$$

$$\text{对于选项 C, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h) - f(0)}{h - \sin h} \cdot \frac{h - \sin h}{h^2} = f'(0) \cdot 0 = 0.$$

$$\text{对于选项 D, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[2 \cdot \frac{f(2h)}{2h} - \frac{f(h)}{h} \right] = 2f'(0) - f'(0) = f'(0).$$

故选项 A、B、C、D 存在是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的必要条件, 但选项 A、C、D 不是充分条件.

对于选项 A, 当 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{h^2}$ 存在时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不一定可导. 例如, $f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1 - \cos h|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2},$$

即 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{h^2}$ 存在, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

同样, 选项 C 也不是充分条件, 例如, 对于函数 $f(x) = |x|$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h - \sin h|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{h^3}{3!} + o(h^3) \right|}{h^2} = 0,$$

但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

选项 D 的反例: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续, 所以不可导, 但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0,$$

即 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 存在, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

对于选项 B, 若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h}$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{1 - e^h} \cdot \frac{1 - e^h}{h} = -f'(0)$, 故选项 B 正确.

二、填空题

(1) $\frac{1}{e}$.

解 $f'(x) = nx^{n-1}$, $f'(1) = n$, 切线方程为 $y - 1 = n(x - 1)$.

令 $y = 0$, 得 $x = \xi_n = 1 - \frac{1}{n}$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}.$$

(2) 2.

解 由结论, 知 $n = 2$.(3) $98!$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2) \cdots (x-100) - 0}{x-2} = 98!. \end{aligned}$$

(4) $n! \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(x) &= \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{2} \right)^n + o(x^n) \right] - \\ &\quad \frac{1}{3} \left[1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{3} \right)^n + o(x^n) \right], \end{aligned}$$

故

$$f^{(n)}(0) = n! a_n = n! \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right).$$

(5) -2 .**解** 由已知, $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+2} \cdot \frac{f\left(1 + \frac{-2}{n+2}\right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2}} \\ &= -2f'(1) = -2. \end{aligned}$$

$$(6) x - y + \frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = 0.$$

解 曲线 $r = 1 - \cos \theta$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta, \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta. \end{cases}$$

令 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 得切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 切线斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{\cos \theta - \cos 2\theta}{-\sin \theta + \sin 2\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1,$$

故切线方程为 $y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)$, 即

$$x - y + \frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = 0.$$

$$(7) x + y = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}.$$

$$\text{解} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1,$$

故法线方程为 $y - \ln\sqrt{2} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 即

$$x + y = \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}.$$

三、解答题

(1) **解** (I) 利用对数求导法.

$$\ln y = \ln e^x + \ln \sin x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{x}{1+x^2},$$

故

$$y' = \frac{e^x \sin x}{\sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{x}{1+x^2}\right).$$

(II)

$$\ln y = \sqrt{x} \ln(1+x^2),$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(1+x^2) + \frac{2x\sqrt{x}}{1+x^2},$$

故

$$y' = (1+x^2)^{\sqrt{x}} \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{2x\sqrt{x}}{1+x^2} \right].$$

(III) $e^y + xy = e$ 两边同时对 x 求导, 得

$$e^y \cdot y' + xy' + y = 0,$$

①

$$\text{解得 } y' = \frac{-y}{e^y + x}.$$

式①两边同时再对 x 求导, 得

$$e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y'' + y' + xy'' + y' = 0.$$

将 $x=0, y=1, y'(0)=-e^{-1}$ 代入上式, 得

$$y''(0) = -e^{-2} + 2e^{-2} = e^{-2}.$$

(IV) $x = y^y$, 取对数 $\ln x = y \ln y$, 两边同时对 x 求导, 得

$$\frac{1}{x} = y' \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y',$$

$$\text{可求得 } y' = \frac{1}{x(1+\ln y)}, \text{ 故 } dy = \frac{dx}{x(1+\ln y)}.$$

(V) 此题是隐函数与参数方程求导的综合题.

$$\begin{cases} x = \arctan t, \\ 2y - ty^2 = 5 - e'. \end{cases}$$

①

②

由式②, 得

$$2y' - (y^2 + t \cdot 2y \cdot y') = -e',$$

$$\text{解得 } y' = \frac{y^2 - e'}{2 - 2ty}. \text{ 又 } x' = \frac{1}{1+t^2}, \text{ 故}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+t^2)(y^2 - e')}{2 - 2ty}.$$

$$(VI) y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right), \text{ 令 } t = \frac{3x-2}{3x+2}, \text{ 则}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{3(3x+2) - 3(3x-2)}{(3x+2)^2},$$

当 $x = 0$ 时, $\frac{dt}{dx} = 3$. 由已知

$$y' = \frac{dt}{dx} \cdot \arcsin t^2 = \frac{dt}{dx} \cdot \arcsin \left(\frac{3x-2}{3x+2} \right)^2,$$

$$y' \Big|_{x=0} = 3 \arcsin 1 = \frac{3\pi}{2}.$$

(2) 解 (I) 利用归纳法.

$$\begin{aligned} y' &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= e^x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2} e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right), \\ y'' &= 2e^x \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right), \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

(II) 利用泰勒公式.

$$\begin{aligned} x^2 \ln(1+x) &= x^2 \left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{1}{8} x^8 + o(x^8) \right] \\ &= x^3 + \cdots - \frac{1}{8} x^{10} + o(x^{10}), \end{aligned}$$

故 $y^{(10)}(0) = -\frac{10!}{8}.$

(III)
$$f(x) = \frac{5x-1}{2x^2+x-1} = \frac{5x-1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1},$$

解得 $A = 1, B = 2$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{2x^2+x-1} &= \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x+1}, \\ f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}, \end{aligned}$$

故

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot 2 \cdot n! - 2^n \cdot n!.$$

(3) 解 方程两边同时对 x 求导, 得

$$af'(x) + \left(-\frac{b}{x^2}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{c}{x^2}. \quad ①$$

令 $x = \frac{1}{t}$, 得 $af'\left(\frac{1}{t}\right) - bt^2 f'(t) = -ct^2$, 即

$$af'\left(\frac{1}{x}\right) - bx^2 f'(x) = -cx^2. \quad ②$$

解式 ① 和式 ②, 消去 $f'\left(\frac{1}{x}\right)$, 得 $f'(x) = \frac{c(a+bx^2)}{(b^2-a^2)x^2}.$

(4) 解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot \frac{f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0)}{\frac{k}{n^2}} = kf'(0), k = 1, 2, \cdots, n, \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } f\left(\frac{k}{n^2}\right) =$$

$kf'(0) \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ 故}$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f'(0) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) + n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f'(0) \cdot \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} + o(1) \right] = \frac{1}{2}f'(0) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(5)(I) 解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0) = k$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + e^{-x}}{1} = f'(0) + 1 = k.$$

(II) 证 当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - e^{-x}}{x} - [f'(0) + 1]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{-x} - x f'(0) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + e^{-x} - f'(0) - 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{2x} = \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{[f'(x) + e^{-x}]x - [f(x) - e^{-x}]}{x^2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(x) + x e^{-x} - f(x) + e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[f'(x) - f'(0)] + x f'(0) + x e^{-x} - f(x) + e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(0) + x e^{-x} - f(x) + e^{-x}}{x^2} \\ &= f''(0) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x e^{-x}}{2x} \\ &= f''(0) - \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[f''(0) - 1] = \varphi'(0).\end{aligned}$$

故 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(6) 解 $f(x) = (x-1) \cdot |x-1| \cdot |x+2|$,

利用结论, 知 $x = -2$ 是 $f(x)$ 的不可导点.

注 本题也可利用导数的定义进行判别.

(7) 分析 由于参数方程中含有绝对值, 故不能直接用 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ 进行计算, 应用导数的定义进行处理.

解

$$\begin{aligned}\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \cdot \frac{5\Delta t + 4|\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \cdot \frac{5 + 4 \frac{|\Delta t|}{\Delta t}}{2 + \frac{|\Delta t|}{\Delta t}},\end{aligned}$$

注意到 $\frac{5 + 4 \frac{|\Delta t|}{\Delta t}}{2 + \frac{|\Delta t|}{\Delta t}}$ 是有界量, 且当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, Δt 为无穷小, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

注 下面的解法是错误的:

由于

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2t + |t| - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{t} = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t + |t| - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t}{t} = 3,$$

故 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t + |t| - 0}{t - 0}$ 不存在, 即 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}$ 不存在.

同理, $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ 也不存在, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \left. \frac{y'(t)}{x'(t)} \right|_{t=0}$ 不存在.

错误的原因: 没有注意到 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ 存在是 $\frac{dy}{dx}$ 存在的充分条件, 而非必要条件.

第三章 微分中值定理与泰勒公式

考试要求

1. 理解并会用罗尔定理.
2. 理解并会用拉格朗日中值定理.
3. 理解并会用泰勒定理.
4. 了解并会用柯西中值定理.

第一节 罗尔定理

内容与方法提要

1. 罗尔定理

设 $f(x)$ 满足: (1) 在 $[a, b]$ 上连续; (2) 在 (a, b) 内可导; (3) $f(a) = f(b)$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

2. 罗尔定理的几何意义

罗尔定理的结论从几何上看是明显的, 由 $f'(\xi) = 0$, 知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有水平切线, 如图 3-1 所示.

3. 罗尔定理的应用

罗尔定理的有关应用

判别方程实根的个数	{	至少有 n 个实根,
		至多有 n 个实根;
构造辅助函数	{	分析法(从要证明的结论反推),
		原函数法(积分).

(1) 证明 $f''(x)$ 至少有一个零点的方法:

① 证明思路:

罗尔定理

$f'(x)$ 至少有两个零点
$f(x)$ 至少有三个零点
$\int_a^x f(t)dt$ 至少有四个零点

② 证明过程分析:

设 $\int_a^x f(t)dt$ 从小到大有四个零点 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则

罗尔定理	$\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt = \int_a^{x_3} f(t)dt = \int_a^{x_4} f(t)dt = C$
	$\underbrace{\hspace{10em}}$
	$f(\xi_1) = 0 \quad f(\xi_2) = 0 \quad f(\xi_3) = 0$
罗尔定理	$\underbrace{\hspace{10em}}$
	$f'(\xi_4) = 0 \quad f'(\xi_5) = 0$
罗尔定理	$\underbrace{\hspace{10em}}$
	$f''(\xi_6) = 0$

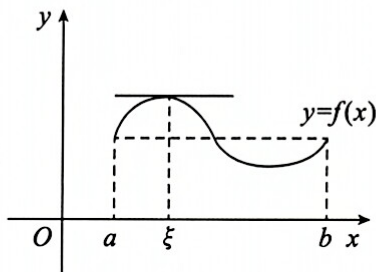


图 3-1

(2) 判别方程至多有几个实根的常用结论:

$f^{(n)}(x) \neq 0, x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = 0$ 至多有 n 个实根.

例如 若

$$f(x) = 2^x - x^2 - 1, x \in (-\infty, +\infty), \quad f'''(x) = 2^x (\ln 2)^3 \neq 0,$$

则 $f(x) = 2^x - x^2 - 1 = 0$ 至多有三个实根.

证 可用反证法证明, 假设 $f(x) = 0$ 有三个以上实根, 若有四个实根分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则

$$\begin{array}{l} \text{罗尔定理} \quad \underbrace{f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0}_{f'(\xi_1) = 0 \quad f'(\xi_2) = 0 \quad f'(\xi_3) = 0} \\ \text{罗尔定理} \quad \underbrace{f'(\xi_1) = 0 \quad f'(\xi_2) = 0 \quad f'(\xi_3) = 0}_{f''(\xi_4) = 0 \quad f''(\xi_5) = 0} \\ \text{罗尔定理} \quad \underbrace{f''(\xi_4) = 0 \quad f''(\xi_5) = 0}_{f'''(\xi_6) = 0} \end{array}$$

与 $f'''(x) \neq 0$ 矛盾, 故 $f(x) = 0$ 至多有三个实根.

(3) 作辅助函数是应用罗尔定理的难点, 常用到以下方法或结果:

① $(uv)' = u'v + uv' = 0$ (两项加法考虑“乘”).

② $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = 0 \Rightarrow u'v - uv' = 0$ (两项减法考虑“除”).

③ $[x^n f(x)]' = nx^{n-1}f(x) + x^n f'(x) = 0 \Rightarrow nf(x) + x f'(x) = 0$.

④ $[e^{\pm \lambda x} f(x)]' = \pm \lambda e^{\pm \lambda x} f(x) + e^{\pm \lambda x} f'(x) = 0 \Rightarrow \pm \lambda f(x) + f'(x) = 0$.

⑤ 乘以 x^n 或 $e^{\pm \lambda x}$.

⑥ 作差构造辅助函数, 令 $F(x) = f(x) - y_{AB}(x)$ 表示区间端点连线的所在直线的函数表达式, 如本节例 1.

⑦ 在需证明的等式两端同时加、减某一函数.

典型例题分析

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, $f(x)$ 不恒为 0, 且曲线 $y = f(x)$ 的端点连线与曲线相交于 C 点, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

分析 先作差构造辅助函数 $F(x)$, 再利用罗尔定理, 即

$$\begin{array}{l} \text{罗尔定理} \quad \underbrace{F(0) = F(x_0) = F(1)}_{F'(\xi_1) = 0 \quad F'(\xi_2) = 0} \\ \text{罗尔定理} \quad \underbrace{F'(\xi_1) = 0 \quad F'(\xi_2) = 0}_{F''(\xi) = 0} \end{array}$$

证 如图 3-2 所示, 直线 AB 的方程为

$$y = f(0) + [f(1) - f(0)] \cdot x,$$

与 $f(x)$ 作差, 令

$$F(x) = f(x) - f(0) - [f(1) - f(0)]x.$$

$F(x)$ 满足罗尔定理的条件, 设 C 点的横坐标为 x_0 , 则在区间 $[0, x_0]$ 与 $[x_0, 1]$ 上分别应用罗尔定理, 知存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 1)$, 使得 $F'(\xi_1) = 0$, $F'(\xi_2) = 0$; 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上再应用罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$,

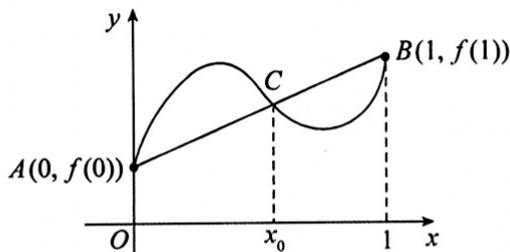


图 3-2

使得 $F''(\xi) = 0$, 故 $F''(\xi) = f''(\xi) = 0$.

例 2 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 2f(0)$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $(1+\xi)f'(\xi) = f(\xi)$.

分析 用分析法找出辅助函数, 将要证明的结论改为

$$(1+x)f'(x) - f(x) = 0,$$

变形为

$$\frac{(1+x)f'(x) - f(x)}{(1+x)^2} = 0, \quad (1+x)^2 \neq 0,$$

$$\text{即 } \left[\frac{f(x)}{x+1} \right]' = 0.$$

证 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x+1}$, 则有 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且

$$F(0) = f(0), \quad F(1) = \frac{f(1)}{2} = \frac{2f(0)}{2} = f(0) = F(0).$$

由罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$(1+\xi)f'(\xi) = f(\xi).$$

注 本题作辅助函数还可以考虑原函数法(积分).

将 $(1+x)f'(x) = f(x)$ 改写为 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x}$, 两端同时积分, 有

$$\ln |f(x)| = \ln(1+x) + C_1,$$

整理得

$$\ln |f(x)| = \ln[e^{C_1}(1+x)],$$

即 $|f(x)| = e^{C_1}(1+x)$, 则

$$f(x) = \pm e^{C_1}(1+x) = C(1+x) \quad (C = \pm e^{C_1}),$$

将上式变形为 $\frac{f(x)}{1+x} = C$, 故令 $F(x) = \frac{f(x)}{1+x}$ 为辅助函数.

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi f'(\xi) + nf(\xi) = f'(\xi)$ (n 为正整数).

分析 用分析法构造辅助函数 $F(x)$, 将要证明的等式改写为

$$(x-1)f'(x) + nf(x) = 0,$$

$$[(x-1)^n f(x)]' = 0.$$

证 令 $F(x) = (x-1)^n f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$, 应用罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$n(\xi-1)^{n-1}f(\xi) + (\xi-1)^n f'(\xi) = 0,$$

由于 $\xi \in (0, 1)$, 故 $(\xi-1)^{n-1} \neq 0$, 由此可得 $nf(\xi) + (\xi-1)f'(\xi) = 0$, 即

$$\xi f'(\xi) + nf(\xi) = f'(\xi).$$

注 作辅助函数时, 为利用导数的乘法或除法公式, 可先将要证明的等式合并成两项.

例 4 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 证明:

(1) 至少存在一点 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对任意实数 λ , 至少存在一点 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

分析 (1) 利用零点定理进行证明.

(2) 利用分析法寻找辅助函数, 将所证等式改写为 $f'(x) - 1 - \lambda[f(x) - x] = 0$, 即

$$[f(x) - x]' - \lambda[f(x) - x] = 0.$$

证 (1) 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0,$$

$$g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0.$$

由零点定理, 知至少存在一点 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $g(\eta) = f(\eta) - \eta = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$.

(2) 令 $F(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$, 则 $F(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上连续, 在 $(0, \eta)$ 内可导, 且 $F(0) = 0, F(\eta) = 0$, 由罗尔定理, 知至少存在一点 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$\{-\lambda e^{-\lambda x}[f(x) - x] + e^{-\lambda x}[f(x) - x]'\} \Big|_{x=\xi} = 0,$$

化简得

$$f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1.$$

注 本题构造辅助函数的关键是看出 $[f(x) - x]' = f'(x) - 1$, 即 $f(x) - x$ 是 $f'(x) - 1$ 的一个原函数.

例 5 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(1) 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

(2) 至少存在一点 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

分析 (1) 将 $f'(\xi) = 1$ 改写为 $[f(x) - x]' = 0$.

(2) 将 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ 改写为 $f''(x) + f'(x) = 1$. 等式两边同时乘以 e^x , 得

$$e^x[f''(x) + f'(x)] = e^x,$$

即 $[e^x f'(x)]' = (e^x)'$, 所以 $\{e^x[f'(x) - 1]\}' = 0$.

证 (1) 令 $g(x) = f(x) - x$, 由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f(0) = 0$, 则

$$g(0) = f(0) - 0 = 0,$$

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0,$$

由罗尔定理, 知至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $g'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$.

(2) 令 $F(x) = e^x[f'(x) - 1]$, 由于 $f'(x)$ 为偶函数, 故 $f'(-x) = f'(x)$, 则

$$F(\xi) = e^\xi[f'(\xi) - 1] = 0,$$

$$F(-\xi) = e^{-\xi}[f'(-\xi) - 1] = 0,$$

由罗尔定理, 知至少存在一点 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$, 即可得

$$f''(\eta) + f'(\eta) = 1.$$

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(1) > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$. 证明:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个不同实根.

分析 (1) 应用零点定理进行证明.

(2) 利用分析法寻找辅助函数. 将 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 改写为 $[f(x)f'(x)]' = 0$.

证 (1) 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ 及极限的保号性, 知存在 $x_1 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_1) < 0$.

又已知 $f(1) > 0$, 由零点定理, 知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点, 即方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根 ξ .

(2) 令 $F(x) = f(x)f'(x)$, 只要证明 $F(x)$ 有三个不同零点, 便可得方程 $F'(x) = 0$ ($f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$) 有两个不同实根.

又由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 存在, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, 故

$$F(0) = f(0) \cdot f'(0) = 0,$$

由(1), 知 $F(\xi) = f(\xi)f'(\xi) = 0$. 对 $f(0) = f(\xi)$, 应用罗尔定理, 知存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) = 0$, 即 $F(\eta) = f(\eta) \cdot f'(\eta) = 0$. 所以在区间 $[0, \eta]$ 与 $[\eta, \xi]$ 上再分别应用罗尔定理, 知存在 $\xi_1 \in (0, \eta)$, $\xi_2 \in (\eta, \xi)$, 使得 $F'(\xi_1) = 0$, $F'(\xi_2) = 0$, 故 $F'(x)$ 有两个不同实根, 即 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 有两个不同实根.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1} = 1$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

证 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$, 得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ 及

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_+(0) = 0.$$

同理, 由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1} = 1$, 得 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$, 及

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'_-(1) = 1.$$

将 $f''(\xi) = f(\xi)$ 改写为 $f''(x) = f(x)$, 等式两端同时加上 $f'(x)$, 再同时乘以 e^x 得

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) = e^x f(x) + e^x f'(x),$$

即 $[e^x f'(x)]' = [e^x f(x)]'$, 移项并合并同类项, 得

$$\{e^x [f'(x) - f(x)]\}' = 0.$$

令 $F(x) = e^x [f'(x) - f(x)]$, $x \in [0, 1]$, 则

$$F(0) = e^0 [f'(0) - f(0)] = 0, \quad F(1) = e^1 [f'(1) - f(1)] = 0.$$

由罗尔定理, 知存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = f(\xi)$.

注 等式 $f''(x) = f(x)$ 中缺一阶导数 $f'(x)$ 项, 为凑成导数乘法公式, 所以考虑加上 $f'(x)$, 再同时乘以 e^x .

例 8 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, $g''(x) \neq 0$, 且

$$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0,$$

证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

分析 利用分析法寻找辅助函数, 将等式 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 改写为

$$f(x)g''(x) - g(x)f''(x) = 0,$$

恒等变形, 得

$$f(x)g''(x) + f'(x)g'(x) - f'(x)g'(x) - g(x)f''(x) = 0,$$

即

$$[f(x)g'(x)]' - [g(x)f'(x)]' = 0,$$

$$[f(x)g'(x) - g(x)f'(x)]' = 0.$$

证 令

$$F(x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x), \quad x \in [a, b],$$

由已知, 得 $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理, 知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$F'(\xi) = f(\xi)g''(\xi) - g(\xi)f''(\xi) = 0,$$

$$\text{故 } \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

注 本题中的辅助函数也可用原函数法求得

$$\int [f(x)g''(x) - g(x)f''(x)]dx = C,$$

即

$$\int f(x)d[g'(x)] - \int g(x)d[f'(x)] = C,$$

用分部积分法得

$$f(x)g'(x) - \int g'(x)f'(x)dx - \left[g(x)f'(x) - \int f'(x)g'(x)dx \right] = C,$$

故 $f(x)g'(x) - g(x)f'(x) = C$, 所以辅助函数为

$$F(x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x).$$

例 9 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足

$$f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx, \quad k > 1,$$

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

分析 用原函数法构造辅助函数, 将所证结论改写为 $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)f(x)$, 即

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x},$$

两端同时积分并整理, 得 $f(x) = C \cdot \frac{1}{x}e^x$, 即 $xe^{-x}f(x) = C$.

证 令 $F(x) = xe^{-x}f(x)$, $x \in [0, 1]$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导. 又

$$F(1) = e^{-1}f(1) = e^{-1}k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx,$$

由积分中值定理, 得

$$\begin{aligned} F(1) &= e^{-1} \cdot k \cdot \frac{1}{k} \eta \cdot e^{1-\eta} \cdot f(\eta) = \eta e^{-\eta} f(\eta) \\ &= F(\eta), \quad \eta \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \frac{1}{k} < 1, \end{aligned}$$

由罗尔定理, 知至少存在一点 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi).$$

注 此题中的辅助函数也可直接设为被积函数 $F(x) = xe^{1-x}f(x)$, 读者可自行证明.

例 10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = a$, $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, 证明:

(1) 存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = c$.

(2) 存在 $\xi \in (a, c)$, 使得 $f'(\xi) = f(\xi) - \xi + 1$.

证 (1) 对 $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \int_a^b x dx$ 移项, 并应用推广的积分中值定理, 可得

$$0 = \int_a^b [f(x) - x]dx = [f(c) - c](b - a), \quad c \in (a, b),$$

由 $b - a \neq 0$, 得 $f(c) = c$.

(2) 将所证等式改写为 $f'(x) - 1 - [f(x) - x] = 0$, 即

$$[f(x) - x]' - [f(x) - x] = 0.$$

令

$$F(x) = e^{-x}[f(x) - x], \quad x \in [a, b],$$

则 $F(a) = 0, F(c) = 0$, 由罗尔定理, 知存在 $\xi \in (a, c)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 故

$$f'(\xi) = f(\xi) - \xi + 1.$$

注 推广的积分中值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在一点 $\xi \in (a, b)$, 有

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

证

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{F'(x) = f(x)}{F(b) - F(a)} \cdot \frac{\text{拉格朗日}}{\text{中值定理}} F'(\xi)(b-a) \\ &= f(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b), \end{aligned}$$

在推广的积分中值定理中, $\xi \in (a, b)$ 是开区间.

第二节 拉格朗日中值定理

内容与方法提要

1. 拉格朗日中值定理的概念

设 $f(x)$ 满足:

- (1) 在 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在 (a, b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

拉格朗日中值定理还可以写成下列两种形式:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b, \\ f(b) - f(a) &= f'[a + \theta(b-a)](b-a), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

2. 拉格朗日中值定理的几何意义

从几何上看, 拉格朗日中值定理表示曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内存在与端点连线平行的切线, 如图 3-3 所示.

3. 拉格朗日中值定理的应用

- (1) “增量”: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \xi \in (a, b)$.
- (2) “表达”: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0), \xi$ 介于 x_0 与 x 之间.
- (3) 不同函数在同一区间上用拉格朗日中值定理.
- (4) 同一函数在不同区间上用拉格朗日中值定理.
- (5) 利用 $f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b-a)](b-a), 0 < \theta < 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$ 等.

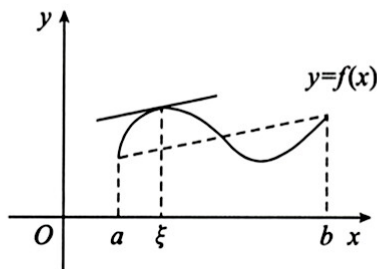


图 3-3

典型例题分析

题型一 利用增量证明不等式

例 1 证明: 不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

证 对表达式变形, 有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

对函数 $f(x) = \ln x$ 在 $[n, n+1]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}, \quad n < \xi < n+1.$$

又由于 $\frac{1}{x}$ 是单调递减函数, 所以 $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$, 所证不等式成立.

例 2 设 $x \in [0, 1], f''(x) > 0$, 则下列选项正确的是().

- A. $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$ B. $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

C. $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$

D. $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

解 由拉格朗日中值定理, 知

$$f(1) - f(0) = f'(\xi) \cdot (1 - 0) = f'(\xi), \quad \xi \in (0, 1).$$

又由 $f''(x) > 0$ 知, $f'(x)$ 单调增加, 故 $f'(1) > f'(\xi) > f'(0)$, 选项 B 正确.**例 3** 设定义在 $[0, 1]$ 上的可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) \geq M > 0$, 证明: 存在 $[0, 1]$ 上的一个子区间 I , 若其长度为 $\frac{1}{4}$, 对 $x \in I$, 有 $|f(x)| \geq \frac{1}{4}M$.**证** 将 $[0, 1]$ 四等分: $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$.在 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{4}M, \quad \xi \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right),$$

$$\text{即 } f\left(\frac{3}{4}\right) \geq \frac{1}{4}M + f\left(\frac{1}{2}\right).$$

在 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right) = f'(\eta)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{4}M, \quad \eta \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{即 } f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{1}{4}M + f\left(\frac{1}{2}\right).$$

由 $f'(x) \geq M > 0$, 知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加, 从而可得:当 $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ 时, $f\left(\frac{3}{4}\right) \geq \frac{1}{4}M > 0$, 故 $[\frac{3}{4}, 1]$ 为所求区间;当 $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$ 时, $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{1}{4}M < 0$, 故 $[0, \frac{1}{4}]$ 为所求区间.**题型二 不同函数在同一区间上****例 4** 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$. 证明: 存在点 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$.**证** 将所证等式改写为

$$e^x[f(x) + f'(x)] \Big|_{x=\eta} = e^x \Big|_{x=\xi},$$

即 $[e^x f(x)]' \Big|_{x=\eta} = (e^x)' \Big|_{x=\xi}$, 对函数 $e^x f(x)$, e^x 在同一区间 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得

$$[e^x f(x)]' \Big|_{x=\eta} = \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a} = (e^x)' \Big|_{x=\xi},$$

这里 $\eta \in (a, b)$, $\xi \in (a, b)$, 故 $e^\eta[f(\eta) + f'(\eta)] = e^\xi$, 即 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$.**注** 证明含有两个中值 ξ, η 的等式一般有三种情况:

- ① 不同函数在同一区间上.
- ② 同一函数在不同区间上.
- ③ 综合应用柯西中值定理与拉格朗日中值定理或泰勒公式.

题型三 同一函数在不同区间上对同一函数在不同区间上应用拉格朗日中值定理, 关键是将区间 $[a, b]$ 划分为 $[a, x_0]$ 与 $[x_0, b]$, 找出

分点 x_0 . 寻找分点 x_0 一般有两种考虑

$$\begin{cases} \text{① 找与函数值有关的点 } x_0; \\ \text{② 找中点 } x_0 = \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

(1) 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(2) 至少存在不同的两点 $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

证 (1) 用零点定理证明.

令 $g(x) = f(x) + x - 1$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(1) = 1 > 0,$$

所以存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $g(\xi) = f(\xi) + \xi - 1 = 0$, 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(2) 对 $f(x)$ 分别在区间 $[0, \xi]$ 与 $[\xi, 1]$ 上应用拉格朗日中值定理, 知存在 $\xi_1 \in (0, \xi), \xi_2 \in (\xi, 1)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1 - \xi},$$

故 $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 1, f(1) = e$, 证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = e^\xi + e^\eta$.

证 将所证等式改写为 $f'(\xi) - e^\xi + f'(\eta) - e^\eta = 0$, 即

$$[f(x) - e^x]' \Big|_{x=\xi} + [f(x) - e^x]' \Big|_{x=\eta} = 0.$$

令 $F(x) = f(x) - e^x$, 在区间 $[0, \frac{1}{2}]$ 与 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, 得

$$F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = F'(\xi) \cdot \frac{1}{2}, \quad \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \text{①}$$

$$F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F'(\eta) \cdot \frac{1}{2}, \quad \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \text{②}$$

将式 ① 和式 ② 相加, 得

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{2}[F'(\xi) + F'(\eta)].$$

又由于

$$F(1) = f(1) - e = 0, \quad F(0) = f(0) - e^0 = 1 - 1 = 0,$$

得 $F'(\xi) + F'(\eta) = 0$, 即

$$f'(\xi) + f'(\eta) = e^\xi + e^\eta.$$

注 此题属于对同一函数在不同区间上应用拉格朗日中值定理的类型.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 在 $(0,1)$ 内存在 ξ, η , 使得 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$.

分析 本题的关键是适当划分区间, 找出与函数值有关的分点 x_0 .

证 由于 $f(0) = 0 < \frac{1}{2} < 1 = f(1)$, 故由介值定理, 知存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = \frac{1}{2}$. 分别在 $[0, x_0]$ 与 $[x_0, 1]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{\frac{1}{2}}{x_0} = \frac{1}{2x_0}; \quad \xi \in (0, x_0),$$

$$f'(\eta) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - x_0} = \frac{1}{2(1 - x_0)}, \quad \eta \in (x_0, 1),$$

$$\text{故 } \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2.$$

例 8 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) > 0, f(b) > 0, \int_a^b f(x) dx = 0$. 证明:

(1) 存在相异的 $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$;

(2) 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) > 0$.

证 (1) 由 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 知存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) < 0$, 否则 $f(x)$ 恒为非负, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 矛盾. 由 $f(a) > 0, f(x_0) < 0, f(b) > 0$, 再根据零点定理, 可知存在 $\xi_1 \in (a, x_0), \xi_2 \in (x_0, b)$, 使得

$$f(\xi_1) = 0, \quad f(\xi_2) = 0.$$

(2) 在 $[a, \xi_1]$ 与 $[\xi_2, b]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理, 则存在 $\eta_1 \in (a, \xi_1), \eta_2 \in (\xi_2, b)$, 使得

$$f'(\eta_1) = \frac{f(\xi_1) - f(a)}{\xi_1 - a} < 0, \quad f'(\eta_2) = \frac{f(b) - f(\xi_2)}{b - \xi_2} > 0.$$

在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上再对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 存在一点 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\eta_2) - f'(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} > 0.$$

题型四 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$ 问题

例 9 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有二阶连续导数, 且 $f''(x) \neq 0$.

(1) 证明: 对任意 $x \in (-1, 1)$, 且 $x \neq 0$, 存在唯一的 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = f(0) + xf'[\theta(x) \cdot x];$$

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$.

(1) **证** 由拉格朗日中值定理, 知存在 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使得

$$f(x) = f(0) + xf'[\theta(x) \cdot x]. \quad ①$$

再证唯一性, 因为 $f''(x)$ 连续且 $f''(x) \neq 0$, 所以 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内不变号, 不妨设 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内严格单调增加, 故 $\theta(x)$ 是唯一的.

(2) **解法 1** 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$ 的关键是将 $\theta(x)$ 从 $f'[\theta(x) \cdot x]$ 中“调出来”, 对 $f'[\theta(x) \cdot x]$ 再应用一次拉格朗日中值定理, 有

$$f'[\theta(x) \cdot x] - f'(0) = f''[\theta_1 \theta(x) \cdot x] \theta(x) \cdot x, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

即

$$f'[\theta(x) \cdot x] = f'(0) + f''[\theta_1 \theta(x) \cdot x] \theta(x) \cdot x,$$

代入式 ①, 得

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + f''[\theta_1 \theta(x) \cdot x] \theta(x) \cdot x^2,$$

变形为

$$\frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} = f''[\theta_1 \theta(x) \cdot x] \cdot \theta(x),$$

两边同时取极限, 有

$$\text{右边} = \lim_{x \rightarrow 0} f''[\theta_1 \theta(x) \cdot x] \theta(x) = f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x),$$

$$\text{左边} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x}$$

$$\frac{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0),$$

由于 $f''(0) \neq 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

解法2 恒等变形, 将式①变形为

$$\frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} = \frac{f'[\theta(x) \cdot x] - f'(0)}{x\theta(x)} \cdot \theta(x),$$

两边同时取极限, 并用洛必达法则, 有

$$\text{左边} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0),$$

$$\text{右边} = \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'[\theta(x) \cdot x] - f'(0)}{\theta(x) \cdot x} = f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x),$$

由于 $f''(0) \neq 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

题型五 罗尔定理与拉格朗日中值定理的综合题

例10 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = 1$.

(1) 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(2) 证明: 至少存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

证 (1) 由积分中值定理, 得

$$\int_0^1 f(x) dx = f(\xi_1)(1-0) = f(\xi_1) = 1 \quad (0 < \xi_1 < 1),$$

由 $f(\xi_1) = f(1) = 1$ 及罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 令 $F(x) = f(x) + x^2$, 则

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 2, \quad F(\xi_1) = 1 + \xi_1^2 \quad (0 < \xi_1 < 1).$$

对 $F(x)$ 分别在 $(0, \xi_1)$, $(\xi_1, 1)$ 内应用拉格朗日中值定理, 知存在一点 $\eta_1 \in (0, \xi_1)$, 使得

$$\frac{F(\xi_1) - F(0)}{\xi_1 - 0} = F'(\eta_1), \text{ 即 } F'(\eta_1) = \frac{1 + \xi_1^2}{\xi_1}.$$

存在一点 $\eta_2 \in (\xi_1, 1)$, 使得 $\frac{F(1) - F(\xi_1)}{1 - \xi_1} = F'(\eta_2)$, 即 $F'(\eta_2) = 1 + \xi_1$.

再对 $F'(x) = f'(x) + 2x$ 在 (η_1, η_2) 内应用拉格朗日中值定理, 知存在一点 $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 1)$,

使得 $\frac{F'(\eta_2) - F'(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} = F''(\eta)$, 即 $f''(\eta) + 2 = \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1(\eta_2 - \eta_1)} < 0$, 即 $f''(\eta) < -2$.

第三节 柯西中值定理

内容与方法提要

1. 柯西中值定理的概念

设 $f(x), g(x)$ 满足:

(1) 在 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在 (a, b) 内可导;

(3) $g'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

2. 柯西中值定理的几何意义

柯西中值定理从几何上表示为:由参数方程表示的曲线在 (a, b) 内存在与两端点连线平行的切线(见图 3-4), 即设 $X = g(x)$, $Y = f(x)$, 视 x 为参数, 则 $\left. \frac{dY}{dX} \right|_{x=\xi} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 表示切线的斜率, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 表示端点连线的斜率.

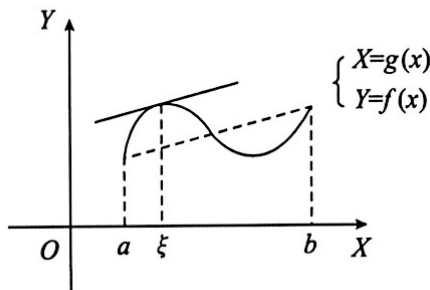


图 3-4

3. 柯西中值定理的应用及解题关键

(1) 柯西中值定理与拉格朗日中值定理的综合应用是考点之一, 即对

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

左、右两端的分子或分母再利用拉格朗日中值定理.

(2) 应用柯西中值定理解题的关键是寻找适当的辅助函数, 一般先将所证结论恒等变形为定理结论的形式, 即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

再从右边的分子、分母中找到辅助函数 $f(x), g(x)$.

(3) 罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理三者的关系:

$$\boxed{\text{罗尔定理}} \xrightarrow[\substack{\text{推广} \\ f(a)=f(b)}}{\substack{\text{推广} \\ g(x)=x}} \boxed{\text{拉格朗日中值定理}} \xrightarrow[\substack{\text{推广} \\ g(x)=x}}{\substack{\text{推广} \\ f(a)=f(b)}} \boxed{\text{柯西中值定理}}$$

典型例题分析

例 1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$, 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{ab}{b-a} [bf(b) - af(a)] = \xi^2 [f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

证 将所证等式变形为

$$\frac{bf(b) - af(a)}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{f(\xi) + \xi f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}} = \left. \frac{[xf(x)]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \right|_{x=\xi}.$$

令

$$F(x) = xf(x), \quad G(x) = \frac{1}{x},$$

则 $G'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, 在 $[a, b]$ 上应用柯西中值定理即得所证结论.

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 证明: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}.$$

证法 1 先用柯西中值定理, 后用拉格朗日中值定理. 将所证结论变形为

$$f'(\xi) = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot \frac{f'(\eta)}{e^\eta}.$$

上式中 $\frac{f'(\eta)}{e^\eta}$ 是对函数 $f(x)$ 和 e^x 应用柯西中值定理的结果, 所以对 $F(x) = f(x), G(x) = e^x$ 在 $[a, b]$ 上应用柯西中值定理, 得

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \quad \eta \in (a, b).$$

再应用拉格朗日中值定理, 得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b),$$

于是 $\frac{f'(\xi)(b - a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta}$, 即

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}.$$

证法2 先用拉格朗日中值定理, 再用柯西中值定理, 有

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot \frac{b - a}{e^b - e^a} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &= \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot \frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \end{aligned}$$

其中 $\xi, \eta \in (a, b)$.

例3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$, 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x - a)}{x - a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内, $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a, b) 内存在与(2)中 ξ 相异的点 η , 使得

$$f'(\eta) = \frac{2\xi}{(b^2 - a^2)(\xi - a)} \int_a^b f(x) dx.$$

证 (1) 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续及 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x - a)}{x - a}$ 存在, 可知

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(2x - a) = f(a) = 0,$$

又由于 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x) > f(a) = 0, x \in (a, b)$.

(2) 设 $F(x) = x^2, G(x) = \int_a^x f(t) dt, a \leq x \leq b$, 则 $G'(x) = f(x) > 0$, 由柯西中值定理, 知存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(3) 由拉格朗日中值定理得

$$f(\xi) = f(\xi) - f(a) = f'(\eta)(\xi - a), \quad \eta \in (a, \xi),$$

代入(2)中, 有

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi - a)},$$

即

$$f'(\eta) = \frac{2\xi}{(b^2 - a^2)(\xi - a)} \int_a^b f(x) dx, \quad \eta \in (a, \xi).$$

第四节 泰勒公式

内容与方法提要

1. 泰勒公式的概念

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有 $n+1$ 阶导数, 则对该邻域内的任意一点 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项.

若 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对该邻域内的任意一点 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x), \quad ①$$

其中 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ 称为佩亚诺余项, 当 $x_0 = 0$ 时, 式 ① 称为麦克劳林公式.

2. 常用的五个初等函数的麦克劳林公式

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

3. 泰勒公式的应用

(1) 求极限.

(2) 函数逼近, 即将 $f(x)$ 表示成泰勒公式.

(3) 柯西中值定理与泰勒公式的综合应用.

(4) 证明含中值 ξ 的等式和不等式, 步骤如下:

① 选择特殊点展开 (选一个点或两个点);

② 将区间端点 (或中点) 代入展开式;

③ 利用介值定理等.

(5) 证明不等式.

(6) 讨论泰勒公式的余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ ($0 < \theta < 1$) 中的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$.

典型例题分析

题型一 证明不等式

例 1 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) > 0$, $f''(x_0) > 0$, 若 $\Delta x > 0$, 记 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $dy = f'(x_0)\Delta x$, 则 ().

A. $\Delta y > dy > 0$

B. $\Delta y < dy < 0$

C. $dy > \Delta y > 0$

D. $dy < \Delta y < 0$

解 应用泰勒公式, 有

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2],$$

即

$$\Delta y - dy = \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o[(\Delta x)^2].$$

当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y - dy$ 的符号与 $\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2$ 的符号一致, 故 $\Delta y - dy > 0$.

又由于 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$, 所以选项 A 正确.

例 2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导, $f''(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 证明: $f(x) \geq x$.

证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1. \end{cases}$ 应用泰勒公式, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \geq x \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

例 3 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有 $f''(x) < 0$, 证明: 当 $n \geq 2$ 时, 若 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, 且 $x_{i-1} < x(i = 2, 3, \dots, n)$, 则有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

证 令 $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, 则 $x_0 \in (a, b)$. 由泰勒公式, 可知

$$f(u) = f(x_0) + f'(x_0)(u - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(u - x_0)^2 \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } u \text{ 之间}), \quad \textcircled{1}$$

将 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别代入式 ①, 得

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x_0)^2 \quad (\xi_1 \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x_1 \text{ 之间}),$$

$\vdots$

$$f(x_n) = f(x_0) + f'(x_0)(x_n - x_0) + \frac{f''(\xi_n)}{2!}(x_n - x_0)^2 \quad (\xi_n \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x_n \text{ 之间}),$$

将上面 n 个式子相加, 得

$$\begin{aligned} & f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \\ &= nf(x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \dots + \frac{f''(\xi_n)}{2!}(x_n - x_0)^2, \end{aligned}$$

即

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

注 若 $f''(x) > 0$, 则

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

例 4 设 $f(x)$ 有二阶导数, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $a < b$, 且 $f(a) = 0$.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $x = b$ 处的一阶泰勒公式(带拉格朗日余项);

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴交于点 $P(x_0, 0)$, 证明: $a < x_0 < b$.

解 (1) $f(x) = f(b) + f'(b)(x - b) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - b)^2,$

其中 ξ 介于 x 与 b 之间.

(2) 如图 3-5 所示, 切线方程为 $y - f(b) = f'(b)(x - b)$, 其与 x 轴交点的横坐标为

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

又由于 $f'(x) > 0$, 则

$$f(b) > f(a) = 0, \quad f'(b) > 0,$$

所以 $\frac{f(b)}{f'(b)} > 0$, 故 $x_0 < b$.

又由(1)及 $f(a) = 0$, 有

$$0 = f(a) = f(b) + f'(b)(a - b) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(a - b)^2,$$

其中 ξ_1 介于 a 与 b 之间, 解得 $a = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f''(\xi_1)}{2f'(b)}(a - b)^2$,

故

$$x_0 - a = \frac{f''(\xi_1)}{2f'(b)}(a - b)^2 > 0,$$

即 $x_0 > a$.

综上所述, 有 $a < x_0 < b$.

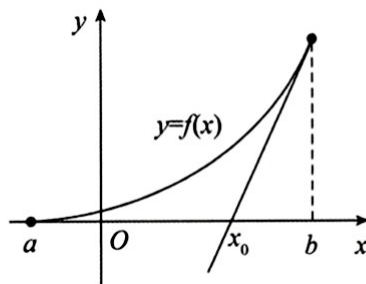


图 3-5

题型二 求极限问题

例 5 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内有二阶导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3,$$

求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x} = 3,$$

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right] = 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{f(x)}{x} \right] = 0,$$

由此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0. \end{cases}$$

又由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left[x + \frac{f(x)}{x} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x^2} \right]} = e^3, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x^2} \right] = 3$, 于是

$$1 + \frac{f(x)}{x^2} = 3 + \alpha(x) \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时}, \alpha(x) \rightarrow 0),$$

解得 $f(x) = 2x^2 + o(x^2)$, 由泰勒公式的唯一性, 知 $\frac{f''(0)}{2!} = 2$, 即 $f''(0) = 4$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{2x^2 + o(x^2)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} \quad (1^\infty \text{ 型}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + \frac{2x^2 + o(x^2)}{x} \right]^{\frac{x}{2x^2 + o(x^2)}} \right\}^{\frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2}} = e^2.\end{aligned}$$

题型三 证明含中值的等式与不等式

例 6 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上有三阶连续导数, 且 $f(-a) = -a$, $f(a) = a$, $f'(0) = 0$.

(1) 写出 $f(x)$ 带拉格朗日余项的二阶麦克劳林公式;

(2) 证明: 存在 $x_0 \in (-a, a)$, 使得 $a^2 f'''(x_0) = 6$.

(1) **解**

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \\ &= f(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).\end{aligned}$$

(2) **证** 将所证结论变形为 $f'''(x_0) = \frac{6}{a^2}$, 考虑用介值定理, 只要证明 $\frac{6}{a^2}$ 介于 $f'''(x)$ 的最大值 M 与最小值 m 之间即可.

将 $x = \pm a$ 代入(1), 得

$$\begin{aligned}-a &= f(-a) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}a^2 - \frac{f'''(\xi_1)}{3!}a^3 \quad (-a < \xi_1 < 0), \\ a &= f(a) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}a^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}a^3 \quad (0 < \xi_2 < a),\end{aligned}$$

两式相减, 整理得

$$m \leq \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = \frac{6}{a^2} \leq M.$$

由介值定理, 可知存在 $x_0 \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-a, a)$, 使得 $f'''(x_0) = \frac{6}{a^2}$, 即 $a^2 f'''(x_0) = 6$.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 2$. 证明: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $|f'(x)| \leq 3$.

证 将 $f(u)$ 在 x 点处用泰勒公式展开, 得

$$f(u) = f(x) + f'(x)(u-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(u-x)^2 \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } u \text{ 之间}), \quad \textcircled{1}$$

将 $u = 1, u = 0$ 分别代入式 ①, 得

$$\begin{aligned}f(1) &= f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(1-x)^2 \quad (\xi_1 \text{ 介于 } 1 \text{ 与 } x \text{ 之间}), \\ f(0) &= f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(0-x)^2 \quad (\xi_2 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),\end{aligned}$$

以上两式相减, 得

$$f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(1-x)^2 - \frac{1}{2}f''(\xi_2)x^2,$$

所以

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2}|f''(\xi_1)|(1-x)^2 + \frac{1}{2}|f''(\xi_2)| \cdot x^2 \\ &\leq 2 + (1-x)^2 + x^2 \leq 2 + (1-x+x)^2 = 2 + 1 = 3.\end{aligned}$$

注 ① 可以求得函数 $(1-x)^2 + x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 1.

② 一般地, 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 则 $|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

③ 在 ② 的基础上, 若改区间 $(0, 1)$ 为 $(0, +\infty)$, 其他条件不变, 则 $|f'(x)| \leq 2\sqrt{ab}$.

④ 在 ② 的基础上, 若改区间为 $(-\infty, +\infty)$, 其他条件不变, 则 $|f'(x)| \leq \sqrt{2ab}$.

结论 ③ 的证明: 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内二阶可导, $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 应用泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x+h \text{ 之间}, x > 0, h > 0),$$

可得

$$f'(x)h = f(x+h) - f(x) - \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

由 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$ 得

$$|f'(x)| \leq \frac{2a}{h} + \frac{h}{2}b = \frac{bh^2 + 4a}{2h},$$

变形为 $bh^2 - 2h|f'(x)| + 4a \geq 0$ [$b > 0$, 因为若 $b = 0$, 则 $f(x) = kx + l$, 与 $|f(x)| \leq a$ 矛盾], 该式为关于 h 的二次三项式, 由于非负, 且对称轴为 $\frac{|f'(x)|}{b} \geq 0$, 则判别式满足 $\Delta \leq 0$, 即 $[-2|f'(x)|]^2 - 4^2ba \leq 0$, 化简得 $|f'(x)|^2 \leq 4ab$, 故

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{ab}.$$

结论 ④ 的证明: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导, $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 应用泰勒公式, 得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2 \quad (\xi_1 \text{ 介于 } x \text{ 与 } x+h \text{ 之间}),$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2 \quad (\xi_2 \text{ 介于 } x \text{ 与 } x-h \text{ 之间}),$$

以上两式相减, 得

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{1}{2}h^2[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)],$$

解得

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] - \frac{h}{4}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)] \quad (h \neq 0).$$

由 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 知 $|f'(x)| \leq \frac{a}{h} + \frac{bh}{2}$, 即

$$bh^2 - 2h|f'(x)| + 2a \geq 0 \quad (b > 0),$$

该式为关于 h 的二次三项式, 由于非负, 其判别式满足 $\Delta \leq 0$, 即

$$|f'(x)|^2 \leq 2ab, \quad |f'(x)| \leq \sqrt{2ab}.$$

例 8 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(1) = f(0) = 0$, $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2$, 证明:

$$\min_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \leq -16.$$

分析 利用泰勒公式, 建立 $f(x)$ 与 $f''(x)$ 的关系式证之.

证 因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上必存在最大值和最小值, 又

$$f(0) = f(1) = 0, \quad \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2,$$

故 $f(x)$ 的最大值点只能在 $(0, 1)$ 内取得, 可知存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2$, 于是 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值, 故 $f'(x_0) = 0$.

将 $f(x)$ 在 x_0 处展开为泰勒公式, 并将 $x = 0, x = 1$ 分别代入得

$$\begin{aligned}
 0 &= f(0) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2 \\
 &= 2 + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2 \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}), \\
 0 &= f(1) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 \\
 &= 2 + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 \quad (\eta \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } 1 \text{ 之间}),
 \end{aligned}$$

解得

$$f''(\xi) = -\frac{4}{x_0^2}, \quad f''(\eta) = \frac{-4}{(1-x_0)^2},$$

于是

$$\min_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \leq \min\{f''(\xi), f''(\eta)\} = \min\left\{\frac{-4}{x_0^2}, \frac{-4}{(1-x_0)^2}\right\}.$$

$$\text{当 } x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 时, } \min\left\{\frac{-4}{x_0^2}, \frac{-4}{(1-x_0)^2}\right\} = \frac{-4}{(1-x_0)^2} \leq -16.$$

$$\text{当 } x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \text{ 时, } \min\left\{\frac{-4}{x_0^2}, \frac{-4}{(1-x_0)^2}\right\} = \frac{-4}{x_0^2} \leq -16, \text{ 故 } \min_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \leq -16.$$

注 同理可证, 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, 且

$$f(0) = f(1) = 0, \quad \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1,$$

则 $\max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \geq 8$.

例 9 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

证 将 $f(x)$ 在 $x = a, x = b$ 处分别利用泰勒公式展开, 得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2 \quad (\xi_1 \text{ 介于 } x \text{ 与 } a \text{ 之间}),$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2 \quad (\xi_2 \text{ 介于 } x \text{ 与 } b \text{ 之间}).$$

将 $x = \frac{a+b}{2}$ 代入上面两式, 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f'(a)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + f'(b)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2,$$

两式相减, 得

$$0 = f(a) - f(b) + \frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)],$$

则

$$4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2} = \left| \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2} \right| \leq \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2},$$

取 $|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|$ 两者中较大者, 设为 $|f''(\xi)|$, 则

$$|f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

注 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 n 阶导数, 且 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0 (k = 1, 2, \dots, n-1)$, 则存在一点 $\xi \in$

(a, b) , 使得

$$|f^{(n)}(\xi)| \geq \frac{2^{n-1} \cdot n!}{(b-a)^n} |f(b) - f(a)|.$$

题型四 函数逼近

例10 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f''(0) \neq 0$, 证明: 存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

证法1 依题意, 要证存在唯一的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0,$$

因此, 分子的极限为 0, 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 知

$$f(0)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1) = 0,$$

由 $f(0) \neq 0$, 得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \quad ①$$

由洛必达法则, 知

$$\begin{aligned} A &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)}{2h}, \end{aligned}$$

故分子的极限为

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} [\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)] \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) f'(0) = 0, \end{aligned}$$

由于 $f'(0) \neq 0$, 故

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \quad ②$$

再用洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} A &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f''(h) + 4\lambda_2 f''(2h) + 9\lambda_3 f''(3h)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3) f''(0) = 0, \end{aligned}$$

由 $f''(0) \neq 0$, 得

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \quad ③$$

由式 ①②③ 构成的线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

根据线性方程组的克拉默法则知, 存在唯一的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足题设要求.

证法2 应用泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + o(h^2), \\ f(2h) &= f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + o(h^2), \\ f(3h) &= f(0) + 3f'(0)h + \frac{9}{2}f''(0)h^2 + o(h^2), \end{aligned}$$

则

$$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)f(0) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)f'(0)h + \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0)h^2 + o(h^2),$$

依题意,该式是比 h^2 高阶的无穷小($h \rightarrow 0$),得

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

接下来的证明同证法 1.

例 11 在 $x = 0$ 附近用 $Q(x) = \frac{1+Ax}{1+Bx+Cx^2}$ 近似表示 e^x , 试确定系数 A, B, C , 使其误差是比 x^3 高阶的无穷小($x \rightarrow 0$).

解 由题设, $e^x = \frac{1+Ax}{1+Bx+Cx^2} + o(x^3)$, 有

$$\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right](1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

比较 x 各次幂的系数, 有

$$1+B=A, \quad B+\frac{1}{2}+C=0, \quad C+\frac{B}{2}+\frac{1}{6}=0,$$

$$\text{解得 } A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}.$$

例 12 在 $x = 0$ 附近用一个 x 的二次多项式近似表示 $\sec 2x$, 使其误差是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小($x \rightarrow 0$).

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x^2} - 1 \sim x^2$. 设 $f(x) = \sec 2x$, 则

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = \frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = \frac{4\cos^3 2x - 2\sin 2x \cdot 2\cos 2x \cdot (-2\sin 2x)}{\cos^4 2x}, \quad f''(0) = 4,$$

由泰勒公式, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + 2x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

故所求多项式为 $1 + 2x^2$.

题型五 求解 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$ 问题

例 13 (1) 设 $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x + \theta h)$ ($0 < \theta < 1$), $f^{(n+1)}(x)$ 存在且

$$f^{(n+1)}(x) \neq 0, \text{ 证明: } \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $(x-\delta, x+\delta)$ ($\delta > 0$) 内有 n 阶连续导数, 且

$$f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x) = 0, \quad f^{(n)}(x) \neq 0,$$

当 $0 < |h| < \delta$ 时, 有 $f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$, $0 < \theta < 1$, 证明: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

证 (1) 由泰勒公式, 有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x + \theta h) + o(h^{n+1}),$$

与已知等式相减,得

$$0 = \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x)] - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}). \quad ①$$

由拉格朗日中值定理,知

$$f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x + \theta_1 \theta h) \theta h \quad (0 < \theta_1 < 1),$$

代入式①,得

$$0 = \frac{h^n}{n!} \theta h f^{(n+1)}(x + \theta_1 \theta h) - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}),$$

变形为

$$\theta f^{(n+1)}(x + \theta_1 \theta h) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}},$$

令 $h \rightarrow 0$, 得

$$f^{(n+1)}(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x).$$

由 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ 得 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

(2) 将 $f(x+h)$ 在点 x 处展开为 $n-1$ 阶泰勒公式,得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta_1 h) \quad (0 < \theta_1 < 1),$$

与已知等式 $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ 相减,得

$$h[f'(x+\theta h) - f'(x)] - \frac{f^{(n)}(x + \theta_1 h)}{n!} \cdot h^n = 0.$$

由泰勒公式及已知条件,得

$$f'(x+\theta h) = f'(x) + \frac{f^{(n)}(x + \theta_2 \theta h)}{(n-1)!} (\theta h)^{n-1} \quad (0 < \theta_2 < 1),$$

故

$$f^{(n)}(x + \theta_2 \theta h) \cdot \theta^{n-1} = \frac{f^{(n)}(x + \theta_1 h)}{n}.$$

令 $h \rightarrow 0$, 得

$$f^{(n)}(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \theta^{n-1} = \frac{f^{(n)}(x)}{n}.$$

由 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 得 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta^{n-1} = \frac{1}{n}$, 即 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

习题演练

解答题

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且不为零, $f(0) = f(1) = 0$, 证明: 对任意实数 k , 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 其中 $0 < a < b$, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1)$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $(1-\xi)f''(\xi) = 2f'(\xi)$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$, $f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta) = 1$;

(II) 存在一点 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f''(\xi) = 2[f'(\xi) - 1]$.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^\xi f(x) dx = -\xi f(\xi)$.

(6) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) + f^2(\xi) = 0$.

(7) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$.

(8) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = \int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

(9) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $g'(x) \neq 0$, 证明: 存在一点 $c \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(a) - f(c)}{g(c) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(10) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0, f(x) > 0, x \in (0, 1)$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ (k 为正整数).

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x f(x) dx$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

(12) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^\xi f(t) dt = 0$.

(13) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.

(14) 证明: 当 $x > 1$ 时, 有 $2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$.

(15) 设 $a > b > 0, n > 1$, 证明: $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$.

(16) 证明下列不等式:

(I) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$;

(II) 当 $x > 1$ 时, $e^x > ex$.

(17) 设 $f(x)$ 二阶可导, $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), dy = f'(x_0)\Delta x$, 其中 $\Delta x > 0$, 证明: $\Delta y > dy > 0$.

(18) 设 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e^2$, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)]$, 求 k 的值.

(19) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0, f(1) = 1, a > 0, b > 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1), \eta \in (0, 1), \xi \neq \eta$, 使得 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$.

(20) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1)$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $2f'(\xi) + (\xi - 1)f''(\xi) = 0$.

(21) 设不恒为常数的 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $|f'(\xi)| > 0$.

(22) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, $\xi \in (a, b)$ 是一个定点, $f''(\xi) \neq 0$, 证明: 在 (a, b) 内存在不同的两

点 x_1 与 x_2 , 使得 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$.

(23) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$.

(24) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

(25) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(1) = 0$, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有实根 x_0 .

(I) 证明: 存在 $\xi_1 \neq \xi_2 \in (0, 1)$, 使得 $\xi_1 f'(\xi_1) + f(\xi_1) = \xi_2 f'(\xi_2) + f(\xi_2) = 0$;

(II) 证明: 若 $f(0) < 0$, 且 $\forall x \in (x_0, 1)$, 有 $f''(x) > 0$, 则存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) = 0$.

(26) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, $f(0) = f(1) = 0$, 证明: 当 $x \in [0, 1]$ 时, 有 $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}M$, 其中

$$M = \max_{x \in [0, 1]} \{|f''(x)|\}.$$

习题演练解答

解答题

(1) 证 只要证 $f'(\xi) - kf(\xi) = 0$.

令 $F(x) = e^{-kx} f(x)$, 由已知, $F(0) = F(1) = 0$, 又由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$,

即 $f'(\xi) - kf(\xi) = 0$, 故 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k$.

(2) 证 令 $F(x) = x^2 f(x)$, 由已知, $F(a) = F(b) = 0$.

由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$F'(\xi) = 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0,$$

即 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.

(3) 证 令

$$F(x) = (x-1)^2 f'(x), \quad F(1) = 0.$$

由 $f(0) = f(1)$, 知存在一点 $\xi_1 \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi_1) = 0$, 故 $F(\xi_1) = 0$. 又由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (\xi_1, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$(1-\xi)f''(\xi) = 2f'(\xi).$$

(4) 证 (I) 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0, \quad f'_+(0) = 1.$$

令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(0) = F(1) = 0$. 由罗尔定理, 知存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$, 即 $f'(\eta) = 1$.

(II) 令 $g(x) = e^{-2x} [f'(x) - 1]$, 则 $g(0) = g(\eta) = 0$. 由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = 2[f'(\xi) - 1]$.

(5) 证 令 $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$, 则 $F(0) = 0, F(1) = 0$. 由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$\int_0^\xi f(x) dx = -\xi f(\xi).$$

(6) 证 令 $F(x) = f(x) e^{\int_0^x f(t) dt}$, 则 $F(a) = F(b) = 0$. 由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) e^{\int_0^\xi f(t) dt} + f(\xi) e^{\int_0^\xi f(t) dt} \cdot f(\xi) = 0,$$

故 $f'(\xi) + f^2(\xi) = 0$.

(7) 证 令 $F(x) = f(x)e^{x^2}$, 则 $F(a) = F(b) = 0$. 由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$$

(8) 证 由 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 及积分中值定理, 得 $f(c) = 0$, 其中 $c \in (0, 1)$.

令 $g(x) = e^x f(x)$, 则 $g(0) = g(c) = g(1) = 0$. 由罗尔定理, 知存在 $\xi_1 \in (0, c)$, $\xi_2 \in (c, 1)$, 使得 $g'(\xi_1) = 0$, $g'(\xi_2) = 0$.

又由于 $g'(x) = e^x[f(x) + f'(x)]$, 故

$$f(\xi_1) + f'(\xi_1) = 0, \quad f(\xi_2) + f'(\xi_2) = 0.$$

再令 $F(x) = e^{-x}[f(x) + f'(x)]$, 则 $F(\xi_1) = F(\xi_2) = 0$.

由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$F'(\xi) = e^{-\xi}[f''(\xi) - f(\xi)] = 0,$$

故 $f''(\xi) = f(\xi)$.

(9) 证 令

$$F(x) = f(a)g(x) + g(b)f(x) - f(x)g(x),$$

则 $F(a) = F(b) = f(a)g(b)$. 由罗尔定理, 知存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $F'(c) = 0$. 由

$$F'(x) = f(a)g'(x) + g(b)f'(x) - [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)],$$

得

$$F'(c) = f(a)g'(c) + g(b)f'(c) - [f'(c)g(c) + f(c)g'(c)] = 0,$$

即

$$g'(c)[f(a) - f(c)] = f'(c)[g(c) - g(b)].$$

又 $g'(c) \neq 0$, 且 $g(c) - g(b) \neq 0$ [否则存在一点 $\xi \in (c, b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$, 与 $g'(x) \neq 0$ 矛盾],

$$\text{故 } \frac{f(a) - f(c)}{g(c) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(10) 证 令 $F(x) = f(x)[f(1-x)]^k$ (k 为正整数), 则 $F(0) = 0, F(1) = 0$. 由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$.

由于

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)[f(1-x)]^k + f(x)k[f(1-x)]^{k-1} \cdot f'(1-x) \cdot (-1) \\ &= [f(1-x)]^{k-1} \cdot [f'(x)f(1-x) - kf(x)f'(1-x)], \end{aligned}$$

故

$$F'(\xi) = [f(1-\xi)]^{k-1} [f'(\xi)f(1-\xi) - kf(\xi)f'(1-\xi)] = 0.$$

因为 $f(x) > 0$, 所以 $f(1-\xi) > 0, f(\xi) > 0$, 故

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

(11) 证 令 $F(x) = xf(x)$, 则

$$F(1) = f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$$

$$\frac{\text{积分}}{\text{中值定理}} 2 \cdot \frac{1}{2} \eta \cdot f(\eta) = F(\eta) \quad \left(0 < \eta < \frac{1}{2}\right).$$

$F(x)$ 在 $[\eta, 1]$ 上应用罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

(12) 证 令 $F(x) = \int_0^x tf(t)dt - x \int_0^x f(t)dt$, 则

$$F(0) = 0, \quad F(1) = \int_0^1 t f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$\xi f(\xi) - \int_0^\xi f(t) dt - \xi f(\xi) = 0,$$

$$\text{故 } \int_0^\xi f(t) dt = 0.$$

(13) 证 令 $F(x) = x^2 f(x)$, 由积分中值定理, 知

$$\int_0^1 f(x) dx = f(\xi_1) \cdot 1 = 0 \quad (0 < \xi_1 < 1),$$

解得 $f(\xi_1) = 0$, 故 $F(0) = 0, F(\xi_1) = 0$.

由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (0, \xi_1) \subset (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0.$$

(14) 证 令 $f(x) = 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, x > 1$, 则

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)} \equiv 0,$$

故 $f(x) \equiv C$. 又 $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $x = 1$ 处连续,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2\arctan 1 + \arcsin 1 = \pi,$$

所以 $f(x) \equiv \pi$.

(15) 证 令 $f(x) = x^n$, 在 $[b, a]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有

$$a^n - b^n = n\xi^{n-1}(a-b), \quad b < \xi < a.$$

又 $b^{n-1} < \xi^{n-1} < a^{n-1}$, 从而

$$nb^{n-1}(a-b) < n\xi^{n-1}(a-b) < na^{n-1}(a-b),$$

即

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

(16) 证 (I) 利用拉格朗日中值定理, 有

$$\arctan a - \arctan b = \frac{1}{1+\xi^2}(a-b),$$

其中 ξ 介于 a 与 b 之间, 故

$$|\arctan a - \arctan b| = \frac{1}{1+\xi^2} |a-b| \leq |a-b|.$$

(II) 令 $f(x) = e^x$, 在 $[1, x]$ 上应用拉格朗日中值定理, 知存在一点 $\xi \in (1, x)$, 使得

$$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x-1),$$

即 $e^x - e = e^\xi(x-1)$.

当 $\xi > 1$ 时, $e^\xi > e$, 从而 $e^x - e > e(x-1)$, 故 $e^x > ex$.

(17) 证 由拉格朗日中值定理, 得

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x, \quad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x.$$

又由 $f''(x) > 0$, 知 $f'(x)$ 单调增加, 故 $f'(\xi)\Delta x > f'(x_0)\Delta x$, 从而有

$$\Delta y > dy > 0.$$

(18) 解 由拉格朗日中值定理, 得

$$f(x) - f(x-1) = f'(\xi), \quad x-1 < \xi < x,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\xi) = 1.$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2k}{x-k} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2k}{x-k} \right)^{\frac{x-k}{2k}} \right]^{\frac{2k \cdot x}{x-k}} = e^{2k},\end{aligned}$$

即 $e^{2k} = e^2$, 故 $k = 1$.

(19) 证 $\forall k \in (0, 1)$, 则 $0 = f(0) < k < f(1) = 1$.

由介值定理, 知存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $f(c) = k$, 在 $[0, c]$ 与 $[c, 1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理, 知存在 $\xi \in (0, c)$, $\eta \in (c, 1)$, 且 $\xi \neq \eta$, 使得

$$\begin{aligned}f(c) - f(0) &= f'(\xi)(c - 0), \\ f(1) - f(c) &= f'(\eta)(1 - c),\end{aligned}$$

即

$$\frac{k}{f'(\xi)} = c, \quad \frac{1-k}{f'(\eta)} = 1-c,$$

取 $k = \frac{a}{a+b}$, 则 $1-k = \frac{b}{a+b}$, 代入上式, 得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b.$$

(20) 证 令 $F(x) = (x-1)f(x)$, 则 $F(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件, 故存在一点 $c \in (0, 1)$, 使得 $F'(c) = \frac{F(1) - F(0)}{1-0} = f(0)$, 即

$$f(c) + (c-1)f'(c) = f(0).$$

令 $G(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$, 则

$$G(c) = f(0) = f(1) = G(1).$$

由罗尔定理, 知存在一点 $\xi \in (c, 1) \subset (0, 1)$, 使得 $G'(\xi) = 0$, 即

$$2f'(\xi) + (\xi-1)f''(\xi) = 0.$$

(21) 证 依题设, 存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) \neq f(a) = f(b)$. 不妨设 $f(c) > f(a)$, 则由拉格朗日中值定理, 知存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c-a} > 0, \quad f'(\eta) = \frac{f(b) - f(c)}{b-c} < 0,$$

即 $|f'(\xi)| > 0, |f'(\eta)| > 0$.

(22) 证 情况 1: 若 $f'(\xi) = 0$, 由 $f''(\xi) \neq 0$, 不妨设 $f''(\xi) > 0$, 则 ξ 为 $f(x)$ 的极小值点, 即存在 $h > 0$, 当 $x \in [\xi-h, \xi+h]$ 时, $f(\xi) \leq f(x)$.

若 $f(\xi-h) > f(\xi+h)$, 则由 $f(x)$ 的连续性, 知存在一点 $x_1 \in (\xi-h, \xi)$, 使得 $f(x_1) = f(\xi+h)$. 令 $x_2 = \xi+h$, 则

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 = f'(\xi).$$

若 $f(\xi-h) = f(\xi+h)$, 则令 $x_1 = \xi-h, x_2 = \xi+h$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 = f'(\xi).$$

若 $f(\xi-h) < f(\xi+h)$, 则由 $f(x)$ 的连续性, 知存在一点 $x_1 \in (\xi, \xi+h)$, 使得 $f(x_1) = f(\xi-h)$, 令 $x_2 = \xi-h$, 则

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 = f'(\xi).$$

情况 2: 若 $f'(\xi) \neq 0$, 令 $g(x) = f(x) - f'(\xi)x$, 则 $g(x)$ 满足情况 1 中的所有条件, 故有 x_1, x_2 , 使

得 $\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = g'(\xi) = 0$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

(23) 解 由泰勒公式, 得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4),$$

$$\ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2),$$

故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{6}.$$

(24) 证 利用泰勒公式将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开, 得

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-0)^3,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

将 $x=-1, x=1$ 分别代入上式, 得

$$0 = f(-1) = f(0) + f'(0)(-1-0) + \frac{f''(0)}{2!}(-1-0)^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1-0)^3,$$

$$1 = f(1) = f(0) + f'(0)(1-0) + \frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}(1-0)^3,$$

其中 $\xi_1 \in (-1, 0), \xi_2 \in (0, 1)$, 上面两式相减, 得 $-1 = \frac{-1}{3!}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]$, 即有

$$m \leq \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3 \leq M,$$

其中 m, M 分别为 $f'''(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上的最小值与最大值, 由介值定理, 知存在一点 $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

(25) 证 (I) 令 $g(x) = xf(x)$, 由已知, 有 $g(0) = g(x_0) = g(1) = 0$, 由罗尔定理, 知存在一点 $\xi_1 \in (0, x_0), \xi_2 \in (x_0, 1)$, 使得 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$, 即

$$\xi_1 f'(\xi_1) + f(\xi_1) = \xi_2 f'(\xi_2) + f(\xi_2) = 0.$$

(II) 由 $f(x_0) = f(1) = 0$ 及罗尔定理, 知存在一点 $\eta_1 \in (x_0, 1)$, 使得 $f'(\eta_1) = 0$, 又 $f''(x) > 0, x \in (x_0, 1)$, 故 $f'(x)$ 单调增加, 从而存在一点 $\xi_1 \in (x_0, \eta_1)$, 使得

$$f'(\xi_1) < f'(\eta_1) = 0.$$

由已知条件, 知 $f(0) < 0$, 由拉格朗日中值定理, 知存在一点 $\xi_2 \in (0, x_0)$, 使得

$$0 < \frac{f(0) - f(x_0)}{0 - x_0} = f'(\xi_2).$$

由 $f'(x)$ 连续及 $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$ 及零点定理, 知存在一点 $\eta_2 \in (\xi_2, \xi_1)$, 使得

$$f'(\eta_2) = 0 (\eta_2 < \eta_1).$$

根据 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 可导, 且 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$ 及罗尔定理, 知存在一点 $\eta \in (\eta_2, \eta_1) \subset (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) = 0$.

(26) 证 考虑到证 $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}M$, 不妨将 $f(u)$ 在动点 x 处展开, 则

$$f(u) = f(x) + f'(x)(u-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(u-x)^2,$$

其中 ξ 介于 x 与 u 之间. 代入端点 $u=0, u=1$, 有

$$0 = f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(1-x)^2, \quad ①$$

$$0 = f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)x^2, \quad ②$$

其中 ξ_1 介于 x 与 1 之间, ξ_2 介于 0 与 x 之间.

式 ① 和式 ② 两式相减, 得

$$f'(x) = -\frac{1}{2}[f''(\xi_1)(1-x)^2 - f''(\xi_2)x^2].$$

当 $x=0$ 或 $x=1$ 时, 有

$$|f'(0)| = \frac{1}{2}|f''(\xi_1)| \quad \text{或} \quad |f'(1)| = \frac{1}{2}|f''(\xi_2)|,$$

不等式成立.

当 $x \in (0, 1)$ 时, 由三角不等式, 得

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}[|f''(\xi_1)|(1-x)^2 + |f''(\xi_2)|x^2].$$

令 $f''(\xi) = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$, $\xi \in (0, 1)$, 则

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}|f''(\xi)|[(1-x)^2 + x^2] < \frac{1}{2}|f''(\xi)| \leq \frac{1}{2}M.$$

综上所述, 当 $x \in [0, 1]$ 时, 原不等式成立.

第四章 导数的应用

考试要求

1. 理解函数的极值概念, 掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法, 掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.
2. 会用导数判断函数图形的凹凸性(注: 在区间 (a, b) 内, 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数. 当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凹的; 当 $f''(x) < 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凸的), 会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线, 会描绘函数的图形.
3. (仅数学一、数学二要求) 了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念, 会计算曲率和曲率半径.

第一节 单调性与极值

内容与方法提要

一、单调性

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 若 $f'(x) > 0 (< 0)$, 则 $f(x)$ 在 I 上单调增加(减少).

注 ① 反之不一定成立, 如 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, 但在 $x = 0$ 处, $y' = 0$.

② 利用单调性证明不等式是考试的基本要求.

③ 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间是考点之一.

二、极 值

1. 极值的定义

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 对任意一点 $x \in \dot{U}(x_0)$, 若有 $f(x) < f(x_0)$ [$f(x) > f(x_0)$], 则称点 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点(极小值点), 称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值(极小值).

注 由极值的定义, 知极值点不能在区间的端点处取得.

2. 极值的必要条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$.

3. 驻 点

函数的一阶导数为 0 的点称为驻点. 驻点不一定是极值点, 极值点也不一定是驻点.

4. 极值的第一充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内可导.

(1) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(2) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

(3) 若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧不变号, 则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

5. 极值的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$.

(1) 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(2) 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.

注 ① 求 $f(x)$ 极值的步骤:

(i) 求出可能的极值点,即一阶导数为0的点与导数不存在的点;

(ii) 对导数存在的点,利用极值的充分条件判别;对导数不存在的点,用极值的第一充分条件或极值的定义判别.

② 极值的第二充分条件的推广:

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数,且 $f^{(k)}(x_0) = 0 (k = 1, 2, \dots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 2)$.

(i) 若 n 为偶数,且 $f^{(n)}(x_0) < 0$,则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(ii) 若 n 为偶数,且 $f^{(n)}(x_0) > 0$,则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(iii) 若 n 为奇数,则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

事实上,由条件 $f^{(k)}(x_0) = 0 (k = 1, 2, \dots, n-1)$ 及泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n],$$

可知当 n 为偶数,且 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x) < f(x_0)$,故 x_0 是极大值点;当 n 为偶数,且 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x) > f(x_0)$,故 x_0 是极小值点.

三、最 值

(1) 求 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 的步骤:

① 求 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的驻点和不可导点,以及其对应的函数值;

② 求 $f(x)$ 在端点处的函数值 $f(a), f(b)$;

③ 比较 $f(x)$ 在驻点和不可导点处的函数值及 $f(a), f(b)$ 的大小,最大者为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 M ,最小者为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值 m .

(2) 求 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的最大值 M 和最小值 m 的步骤:

① 求 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点和不可导点;

② 求 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$;

③ 比较 $f(x)$ 在驻点和不可导点处的函数值与 A, B 的大小,便可求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的最值.

注 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导,若 $x = x_0 \in (a, b)$ 为 $f(x)$ 在 (a, b) 内唯一的极值点,则 $f(x_0)$ 为最值.

例如 求 $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-2, 3]$ 上的最值.

解 当 $x \neq 0$ 时,由 $f'(x) = \frac{5(x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = 0$,得唯一驻点 $x = 2$.

当 $x = 0$ 时, $f'(x)$ 不存在,即 $f(x)$ 的不可导点为 $x = 0$.

比较大小:由于

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x-5)\sqrt[3]{x^2} = -7\sqrt[3]{4},$$

$$f(0) = 0, \quad f(2) = -3\sqrt[3]{4}, \quad f(3) = -2\sqrt[3]{9},$$

故 $f(x)$ 在 $(-2, 3]$ 上有最大值 $f(0) = 0$,无最小值.

典型例题分析

题型一 证明不等式

例 1 设 $x \in (0, 1)$,证明:

(1) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$;

(2) $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

证 (1) 利用单调性证明. 令

$$f(x) = x^2 - (1+x)\ln^2(1+x) \quad (x \geq 0),$$

只需证明当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 0$ 即可. 由于

$$f'(x) = 2x - \ln^2(1+x) - 2\ln(1+x), \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2}{1+x} = \frac{2}{1+x}[x - \ln(1+x)] \geq 0,$$

且等号仅在有限个点 ($x=0$) 处取得, 故 $f'(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调增加, 从而当 $x \in [0, 1)$ 时, $f'(x) \geq f'(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调增加.

又由于 $f(0) = 0$, 故当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > f(0) = 0$.

(2) 令 $F(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, 则

$$F'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)} < 0$$

[由(1), 知分子 $(1+x)\ln^2(1+x) - x^2 < 0$], 故 $F(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调减少.

又由于 $F(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故当 $x \in (0, 1)$ 时有 $\frac{1}{\ln 2} - 1 < F(x) < \frac{1}{2}$, 即

$$\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$$

例 2 设 $0 < a < b$, 证明: $\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

分析 利用拉格朗日中值定理与单调性证明.

证 取 $f(x) = \ln x$ ($0 < a \leq x \leq b$), 应用拉格朗日中值定理, 有

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = (\ln x)' \Big|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi} \quad (0 < a < \xi < b),$$

且 $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} > \frac{2a}{a^2+b^2}$ (这里利用了 $a^2+b^2 > 2ab$), 故

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2a}{a^2+b^2}.$$

令辅助函数

$$g(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}} \quad (0 < a < x < b),$$

则

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}} \right) = -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0,$$

故 $g(x)$ 单调减少.

又因为 $g(a) = 0$, 所以当 $x > a$ 时, $g(x) < g(a) = 0$, 从而当 $b > a$ 时, 有

$$\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

即 $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

综上所述,

$$\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

注 利用单调性证明不等式时,常将 a 或 b 改为 x 来作辅助函数.

例 3 证明:当 $x > 0$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

证 设

$$f_1(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln(1+x) - x \ln x, \quad x \in (0, +\infty),$$

则

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} - \ln x - 1 = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x},$$

$$f_1''(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0, \quad x > 0,$$

故 $f_1'(x)$ 单调减少. 又由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right] = 0,$$

可知当 $x > 0$ 时, 有 $f_1'(x) > 0$, 故 $f_1(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 从而 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 单调增加. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ 所以当 } x > 0 \text{ 时, } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e.$$

设

$$f_2(x) = (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = (x+1) \ln(1+x) - (x+1) \ln x, \quad x \in (0, +\infty),$$

则

$$f_2'(x) = \ln(1+x) + 1 - \ln x - \frac{x+1}{x} = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x},$$

$$f_2''(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(1+x)} > 0, \quad x > 0,$$

故 $f_2'(x)$ 单调增加. 又由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right] = 0,$$

可知当 $x > 0$ 时, 有 $f_2'(x) < 0$, 故 $f_2(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少, 从而 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 单调减少. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e, \text{ 所以当 } x > 0 \text{ 时, } e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

综上所述, 当 $x > 0$ 时, 有 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

题型二 讨论函数 $f(x)$ 的单调性与极值

例 4 设 $f(x) = \frac{x^3}{(2+x)^2} + 4$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值, 并求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和

拐点.

解 由于 $f(x)$ 的定义域为 $x \neq -2$ 的一切实数, 故当 $x \neq -2$ 时, 由

$$f'(x) = \frac{x^2(6+x)}{(2+x)^3} = 0,$$

可得 $x = 0, x = -6$. 由

$$f''(x) = \frac{24x}{(2+x)^4} = 0,$$

可得 $x = 0$. 列表如下:

x	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		+	0	+
$f''(x)$	-		-		-	0	+
$f(x)$	↗ 凸	极大值	↘ 凸		↗ 凸	拐点	↗ 凹

由此可知 $f(-6) = -\frac{19}{2}$ 为极大值, 拐点为 $(0, 4)$.

注 讨论函数的性态是基本题.

例 5 求函数 $f(x) = |x|e^x$ 在 $[-2, 1]$ 上的极值与最值.

解
$$f(x) = |x|e^x = \begin{cases} -xe^x, & -2 \leq x \leq 0, \\ xe^x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = e^x + xe^x > 0$;

当 $-2 < x < 0$ 时, 令 $f'(x) = -e^x - xe^x = 0$, 得 $x = -1$;

当 $x = 0$ 时, 由

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x - 0}{x - 0} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-xe^x - 0}{x - 0} = -1,$$

可知 $f'(0)$ 不存在.

下面判别在 $x = 0, x = -1$ 处, $f(x)$ 是否取得极值.

当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) = e^x(-1-x) < 0$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = e^x(1+x) > 0$, 故 $f(0) = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值.

又由

$$f''(x) = e^x(-2-x), \quad -2 < x < 0,$$

$$f''(-1) = e^{-1}(-2+1) = -e^{-1} < 0,$$

可知 $f(-1) = e^{-1}$ 为 $f(x)$ 的极大值.

比较大小: 由

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = e^{-1}, \quad f(-2) = 2e^{-2}, \quad f(1) = e,$$

可得 $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$, 最大值为 $f(1) = e$.

综上所述, $f(x)$ 的极大值为 $f(-1) = e^{-1}$, $f(x)$ 的极小值为 $f(0) = 0$; $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = e$, $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$.

例 6 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则().

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解 由已知,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0) = 0, \\ x \in \dot{U}(0), f''(x) > 0. \end{cases}$$

由 $x \in \dot{U}(0), f''(x) > 0$, 知 $f'(x)$ 单调增加, 又由 $f(x)$ 二阶可导, 知 $f'(x)$ 连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = f'(0) = 0,$$

故当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值, 选项 B 正确.

注 注意由 $x \in \overset{\circ}{U}(0)$, $f''(x) > 0$ 不能直接得到 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值, 由 $f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$ 才能得到 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

例 7 设 $f(x)$ 满足方程 $2f''(x) + [f'(x)]^2 = 3x$, 问 $x = 0$ 是否为 $y = f(x)$ 的极值点? $(0, f(0))$ 是否为曲线 $y = f(x)$ 的拐点?

解 若 $f'(0) \neq 0$, 则 $x = 0$ 不是 $y = f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 也不是 $y = f(x)$ 的拐点.

若 $f'(0) = 0$, 则由 $2f''(x) + [f'(x)]^2 = 3x$, 知 $f''(0) = 0$, 故由

$$f'''(x) = \frac{1}{2}[3 - 2f'(x)f''(x)],$$

可知 $f'''(0) = \frac{3}{2} > 0$, 故 $x = 0$ 不是 $y = f(x)$ 的极值点. 又由

$$f'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = \frac{3}{2} > 0,$$

可知存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (0, \delta)$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $f''(x) < 0$, 故 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

注 由题设 $f''(x) = \frac{1}{2}\{3x - [f'(x)]^2\}$, 知 $f'''(x)$ 存在.

例 8 设 $k > 0$, $f(x) = \frac{1}{3}kx^3 - x$, $x \in [0, \frac{1}{k}]$, 则().

A. 当 $0 < k < 1$ 时, $f(\frac{1}{k})$ 是 $f(x)$ 的最大值

B. 当 $0 < k < 1$ 时, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最大值

C. 当 $k \geq 1$ 时, $f(\frac{1}{k})$ 是 $f(x)$ 的最大值

D. 当 $k \geq 1$ 时, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最大值

解 选择题可以用取特殊值法.

如本题取 $k = 1$, 则

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, \quad x \in [0, 1],$$

$$f'(x) = x^2 - 1 \leq 0, \quad x \in [0, 1],$$

等号仅在 $x = 1$ 处取得, 故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调减少, 从而 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最大值, 选项 D 正确.

注 本题用求最大值的一般方法时, 过程较烦琐, 如下:

$$\text{令 } f'(x) = kx^2 - 1 = 0, \text{ 则 } x = \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

当 $0 < k < 1$ 时, $\sqrt{\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}$. 当 $x \in [0, \sqrt{\frac{1}{k}})$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, \sqrt{\frac{1}{k}})$ 上单调减少, 同

理, $f(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{1}{k}}, \frac{1}{k}]$ 上单调增加, 因此 $f(\sqrt{\frac{1}{k}})$ 是 $f(x)$ 的最小值, 而

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1-3k}{3k^2},$$

当 $0 < k < \frac{1}{3}$ 时, $f(\frac{1}{k}) > 0$, 此时 $f(\frac{1}{k})$ 是 $f(x)$ 的最大值; 当 $k > \frac{1}{3}$ 时, $f(\frac{1}{k}) < 0$, 此时 $f(0)$ 是 $f(x)$

的最大值; 当 $k = \frac{1}{3}$ 时, $f(0)$ 与 $f(\frac{1}{k})$ 均为 $f(x)$ 的最大值, 因此排除选项 A 和选项 B.

当 $k \geq 1$ 时, $\sqrt{\frac{1}{k}} \geq \frac{1}{k}$, 在 $\left[0, \frac{1}{k}\right]$ 上, $f'(x) = kx^2 - 1 \leq 0$, 此时 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{k}\right]$ 上单调减少, 故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最大值, 选项 D 正确.

另外, 本题也可以参考函数图形求最大值.

由于 $f(x)$ 的图形如图 4-1 所示, 故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{k}\right]$ 上的最大值仅能在端点处取得, 即为 $\max\left\{f(0), f\left(\frac{1}{k}\right)\right\}$, 从而得出结论.

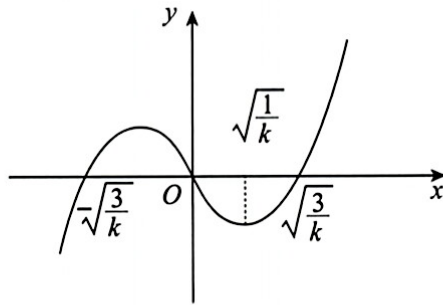


图 4-1

例 9 设 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极小值.

分析 此题为求隐函数 $y = y(x)$ 的极值.

解 由已知, 方程两边同时对 x 求导, 得

$$6y^2 \cdot y' - 4y \cdot y' + 2(y + xy') - 2x = 0,$$

令 $y' = 0$, 得 $y = x$. 将 $y = x$ 代入原方程, 可得

$$(x-1)(2x^2+x+1) = 0,$$

故 $x = 1$, 将 $x = 1$ 代入原方程, 可得 $y = 1$. 又由

$$y''(1) = \frac{(1-y')(3y^2-2y+x) - (x-y)(6yy' - 2y' + 1)}{(3y^2-2y+x)^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{1}{2} > 0,$$

知 $y = y(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值 $y = 1$.

题型三 图形题

例 10 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图 4-2 所示, 则 $f(x)$ 有().

- A. 一个极小值点和两个极大值点
- B. 两个极小值点和一个极大值点
- C. 两个极小值点和两个极大值点
- D. 三个极小值点和一个极大值点

解 根据导函数的图形和极值判别.

由图形知, 在 x_1, x_2, x_3 处 $f'(x) = 0$, $f'(0)$ 不存在.

在 x_1 两侧, 由 $f'(x)$ 的符号由正变为负, 可知 x_1 是 $f(x)$ 的极大值点.

在 x_2 两侧, 由 $f'(x)$ 的符号由负变为正, 可知 x_2 是 $f(x)$ 的极小值点.

在 $x = 0$ 两侧, 由 $f'(x)$ 的符号由正变为负, 可知 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

在 x_3 两侧, 由 $f'(x)$ 的符号由负变为正, 可知 x_3 是 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述, 选项 C 正确.

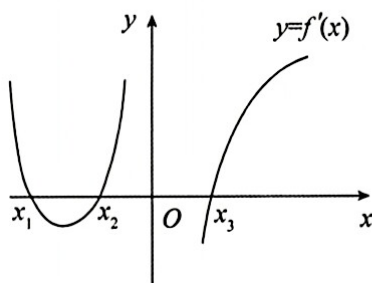


图 4-2

第二节 凹凸性与拐点

内容与方法提要

一、凹凸性的概念

1. 凹凸性的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 若对任意的 $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 \neq x_2$), 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称 $y = f(x)$ 在 I 上是凹函数;

若对任意的 $x_1, x_2 \in I (x_1 \neq x_2)$, 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $y = f(x)$ 在 I 上是凸函数(见图 4-3).

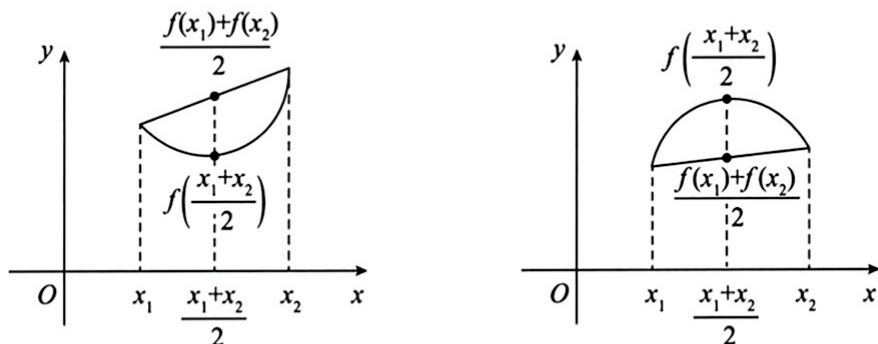


图 4-3

2. 凹凸性的判别

设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导.

- (1) 若 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上是凹函数;
- (2) 若 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上是凸函数.

二、拐点的概念

1. 拐点的定义

设 $f(x)$ 在某区间上连续, $y = f(x)$ 的凹凸性的分界点称为拐点.

2. 拐点的判别

- (1) 求 $f''(x)$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = x_0$.
- (2) 若 $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 两侧邻近异号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点.

注 若 $f''(x_1)$ 不存在, 且 $f''(x)$ 在 $x = x_1$ 两侧邻近异号, 则 $(x_1, f(x_1))$ 是拐点.

三、渐近线与曲率

1. 渐近线

- (1) 水平渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$, 则称 $y = C$ 为 $y = f(x)$ 的水平渐近线.
- (2) 铅直渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.
- (3) 斜渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$, 则称 $y = kx + b$ 为 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

注 求极限时应注意考虑左、右极限.

2. 曲率(仅数学一、数学二要求)

在几何上, 曲率表示曲线 $y = f(x)$ 的弯曲程度.

(1) 曲率的计算公式.

① 设曲线为 $y = f(x)$, 则曲率 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

② 设曲线由 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定, 则曲率 $K = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(2) 曲率半径: 曲率圆的半径称为曲率半径, 计算公式为

$$R = \frac{1}{K} \quad (K \neq 0).$$

注 ① 设曲线为 $y = f(x)$, 过点 $P(x, y)$ 作曲线的法线, 在曲线凹向一侧的法线上取一点 C , 使 $|\overline{PC}| = \frac{1}{K} = R$, 以 C 为圆心, R 为半径作一圆, 如图 4-4 所示, 则称此圆为曲线在点 P 处的曲率圆, 点 $C(\xi, \eta)$ 称为曲率中心, R 称为曲率半径.

② 在点 P 处, 曲线与曲率圆有如下关系:

(i) 有共同的切线, 即曲率圆与曲线在点 P 处相切;

(ii) 有相同的凹向和相同的曲率.

③ 曲率中心.

由图 4-4 知,

$$\begin{cases} \xi = x - R \sin \alpha, \\ \eta = y + R \cos \alpha. \end{cases} \quad ①$$

又

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

在图 4-4 的情形下, 曲线是凹的, 故 $y'' > 0$, 代入式 ①, 得曲率中心公式为

$$\begin{cases} \xi = x - y' \frac{1+y'^2}{y''}, \\ \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$

可以验证, 在其他情形下, 上式仍正确.

曲率中心在现行考研大纲中未作要求, 但考题中曾出现过.

典型例题分析

题型一 讨论曲线的凹凸性与拐点

例 1 求曲线 $f(x) = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的凹凸区间与拐点.

解 当 $x \neq 0$ 时, 由

$$f'(x) = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = \frac{10(x+1)}{9x\sqrt[3]{x}},$$

可知 $f''(-1) = 0$; 当 $x = 0$ 时, $f''(x)$ 不存在. 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	凸	拐点	凹		凹

由此可知 $f(x)$ 的凸区间为 $(-\infty, -1)$, 凹区间为 $(-1, +\infty)$, 拐点为 $(-1, -6)$.

例 2 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有二阶连续导数, 且 $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$, 证明: $(0, F(0))$ 是曲线 $F(x) = (1 - e^{2x})f(x)$ 的拐点.

证

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2e^{2x}f(x) + (1 - e^{2x})f'(x), \quad F'(0) = 0, \\ F''(x) &= -4e^{2x}f(x) - 4e^{2x}f'(x) + (1 - e^{2x})f''(x), \\ F''(0) &= -4[f(0) + f'(0)] = 0. \end{aligned}$$

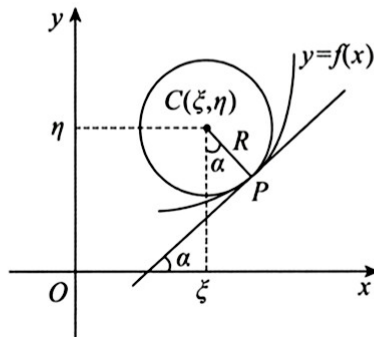


图 4-4

因为

$$\begin{aligned} F'''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F''(x) - F''(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F''(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -4e^{2x} \left[\frac{f(x)}{x} + \frac{f'(x)}{x} \right] + \frac{1 - e^{2x}}{x} f''(x) \right\} \\ &= -4[f'(0) + f''(0)] - 2f''(0) = -6f''(0) \neq 0, \end{aligned}$$

所以 $F''(x)$ 在 $x = 0$ 两侧邻近异号, 从而 $(0, F(0))$ [即 $(0, 0)$] 是曲线 $y = F(x)$ 的拐点.

注 依题设, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处只有二阶连续导数, 求 $F'''(0)$ 只能用导数的定义来求.

题型二 图形题

例 3 设在定义域内 $f(x)$ 二阶可导, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在 $[0, 1]$ 上 ().

- A. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ B. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
C. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ D. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

解 当题设条件有 $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) 时, 可考虑曲线 $y = f(x)$ 的图形 (见图 4-5), 直接判别函数不等式.

直线 $\overline{AB}$ 的方程为

$$\begin{aligned} y &= f(0) + \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}(x - 0) \\ &= f(0)(1 - x) + f(1)x, \end{aligned}$$

由 $f''(x) \geq 0$, 知 $y = f(x)$ 为凹函数, $\overline{AB}$ 在 $y = f(x)$ 上方, 故 $g(x) \geq f(x)$, 选项 D 正确.

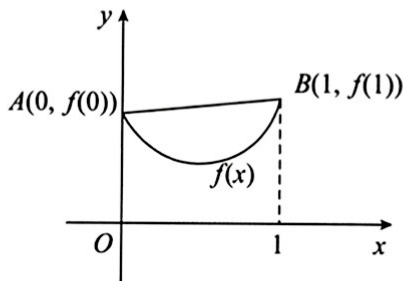


图 4-5

例 4 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, L_1, L_2, L_3 (见图 4-6) 分别为曲线 ().

- A. $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$
B. $y = f(x), y = f''(x), y = f'(x)$
C. $y = f''(x), y = f'(x), y = f(x)$
D. $y = f'(x), y = f(x), y = f''(x)$

解 根据 $y = f(x), y = f'(x), y = f''(x)$ 的正负符号判别.

若 $y = f(x)$ 为 L_3 , 则其图形上凸部分对应的 $y = f''(x) < 0$, 因而曲线 $y = f''(x)$ 相应部分位于 x 轴下方, 而曲线 L_1 正是这种情形.

又由 $f''(x) < 0$, 可知函数 $y = f'(x)$ 在对应区间上单调减少, 曲线 L_2 正是这种情形, 故 L_1, L_2, L_3 分别为 $y = f''(x), y = f'(x), y = f(x)$, 选项 C 正确.

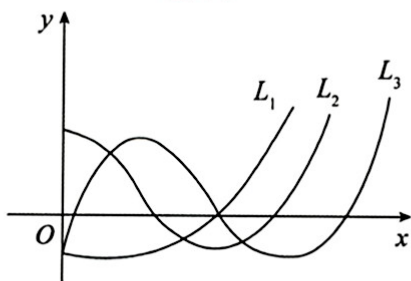


图 4-6

题型三 曲率与曲率圆 (仅数学一、数学二要求)

例 5 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $P(1, 2)$, 在该点与圆:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

相切, 且有相同的曲率半径与凹向, 求 a, b, c 的值.

分析 本题考查曲线的曲率、曲率半径、曲率圆的概念.

解 依题设, 由抛物线经过点 $P(1, 2)$, 知

$$a + b + c = 2. \quad (1)$$

又由抛物线与圆相切, 且有相同的曲率半径与凹向, 知此圆为抛物线在点 $P(1, 2)$ 处的曲率圆, 故

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

两边同时对 x 求导,得

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{5}{2}\right) \cdot y' = 0,$$

则 $y' \Big|_{x=1} = 1$. 又由于

$$y = ax^2 + bx + c, y' \Big|_{x=1} = 2a + b,$$

故

$$2a + b = 1. \quad ②$$

根据曲率与曲率半径的关系 $R = \frac{1}{K}$, 且由已知圆的方程, 可知 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故

$$\sqrt{2} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \Big|_{x=1} = \frac{|y''|}{2\sqrt{2}} \Big|_{x=1} = \frac{a}{\sqrt{2}}. \quad ③$$

联立式 ①②③, 解得 $a = 2, b = -3, c = 3$.

注 由圆: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 在点 $P(1, 2)$ 处的凹向, 知 $y'' > 0$.

例 6 设 $y = f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f''(x)$ 不变号, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率圆为 $x^2 + y^2 = 2$, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内 ().

A. 有极值点, 无零点

B. 无极值点, 无零点

C. 有极值点, 有零点

D. 无极值点, 有零点

分析 此题涉及曲率、曲率半径、曲率圆、极值及零点多个知识点.

解 依题意, 如图 4-7 所示. $x^2 + y^2 = 2$ 两边同时对 x 分别求一阶和二阶导数, 得

$$2x + 2y \cdot y' = 0, \quad 1 + y'^2 + yy'' = 0,$$

在点 $(1, 1)$ 处, 有

$$y' = f'(1) = -1, \quad f''(1) = -2.$$

因为 $f''(x)$ 不变号, 所以 $f''(x) \leq 0$, 即 $f'(x)$ 单调减少, 从而在 $[1, 2]$ 上, 有

$$f'(x) \leq f'(1) = -1 < 0,$$

即 $f(x)$ 单调减少, 由此可知 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内无极值点. 由

$$f(2) - f(1) = f'(\xi) < -1, \quad 1 < \xi < 2,$$

且 $f(1) = 1$, 可知 $f(2) < 0$, 故由零点定理, 知 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点, 选项 D 正确.

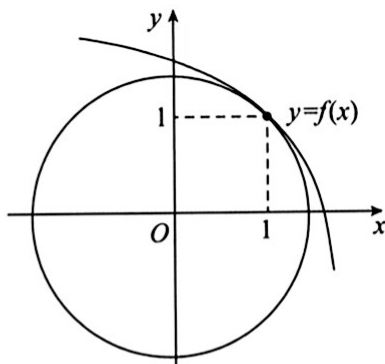


图 4-7

题型四 讨论含参数方程的根

讨论方程 $f(x, k) = 0$ 实根个数的步骤:

(1) 求 $f(x, k)$ 的极值, 设极小值为 $m(k)$, 极大值为 $M(k)$;

(2) 讨论 $m(k), M(k)$ 与 x 轴的位置关系.

例 7 讨论方程 $2x^3 - 9x^2 + 12x + k = 0$ 不同实根的个数.

解 令 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + k, x \in \mathbf{R}$, 则

$$f'(x) = 6(x-1)(x-2),$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1, x = 2$. 又由于

$$f''(x) = 12x - 18, \quad f''(1) = -6 < 0, \quad f''(2) = 6 > 0,$$

故 $f(1) = 5 + k$ 为 $f(x)$ 的极大值, $f(2) = 4 + k$ 为 $f(x)$ 的极小值.

(1) 当 $5+k > 0$ 且 $4+k < 0$, 即 $-5 < k < -4$ 时, 由 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, 可知 $f(x) = 0$ 有三个不同实根;

(2) 当 $5+k = 0$ 或 $4+k = 0$ 时, $f(x) = 0$ 有两个不同实根;

(3) 当 $5+k < 0$ 或 $4+k > 0$ 时, $f(x) = 0$ 有一个实根.

例 8 求方程 $k \arctan x = x$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

解 令 $f(x) = k \arctan x - x$, 显然 $f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$, 即 $f(x)$ 为奇函数, 故只需讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的情况.

$$f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{(k-1)-x^2}{1+x^2}.$$

当 $k \leq 1$ 时, 由于 x 在 $(0, +\infty)$ 内, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少, 又因为 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内没有零点, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内只有一个零点 $x = 0$.

当 $k > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \sqrt{k-1}$. 当 $x \in (0, \sqrt{k-1})$ 时, 由于 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{k-1})$ 内单调增加, 又因为 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{k-1})$ 内无零点; 当 $x \in (\sqrt{k-1}, +\infty)$ 时, 由于 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内单调减少, 又因为

$$f(\sqrt{k-1}) > f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

所以由零点定理及 $f(x)$ 的单调性, 知 $f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内恰有一个零点, 记为 x_0 .

综上所述, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内只有一个零点, 由对称性, 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内也只有一个零点 $-x_0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有三个零点: $-x_0, 0, x_0$, 此时 $f(x)$ 的示意图如图 4-8 所示.

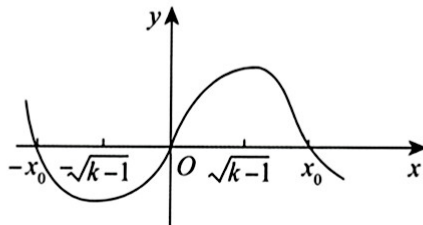


图 4-8

例 9 设方程 $ax + \frac{1}{x^2} - 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个不同实根, 求 a 的取值范围.

解 原方程变形为

$$a = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad (x > 0).$$

令 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$, 则由 $f'(x) = \frac{3-x^2}{x^4} = 0$, 得 $x = \sqrt{3}$.

当 $x \in (0, \sqrt{3})$ 时, $f'(x) > 0$, 知 $f(x)$ 单调递增.

当 $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 知 $f(x)$ 单调递减.

又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

故原方程有两个不同实根, 即直线 $y = a$ 与 $y = f(x)$ 有两个不同交点, 如图 4-9 所示. 所以, $0 < a < \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

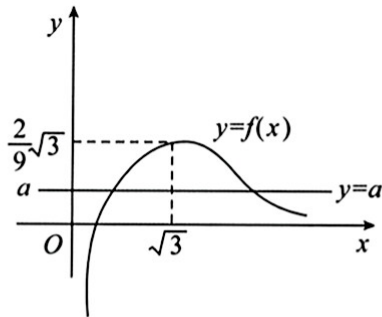


图 4-9

题型五 求渐近线方程

例 10 求曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线方程.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 知 $x = 0$ 为铅直渐近线.

由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0$, 知 $y = 0$ 为水平渐近线 (注意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$).

由于

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \\ &= 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - \ln e^x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) \right] = 0, \end{aligned}$$

故 $y = x$ 为斜渐近线.

习题演练

一、选择题

(1) 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} = \cos x$ 不同实根的个数为().

- A. 无实根
B. 有且只有一个实根
C. 有且只有两个实根
D. 无法确定

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数 $y = f'(x)$ 如图 4-10 所示, 则().

- A. $f(x)$ 有两个极值点, $y = f(x)$ 有两个拐点
B. $f(x)$ 有两个极值点, $y = f(x)$ 有三个拐点
C. $f(x)$ 有三个极值点, $y = f(x)$ 有一个拐点
D. $f(x)$ 有三个极值点, $y = f(x)$ 有两个拐点

(3) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为().

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

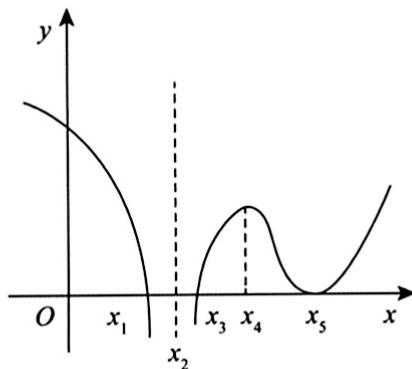


图 4-10

二、解答题

(1) 求 $y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$ 的单调区间、凹凸区间、极值和拐点.

(2) 证明: 不等式 $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$ ($0 < a < b$).

(3) 设 $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 的连续性, 并求 $f(x)$ 的单调区间、极值与渐近线.

(4) 比较 π^e 与 e^π 的大小.

(5) 设当 $x > 0$ 时, 方程 $\ln a = \frac{\ln x}{x}$ 有实根, 求 a 的取值范围.

习题演练解答

一、选择题

(1)C.

解 令 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(0) = -1 \neq 0$, 故考虑 $x \in (0, +\infty)$, 有

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x.$$

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, 又由于

$$f(0) = -1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 1,$$

故 $f(x) = 0$ 有且只有一个实根;

当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 由于 $f(x) > 0$, 故 $f(x) = 0$ 无实根, 从而由对称性, 可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且只有两个实根, 选项 C 正确.

(2)B.

解 x_1, x_3, x_5 为 $f(x)$ 的驻点, 由于在 x_1 和 x_3 两侧, $f'(x)$ 变号, 故 x_1 和 x_3 为极值点, 由于在 x_5 两侧 $f'(x)$ 不变号, 故 x_5 不是极值点.

由于在 x_2 处一阶导数不存在, 且在 x_2 两侧 $f'(x)$ 不变号, 故 x_2 不是极值点. 因为在 x_2 处二阶导数不存在, 在 x_4 和 x_5 处二阶导数为零, 且在这 3 个点两侧, 一阶导函数增减性均发生改变, 所以 x_2, x_4, x_5 都为拐点, 选项 B 正确.

(3)C.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1,$$

故 $y = 1$ 是水平渐近线, 且没有斜渐近线.

又由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, 知 $x = 1$ 是铅直渐近线.

由于 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$, 故 $x = -1$ 不是渐近线.

综上所述, 曲线有两条渐近线, 选项 C 正确.

二、解答题

(1) **解** 函数的定义域为 $x \neq \pm 1$ 的一切实数. 令

$$y' = 1 + \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0,$$

解得 $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$.

由 $y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0$, 得 $x = 0$, 故将 y 的单调区间、凹凸区间、极值和拐点情况列表如下:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+		-		-		-		-		+
y''	-		-		+		-		+		+
y	单增且凸	极大	单减且凸	无定义	单减且凹	拐点	单减且凸	无定义	单减且凹	极小	单增且凹

(2) **证** 令 $x = \frac{b}{a}, x \in (1, +\infty)$, 则原不等式变形为

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{1+x}.$$

令 $f(x) = (1+x)\ln x - 2(x-1), x \in [1, +\infty)$, 则

$$f'(x) = \ln x + \frac{1+x}{x} - 2 = \ln x + \frac{1}{x} - 1,$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \geq 0 \quad (\text{等号仅在 } x=1 \text{ 处取得}),$$

故 $f'(x)$ 单调增加且 $f'(1) = 0$, 从而有 $f'(x) \geq 0$, 于是 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调增加. 又因为 $f(1) = 0$, 所以当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 有 $f(x) > 0$, 即原不等式成立.

(3) **解** 由

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}} = 0 = f(0) = 0,$$

知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = \sqrt{x} \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \sqrt{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = e$.

因为当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 内单调增加, 在 $(e, +\infty)$ 内单调减少; $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ 为极大值, 没有极小值.

又因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1,$$

所以 $y = 1$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.

(4) **解** 令 $f(x) = e^x - x^e (x \geq e)$, 则

$$f'(x) = e^x - ex^{e-1},$$

$$f''(x) = e^x - e(e-1)x^{e-2},$$

$$f'''(x) = e^x - e(e-1)(e-2)x^{e-3}.$$

由于 $e-3 < 0$, 故当 $x \geq e$ 时, x^{e-3} 单调减少, $-e(e-1)(e-2)x^{e-3}$ 单调增加, e^x 也单调增加, 从而 $f'''(x)$ 在 $x \geq e$ 时单调增加. 于是当 $x \geq e$ 时, 有

$$\begin{aligned} f'''(x) &\geq f'''(e) = e^e - e(e-1)(e-2)e^{e-3} \\ &= e^{e-2}(e^2 - e^2 + 3e - 2) \\ &= e^{e-2}(3e - 2) > 0, \end{aligned}$$

故 $f''(x)$ 单调增加. 当 $x \geq e$ 时, 有

$$f''(x) \geq f''(e) = e^e - e(e-1)e^{e-2} = e^{e-1} > 0,$$

故 $f'(x)$ 单调增加. 当 $x > e$ 时, 有 $f'(x) > f'(e) = 0$, 故 $f(x)$ 单调增加. 当 $x > e$ 时, 有 $f(x) > f(e) = 0$. 取 $x = \pi$, 得 $f(\pi) > 0$, 即 $\pi^e < e^\pi$.

(5) **解** 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

且 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = e$, 且 $f(e) = \frac{1}{e}$.

又当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加; 当 $e < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少. 故 $f(e) = \frac{1}{e}$ 为极大值.

当 $x \in (0, e)$ 时, $f(x)$ 从 $-\infty$ 单调增加到 $\frac{1}{e}$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f(x)$ 从 $\frac{1}{e}$ 单调减少到 0. 于是当 $\ln a \leq \frac{1}{e}$ 时, 原方程有实根 (当 $\ln a = \frac{1}{e}$ 时, 有一个实根; 当 $0 < \ln a < \frac{1}{e}$ 时, 有两个实根; 当 $\ln a \leq 0$ 时, 有一个实根), 即当 $0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 原方程有实根.

第五章 不定积分

考试要求

1. 理解原函数与不定积分的概念.
2. 掌握不定积分的基本公式与性质.
3. 掌握不定积分的换元积分法与分部积分法.
4. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的不定积分.

第一节 不定积分的概念和性质

内容与方法提要

一、原函数与不定积分的概念

1. 原函数的定义

设函数 $F(x)$ 定义在区间 I 上, 若 $\forall x \in I$, 有 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

2. 不定积分的定义

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则称 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 为 $f(x)$ 的不定积分, 其中 C 为任意常数.

二、原函数与不定积分的性质

1. 原函数存在定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在原函数, 且 $\left[\int_a^x f(t)dt\right]' = f(x)$.

说明 ① 记 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则称 $F(x)$ 为积分上限函数.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &\stackrel{\text{积分}}{\stackrel{\text{中值定理}}{=}} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\xi \rightarrow x)}} \frac{1}{\Delta x} f(\xi) \cdot \Delta x \quad (x < \xi < x + \Delta x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

② 原函数存在定理的条件是充分非必要的.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在原函数; 反之, 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在原函数, 但 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一定连续.

例如 $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 有

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

记 $F'(x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有原函数, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断 ($x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点).

2. 不定积分的性质

$$(1) \int [af(x) \pm bg(x)] dx = a \int f(x) dx \pm b \int g(x) dx.$$

$$(2) \left[\int f(x) dx \right]' = f(x), d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx;$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \int d[f(x)] = f(x) + C, \text{ 其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

典型例题分析

例 1 设 $g(x) = \int_0^x f(u) du$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}(x - 1), & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内().

A. 无界

B. 单调减少

C. 不连续

D. 连续

解 由已知, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 故根据函数可积的充分条件, 且 $f(x)$ 可积, 可知 $g(x)$ 连续, 选项 D 正确.

例 2 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外, $f(x)$ 处处连续, $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是().

A. 连续的奇函数

B. 连续的偶函数

C. 在 $x=0$ 处间断的奇函数

D. 在 $x=0$ 处间断的偶函数

解 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 依题设, 由 $f(x)$ 只有一个第一类间断点 $x=0$, 可知 $f(x)$ 可积, 故 $F(x)$ 连续. 又由 $f(x)$ 是奇函数, 可知 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是偶函数, 选项 B 正确.

例 3 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

解 已知 $f(x)$ 的导数, 利用积分求 $f(x)$.

令 $e^x = u$, 则 $x = \ln u$, 故 $f'(u) = \frac{1}{u} \ln u$, 从而有

$$f(u) = \int f'(u) du + C = \int \frac{1}{u} \ln u du + C = \frac{1}{2} \ln^2 u + C,$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

又由 $f(1) = 0$, 得 $C = 0$, 故 $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$.

例 4 设 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $a \neq 0$, 则 $\int \frac{f(ax)}{a} dx =$ ().

A. $\frac{\sin ax}{a^3 x} + C$

B. $\frac{\sin ax}{a^2 x} + C$

C. $\frac{\sin ax}{ax} + C$

D. $\frac{\sin ax}{x} + C$

解 由已知, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = f(x)$, 故

$$\int \frac{f(ax)}{a} dx = \int \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)' \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a^2} \int \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)' d(ax)$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\sin ax}{ax} + C,$$

选项 A 正确.

例 5 计算 $I = \int \max\{x^3, x^2, 1\} dx$.

解

$$\max\{x^3, x^2, 1\} = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x^3, & x > 1, \end{cases}$$

积分, 得

$$I = \int \max\{x^3, x^2, 1\} dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x < -1, \\ x + C_2, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

由原函数的连续性, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + C_2), \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + C_2) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{4}x^4 + C_3 \right), \end{aligned}$$

即

$$-\frac{1}{3} + C_1 = -1 + C_2, \quad 1 + C_2 = \frac{1}{4} + C_3,$$

令 $C_2 = C$, 则 $C_1 = -\frac{2}{3} + C$, $C_3 = \frac{3}{4} + C$, 故

$$I = \int \max\{x^3, x^2, 1\} dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} + C, & x < -1, \\ x + C, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4} + C, & x > 1. \end{cases}$$

注 计算分段函数的不定积分时, 应注意统一常数为 C .

第二节 不定积分的计算

内容与方法提要

一、不定积分的公式

$$(1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1).$$

$$(2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$(3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$(4) \int e^x dx = e^x + C.$$

$$(5) \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$(7) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$(8) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$(9) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

$$(10) \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

$$(11) \int \sec^2 x dx = \tan x + C.$$

$$(12) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C.$$

$$(13) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C.$$

$$(14) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C.$$

$$(15) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$(16) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

$$(17) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$(18) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$(19) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$(20) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

$$(21) \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

$$(22) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

二、不定积分的换元法

1. 不定积分的第一换元法(凑微分法)

设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数, 则

$$\begin{aligned} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx &= \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] \xrightarrow{\varphi(x)=u} \int f(u)du \\ &= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C. \end{aligned}$$

说明 第一换元法是通过凑微分将复杂的不定积分化为 $\int f(u)du$, 再由积分公式计算出积分. 需要掌握以下常用的凑微分公式:

$$(1) \int f(ax^n+b)x^{n-1}dx = \frac{1}{na} \int f(ax^n+b)d(ax^n+b) (n \neq 0).$$

$$(2) \int f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\int f\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(3) \int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}).$$

$$(4) \int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x) d(e^x).$$

$$(5) \int f(x \ln x)(1 + \ln x) dx = \int f(x \ln x) d(x \ln x).$$

$$(6) \int f(\cos x) \sin x dx = -\int f(\cos x) d(\cos x).$$

$$(7) \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x).$$

$$(8) \int f(\tan x) \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d(\tan x).$$

$$(9) \int f(\cot x) \csc^2 x dx = -\int f(\cot x) d(\cot x).$$

$$(10) \int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x).$$

$$(11) \int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x).$$

2. 不定积分的第二换元法

设 $f(x)$ 连续, $x = \varphi(t)$ 有连续导数且 $\varphi'(t)$ 不变号, $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ 具有原函数, 则

$$\int f(x) dx \xrightarrow[t = \varphi^{-1}(x)]{x = \varphi(t)} \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt.$$

说明 不定积分的第二换元法常用于“去根号”:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a \sin t, \quad \sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a \sec t, \quad \sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a \tan t,$$

$$\sqrt{ax+b} \rightarrow t = \sqrt{ax+b}, \quad \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \rightarrow t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

三、不定积分的分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

分部积分公式常用于不同类型函数的乘、除. 应用分部积分公式的关键是凑微分 dv .

说明 ① 被积函数为 $Q_n(x)e^{kx}$, $Q_n(x)\sin kx$, $Q_n(x)\cos kx$ 时, 一般选取 $u = Q_n(x)$.

② 当被积函数为 $Q_n(x)\ln x$, $Q_n(x)\arcsin x$, $Q_n(x)\arctan x$ 时, 一般分别选取 $u = \ln x$, $u = \arcsin x$, $u = \arctan x$.

③ 当被积函数为 $e^{kx}\cos ax$, $e^{kx}\sin ax$ 时, 一般可以任意选 $e^{kx} = u$ 或 $\cos ax = u$, $\sin ax = u$.

四、有理函数的不定积分

$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$, $P_n(x)$ 与 $Q_m(x)$ 分别表示 n 次与 m 次多项式函数.

(1) 当 $n \geq m$ 时, 称 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为假分式, 将其拆成多项式与真分式之和.

(2) 当 $n < m$ 时, 称 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为真分式, 将其拆成部分分式之和.

(3) 将 $Q_m(x)$ 进行因式分解, 再将 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 拆成部分分式之和:

① $Q_m(x)$ 的 k 重因式 $(Mx+N)^k$ 分解成 k 项为

$$\frac{A_1}{Mx+N} + \frac{A_2}{(Mx+N)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(Mx+N)^k}.$$

② $Q_m(x)$ 的 k 重因式 $(px^2+qx+r)^k$ 分解成 k 项为

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r} + \frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k},$$

这里 px^2+qx+r 在实数集内不能进行因式分解.

例如 计算积分 $I = \int \frac{2x^2-x-1}{x^3+1} dx$.

解 设

$$\frac{2x^2-x-1}{x^3+1} = \frac{2x^2-x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2-x+1},$$

得

$$2x^2-x-1 = A(x^2-x+1) + (Bx+D)(x+1).$$

比较两边同次幂项的系数, 有

$$A+B=2, \quad B+D-A=-1, \quad A+D=-1,$$

解得 $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{4}{3}$, $D = -\frac{5}{3}$, 故

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^2-x-1}{x^3+1} dx = \int \frac{2}{3(x+1)} dx + \int \frac{4x-5}{3(x^2-x+1)} dx \\ &= \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \int \frac{2(2x-1)-3}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{2}{3} \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} - \int \frac{dx}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \ln |x+1| + \frac{2}{3} \ln |x^2-x+1| - \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} d\left(x-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3} \ln |x+1| + \frac{2}{3} \ln(x^2-x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

五、三角函数有理式的不定积分

形如

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

的三角函数有理式的不定积分,一般用万能代换进行计算. 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

故

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt.$$

说明 对于被积函数含有三角函数的积分,可根据具体情况,利用恒等变形,选取适当的换元法,万能代换是一般解法.

例如:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}} dx = \int \frac{d(2+\sin x)}{\sqrt{2+\sin x}} = 2\sqrt{2+\sin x} + C.$$

又如:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\cos x) \\
&= \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.
\end{aligned}$$

典型例题分析

题型一 利用换元法计算不定积分

例 1 计算下列不定积分:

- (1) $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$; (2) $\int \frac{dx}{1+e^x}$; (3) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;
 (4) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$; (5) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$; (6) $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin 2x} dx$.

- 解** (1) $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \ln |1+2\ln x| + C.$
 (2) $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = \int dx - \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C.$
 (3) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x d(\tan x) = \int (\tan^2 x + 1) d(\tan x)$
 $= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C.$
 (4) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx = \int \frac{1}{1+(\sin^2 x)^2} d(\sin^2 x) = \arctan(\sin^2 x) + C.$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx &= \int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)} dx = \int \frac{1}{xe^x(1+xe^x)} d(xe^x) \\
 &\stackrel{u=xe^x}{=} \int \frac{1}{u(1+u)} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\
 &= \ln|u| - \ln|u+1| + C \\
 &= \ln \left| \frac{u}{u+1} \right| + C = \ln \left| \frac{xe^x}{1+xe^x} \right| + C. \\
 (6) \quad \int \frac{\ln(\tan x)}{\sin 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cdot \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\ln(\tan x)}{\tan x} d(\tan x) \stackrel{u=\tan x}{=} \frac{1}{2} \int \frac{\ln u}{u} du \\
 &= \frac{1}{2} \int \ln u d(\ln u) = \frac{1}{4} \ln^2 u + C \\
 &= \frac{1}{4} [\ln(\tan x)]^2 + C.
 \end{aligned}$$

例 2 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; \quad (2) \quad \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx; \quad (3) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{4-x^2}}; \\
 (4) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}; \quad (5) \quad \int \frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}} dx.
 \end{aligned}$$

解 (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \stackrel{\sqrt[6]{x}=t}{=} \int \frac{6t^5 dt}{x=t^6} \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt$

$$\begin{aligned}
 &= 6 \int \frac{t^3+1-1}{t+1} dt = 6 \int \left(t^2-t+1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
 &= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t| \right) + C \\
 &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C.
 \end{aligned}$$

(2) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx \stackrel{\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t}{=} \int \frac{1}{x=\frac{1}{t^2-1}} (t^2-1) \cdot t \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt \\
 &= -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\
 &= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 2\ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1 \right) + \ln|x| + C.
 \end{aligned}$$

(3) 令 $x = 2\sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $t = \arcsin \frac{x}{2}$, $dx = 2\cos t dt$, 故

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x \sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2\cos t dt}{2\sin t \cdot 2\cos t} = \frac{1}{2} \int \csc t dt \\
 &= \frac{1}{2} \ln |\csc t - \cot t| + C.
 \end{aligned}$$

又因为

$$\csc t = \frac{1}{\sin t} = \frac{2}{x}, \quad \cot t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x},$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} [-\ln |x| + \ln(2-\sqrt{4-x^2})] + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} &\stackrel{\substack{\sqrt{e^x-1}=t \\ x=\ln(1+t^2)}}{=} \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= 2\arctan t + C = 2\arctan \sqrt{e^x-1} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \quad \int \frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x+4-12}{\sqrt{2x^2+4x+5}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2+4x+5)}{\sqrt{2x^2+4x+5}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{d[\sqrt{2}(x+1)]}{\sqrt{[\sqrt{2}(x+1)]^2+3}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+4x+5} - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{2}(x+1) + \sqrt{2x^2+4x+5}| + C \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+4x+5} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \ln [\sqrt{2}(x+1) + \sqrt{2x^2+4x+5}] + C.\end{aligned}$$

题型二 分部积分法

例 3 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned}(1) \quad &\int (x+1)e^{3x} dx; & (2) \quad &\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx; \\ (3) \quad &\int \sin(\ln x) dx; & (4) \quad &\int (\arcsin x)^2 dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \quad \int (x+1)e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int (x+1)d(e^{3x}) = \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx &= -\int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2}{x} \ln x + 2 \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \int \sin(\ln x) dx &= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int x \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx,\end{aligned}$$

移项整理,得

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} x [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int (\arcsin x)^2 dx &= x (\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x (\arcsin x)^2 + 2 \int \arcsin x d(\sqrt{1-x^2}) \\
 &= x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2 \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.
 \end{aligned}$$

题型三 积分法的综合应用

例 4 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx; & (2) \quad &\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx; \\
 (3) \quad &\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx; & (4) \quad &\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx; \\
 (5) \quad &\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx; & (6) \quad &\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x} dx.
 \end{aligned}$$

解 (1) 设

$$\begin{aligned}
 \frac{2x+3}{x^2+3x-10} &= \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} \\
 &= \frac{(A+B)x+5B-2A}{(x+5)(x-2)},
 \end{aligned}$$

则由

$$2x+3 = (A+B)x + 5B - 2A,$$

得 $A+B=2$, $5B-2A=3$, 解得 $A=1$, $B=1$, 故

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx &= \int \frac{1}{x+5} dx + \int \frac{1}{x-2} dx \\
 &= \ln |x+5| + \ln |x-2| + C.
 \end{aligned}$$

注 本题用凑微分法更简便.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx &= \int e^{2x} (\tan^2 x + 2 \tan x + 1) dx \\
 &= \int e^{2x} (\sec^2 x + 2 \tan x) dx \\
 &= \int e^{2x} d(\tan x) + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\
 &= e^{2x} \tan x - \int 2e^{2x} \tan x dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\
 &= e^{2x} \tan x + C.
 \end{aligned}$$

注 本题通过分部积分法“消项”, 这类可“消项”的不定积分的被积表达式一般能“凑微分”. 事实上,

$$\int (e^{2x} \sec^2 x + e^{2x} \cdot 2 \tan x) dx = \int d(e^{2x} \tan x) = e^{2x} \tan x + C.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} d\left(x-\frac{1}{x}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

(4) 先拆项,再分部积分.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx &= \int \frac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{e^x}{x+1} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx \\
 &= \int \frac{e^x}{x+1} dx + \int e^x d\left(\frac{1}{x+1}\right) \\
 &= \int \frac{e^x}{x+1} dx + \frac{e^x}{x+1} - \int \frac{e^x}{x+1} dx = \frac{e^x}{x+1} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{x}{1 + \cos x} dx + \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx \\
 &= \int \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx - \int \frac{1}{1 + \cos x} d(1 + \cos x) \\
 &= \int x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) - \ln(1 + \cos x) \\
 &= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} dx - \ln\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) \\
 &= x \tan \frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos \frac{x}{2}\right| - \ln\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) + C_1 \\
 &= x \tan \frac{x}{2} + C \quad (C = C_1 - \ln 2).
 \end{aligned}$$

(6) 应用万能代换,令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

故

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2(1-t)}{t(1+t)(1+t^2)} dt \\
 &= 2 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 2\ln\left|\frac{t}{1+t}\right| - 2\arctan t + C \\
 &= 2\ln\left|\frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}}\right| - x + C.
 \end{aligned}$$

例 5 计算 $I = \int \frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2} dx$.**解** 设

$$\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2},$$

解得 $A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{4}, D = -\frac{1}{4}, E = \frac{3}{4}$, 故

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{3}{4(x+1)} + C
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{3x}{2(x^2-1)} + C.$$

例 6 计算 $I = \int \frac{x^4}{x^3+1} dx$.

解 由于

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^4}{x^3+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^3+1} \right) dx \\ &= \int \left[x + \frac{(x^2-x+1)-(x+1)^2}{3(x+1)(x^2-x+1)} \right] dx \\ &= \int \left[x + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x+1}{3(x^2-x+1)} \right] dx, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{3(x^2-x+1)} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{2}}{3(x^2-x+1)} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^4}{x^3+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

例 7 设 $f(x)$ 是严格单调的可导函数, $f^{-1}(x)$ 是其反函数, 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

求 $I = \int f^{-1}(x) dx$.

解 因为 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 互为反函数, 所以 $x = f[f^{-1}(x)]$, 从而有

$$\begin{aligned} \int f^{-1}(x) dx &= x f^{-1}(x) - \int x d[f^{-1}(x)] \\ &= x f^{-1}(x) - \int f[f^{-1}(x)] d[f^{-1}(x)] \\ &= x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C. \end{aligned}$$

例 8 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)F(x) = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}$, 已知 $F(0) = 1$, $F(x) > 0$,

求 $f(x)$.

解 由已知, $f(x)F(x) = F'(x)F(x) = \frac{1}{2}[F^2(x)]'$, 故

$$\begin{aligned} F^2(x) &= \int 2f(x)F(x) dx = \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = -\int x e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= -\frac{x e^x}{1+x} + \int \frac{(1+x)e^x}{1+x} dx \\ &= -\frac{x e^x}{1+x} + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C. \end{aligned}$$

由 $F(0) = 1$, 得 $C = 0$, 又由 $F(x) > 0$, 知 $F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$, 故

$$f(x) = F'(x) = \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

例 9 设 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x) = \frac{\sin x}{x}$, 求 $I = \int x^3 f'(x) dx$.

解 由已知, 有 $F'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = f(x)$, 故由分部积分法, 得

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 f'(x) dx = \int x^3 d[f(x)] \\ &= x^3 f(x) - 3 \int x^2 f(x) dx \\ &= x^3 f(x) - 3 \int x^2 d[F(x)] \\ &= x^3 f(x) - 3x^2 F(x) + 6 \int x F(x) dx \\ &= x^3 \left(\frac{\sin x}{x}\right)' - 3x^2 \cdot \frac{\sin x}{x} + 6 \int x \cdot \frac{\sin x}{x} dx \\ &= x^2 \cos x - 4x \sin x - 6 \cos x + C. \end{aligned}$$

例 10 已知 $\int f'(x^3) dx = x^3 + C$, 求 $f(x)$.

解 由原函数与被积函数的关系, 得

$$f'(x^3) = (x^3 + C)' = 3x^2,$$

令 $x^3 = t$, 则 $x = t^{\frac{1}{3}}$, $f'(t) = 3t^{\frac{2}{3}}$, 故

$$f(t) = \int 3t^{\frac{2}{3}} dt = \frac{9}{5} t^{\frac{5}{3}} + C,$$

即 $f(x) = \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$.

例 11 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$ 求 $f(\ln x)$.

解 从简化 $f'(\ln x)$ 入手. 令 $t = \ln x$, 则 $x = e^t$, $t \in (-\infty, +\infty)$, 故

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ e^t, & t > 0. \end{cases}$$

求不定积分, 得

$$f(t) = \begin{cases} t + C_1, & t \leq 0, \\ e^t + C_2, & t > 0. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的连续性, 可知 $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$, 即 $C_1 = 1 + C_2$. 令 $C_2 = C$, 则

$$f(t) = \begin{cases} t + 1 + C, & t \leq 0, \\ e^t + C, & t > 0, \end{cases}$$

故

$$f(\ln x) = \begin{cases} \ln x + 1 + C, & 0 < x \leq 1, \\ x + C, & x > 1. \end{cases}$$

习题演练

解答题

(1) 求下列不定积分:

(I) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}};$

(II) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx;$

(III) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+2)}};$

(IV) $\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx;$

(V) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x} \cos x};$

(VI) $\int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} + 1} dx.$

(2) 求下列不定积分:

(I) $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx;$

(II) $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx;$

(III) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx;$

(IV) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx;$

(V) $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx;$

(VI) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

(3) 求下列不定积分:

(I) $\int \frac{\sin x}{\sin x + 1} dx;$

(II) $\int \frac{dx}{1+2\tan x}.$

(4) 设 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$ (C 为任意常数), 计算 $I = \int \frac{1}{f(x)} dx.$

(5) 设 $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $I = \int \varphi(x) dx.$

(6) 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $I = \int f(x) dx.$

(7) 求下列不定积分:

(I) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx;$

(II) $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx;$

(III) $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx;$

(IV) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx;$

(V) $\int \arctan \sqrt{x} dx;$

(VI) $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx.$

(8) 求 $I = \int e^{-|x|} dx.$

(9) 计算 $I = \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx.$

习题演练解答

解答题

(1) 解 (I)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \\ &= \arcsin \frac{x-2}{2} + C, \end{aligned}$$

或

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C.$$

$$(II) \quad \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{x+\frac{1}{x}} dx = \int e^{x+\frac{1}{x}} d\left(x + \frac{1}{x}\right) = e^{x+\frac{1}{x}} + C.$$

$$(III) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+2)}} = 2 \int \frac{dx}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}} \\ = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2})^2}} = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+2}) + C.$$

$$(IV) \quad \int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{x^3 d(x^3)}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3+1-1)}{\sqrt[3]{1+x^3}} d(1+x^3) \\ \stackrel{1+x^3=t}{=} \frac{1}{3} \int \left(t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}}\right) + C \\ = \frac{1}{5} (1+x^3)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} (1+x^3)^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$(V) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x} \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x} \cos^2 x} \stackrel{\sin x=t}{=} \int \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{t}} \\ \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} 2 \int \frac{du}{1-u^4} = \int \left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{1-u^2}\right) du \\ = \arctan u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C \\ = \arctan \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + C.$$

$$(VI) \quad \int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} + 1} dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx = \int \frac{d(e^x - e^{-x})}{e^{2x} + e^{-2x}} \\ = \int \frac{d(e^x - e^{-x})}{(\sqrt{2})^2 + (e^x - e^{-x})^2} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{2}} + C.$$

$$(2) \text{ 解 } (I) \quad \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)2\sqrt{x}} dx \\ = 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+x} d(\sqrt{x}) = 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) \\ = 2 \int \arctan \sqrt{x} d(\arctan \sqrt{x}) = (\arctan \sqrt{x})^2 + C.$$

$$(II) \quad \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx \stackrel{x=2\sin t}{=} \int 4\sin^2 t \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t dt = 4 \int \sin^2 2t dt \\ = 2 \int (1 - \cos 4t) dt = 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + C \\ = 2t - 2(\sin t)(\cos t)(1 - 2\sin^2 t) + C \\ = 2\arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + C.$$

$$(III) \quad \int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} - \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln(x^2 + 2x + 5) - \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} \\
 &= \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{4} \int \frac{2d\left(\frac{x+1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} \\
 &= \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(IV)} \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx &\stackrel{x=2\tan t}{=} \int \frac{8\tan^3 t}{2\sec t} \cdot 2\sec^2 t dt = 8 \int \tan^3 t \cdot \sec t dt \\
 &= 8 \int (\sec^2 t - 1) d(\sec t) = 8 \left(\frac{1}{3} \sec^3 t - \sec t \right) + C,
 \end{aligned}$$

将 $\sec t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx &= 8 \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}{8} - \frac{1}{2} \sqrt{4+x^2} \right] + C \\
 &= \frac{1}{3} (4+x^2)^{\frac{3}{2}} - 4 \sqrt{4+x^2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(V)} \quad \text{令 } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t, \text{ 则 } x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt, \text{ 故} \\
 \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= -\int \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} dt = -2 \int \frac{t d(t^2)}{(1-t^2)^2} \\
 &= -2 \int t d\left(\frac{1}{1-t^2}\right) = -\frac{2t}{1-t^2} + 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt \\
 &= -\frac{2t}{1-t^2} + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\
 &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + C.
 \end{aligned}$$

注 也可利用倒代换, 令 $\frac{1}{x} = u$ 进行计算.

$$\begin{aligned}
 \text{(VI)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &\stackrel{x=t^6}{=} \int \frac{6t^5}{t^3+t^2} dt = 6 \int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt \\
 &= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
 &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t+1| + C \\
 &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(3) 解} \quad \text{(I)} \quad \int \frac{\sin x}{\sin x + 1} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1 + \sin x} \right) dx \\
 &= x - \int \frac{dx}{1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \\
 &= x - \int \sec^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= x - \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C.
 \end{aligned}$$

注 三角有理函数的积分为 $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

利用万能代换, 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

故

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt.$$

一般很少利用万能代换, 尽量利用三角公式恒等变形.

(II) 令 $\tan x = t$, 则

$$\int \frac{dx}{1+2\tan x} = \int \frac{dt}{(2t+1)(1+t^2)}.$$

令

$$\frac{1}{(2t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{2t+1} + \frac{Bt+D}{1+t^2},$$

可得 $A = \frac{4}{5}, B = -\frac{2}{5}, D = \frac{1}{5}$, 故

$$\int \frac{dx}{1+2\tan x} = \frac{2}{5} \ln |1+2\tan x| - \frac{2}{5} \ln |\sec x| + \frac{x}{5} + C.$$

(4) **解** $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$ 两边同时求导, 得

$$x f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即 $\frac{1}{f(x)} = x \sqrt{1-x^2}$, 故

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(5) **解** 令 $x^2 - 1 = t$, 得 $f(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}$. 由 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 得

$$\ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$$

即有 $\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x$, 从而 $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$, 故

$$\int \varphi(x) dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \frac{x-1+2}{x-1} dx = x + 2 \ln |x-1| + C.$$

(6) **解** 令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t, f(\ln x) = f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$, 故

$$\begin{aligned} I &= \int f(x) dx = \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = -\int \ln(1+e^x) d(e^{-x}) \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx \\ &= x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

(7) **解** (I) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = \int x^2 e^x d\left(\frac{-1}{x+2}\right)$

$$= x^2 e^x \cdot \left(\frac{-1}{x+2}\right) - \int \left(-\frac{1}{x+2}\right) d(x^2 e^x)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int \frac{x^2 e^x + 2x e^x}{x+2} dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int x e^x dx \\
 &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + x e^x - \int e^x dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + x e^x - e^x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad \int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx &= -\int \ln x d\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{-\ln x}{x-1} + \int \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{-\ln x}{x-1} + \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx \\
 &= \frac{-\ln x}{x-1} + \ln|x-1| - \ln x + C.
 \end{aligned}$$

$$\text{(III)} \text{ 令 } \sqrt{1+e^x} = t, \text{ 则 } x = \ln(t^2-1), dx = \frac{2t}{t^2-1} dt, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx &= 2 \int \ln(t^2-1) dt = 2 \left[t \ln(t^2-1) - \int \frac{2t^2}{t^2-1} dt \right] \\
 &= 2 \left[t \ln(t^2-1) - 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt \right] \\
 &= 2t \ln(t^2-1) - 4 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C \\
 &= 2x \sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2 \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.
 \end{aligned}$$

$$\text{(IV)} \text{ 令 } \arctan x = t, \text{ 则 } x = \tan t, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{t}{\tan^2 t \cdot \sec^2 t} \cdot \sec^2 t dt = \int t \cdot \cot^2 t dt \\
 &= \int t (\csc^2 t - 1) dt = -\int t d(\cot t) - \frac{1}{2} t^2 \\
 &= -t \cot t + \int \cot t dt - \frac{1}{2} t^2 \\
 &= -t \cot t + \ln |\sin t| - \frac{1}{2} t^2 + C \\
 &= -\frac{1}{x} \arctan x + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} \arctan^2 x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(V)} \quad \int \arctan \sqrt{x} dx &= x \arctan \sqrt{x} - \int x \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\
 &= x \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } x = t^2, \text{ 则 } dx = 2t dt, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt \\
 &= 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2 \arctan t + C \\
 &= 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C,
 \end{aligned}$$

$$\text{从而原式} = x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C.$$

$$\text{(VI)} \text{ 令 } \sqrt{e^x-1} = t, \text{ 则}$$

$$e^x = 1+t^2, \quad x = \ln(1+t^2), \quad dx = \frac{2t}{1+t^2} dt,$$

故

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx \\
 &= \int (1+t^2)^2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \arctan t dt \\
 &= \int (1+t^2) \arctan t d(1+t^2) \\
 &= \frac{1}{2} \int \arctan t d[(1+t^2)^2] \\
 &= \frac{1}{2} (1+t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{(1+t^2)^2}{1+t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} (1+t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \int (1+t^2) dt \\
 &= \frac{1}{2} (1+t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right) + C \\
 &= \frac{1}{2} \left[e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} \right] + C.
 \end{aligned}$$

$$(8) \text{ 解 } I = \int e^{-|x|} dx = \begin{cases} \int e^{-x} dx, & x \geq 0, \\ \int e^x dx, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -e^{-x} + C_1, & x \geq 0, \\ e^x + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

由原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^{-x} + C_1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + C_2),$$

即 $-1 + C_1 = 1 + C_2$, 令 $C_2 = C$, 则 $C_1 = 2 + C$, 故

$$I = \begin{cases} -e^{-x} + 2 + C, & x \geq 0, \\ e^x + C, & x < 0, \end{cases}$$

其中 C 为任意常数.

(9) 解 求形如 $\int \frac{P(x)}{(x-a)^n} dx$ [其中 $P(x)$ 是多项式]的积分时, 可对 $P(x)$ 在 $x=a$ 处用泰勒公式展开.

由于 $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$, 故

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx = \int \frac{dx}{(x-1)^{100}} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^{99}} + \int \frac{dx}{(x-1)^{98}} \\
 &= -\frac{1}{99} (x-1)^{-99} - \frac{1}{49} (x-1)^{-98} - \frac{1}{97} (x-1)^{-97} + C.
 \end{aligned}$$

第六章 定积分及其应用

考试要求

1. 理解定积分的概念, 掌握定积分的性质及定积分中值定理.
2. 掌握牛顿-莱布尼茨公式.
3. 掌握定积分的换元积分法与分部积分法.
4. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理式的定积分.
5. 会求积分变限函数的导数.
6. 理解反常积分的概念, 了解反常积分收敛的比较判别法, 会计算反常积分.
7. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量.
8. 会求平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值.
9. (仅数学一、数学二要求) 会求平面曲线的弧长、旋转体的侧面积、平行截面面积为已知的立体体积.
10. (仅数学一、数学二要求) 会求功、引力、压力、质心坐标、形心等.

第一节 定积分的计算

内容与方法提要

一、定积分的概念与性质

1. 定积分的定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \text{其中 } d = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}.$$

说明 ① 当 $f(x) \geq 0$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 表示曲边梯形的面积.

② $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在, 要求与区间的分法无关, 与 ξ_i 的取法无关.

③ 若 $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在, 采用特殊的分法, 将 $[a, b]$ 分成 n 等份, 得 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, 并采用特殊的取

法, 取 $\xi_i = a + \frac{b-a}{n}i$ (取第 i 个区间的右端点), 则

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

此式常用于求数列极限.

2. 函数可积的充分条件(可积函数类)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有有限个第一类间断点, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

(4) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调有界, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

3. 函数可积的必要条件

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

4. 变上限积分的性质

设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b]$, 则

- (1) 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.
- (2) 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续时, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导.
- (3) 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 k 阶可导时, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $k+1$ 阶可导.

证 由原函数存在定理, 知性质(2)(3)显然成立, 下面证明性质(1).

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 必有界. 设 $|f(x)| \leq M (M > 0)$, 于是

$$\begin{aligned} 0 \leq |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \right| \leq M \cdot |\Delta x|, \end{aligned}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 由夹逼准则, 有 $F(x + \Delta x) - F(x) \rightarrow 0$, 故 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上连续.

注 设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt, f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $x_0 \in (a, b)$ 外连续.

- (1) 若 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点, 则 $F(x)$ 在 x_0 处可导, 且

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

- (2) 若 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 则 $F(x)$ 在 x_0 处连续, 但不可导, 且

$$F'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), F'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

证 可去间断点与跳跃间断点都是第一类间断点, 故 $f(x)$ 可积, 从而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上每一点均连续.

由已知, $f(x)$ 在 $[a, x_0)$ 与 $(x_0, b]$ 上均连续, 故 $F(x)$ 在 $[a, x_0)$ 与 $(x_0, b]$ 上均可导.

又

$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \left(\frac{0}{0} \right) \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow x_0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x). \\ F'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \left(\frac{0}{0} \right) \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow x_0^-} F'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x). \end{aligned}$$

当 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点时, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

故 $F'_+(x_0) = F'_-(x_0)$, 即 $F(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

当 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点时, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

故 $F'_+(x_0) \neq F'_-(x_0)$, 即 $F(x)$ 在 x_0 处不可导.

5. 定积分的性质

$$(1) \int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx \pm k_2 \int_a^b g(x) dx.$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$(3) \text{ 设 } f(x) \leq g(x), x \in [a, b], \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$(4) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(5) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(6) 积分中值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b).$$

6. 牛顿-莱布尼茨公式

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且存在原函数 $F(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

说明 ① 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则根据原函数存在定理, $f(x)$ 一定存在原函数 $F(x)$, 可以直接应用牛顿-莱布尼茨公式.

② 若 $f(x)$ 分段连续 (如 $f(x)$ 只有有限个第一类间断点), 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 但 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不存在原函数 $F(x)$, 故不能直接用牛顿-莱布尼茨公式, 此时, 可以在每个区间上用牛顿-莱布尼茨公式. 若 $f(x)$ 有无穷个间断点, 则不能应用牛顿-莱布尼茨公式.

③ 不是所有的可积函数都存在原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

显然, $x = 0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可积. 但是 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上没有原函数, 下面用反证法证明.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的一个原函数, 则

$$F'(x) = f(x) = 0 \quad (-1 \leq x < 0),$$

故 $F(x) = C_1 (-1 \leq x < 0)$. 同理, $F(x) = C_2 (0 < x \leq 1)$. 由于 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可导, 所以 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 故 $C_1 = C_2 = C$, 即 $F(x) \equiv C, x \in [-1, 1]$, 则 $F'(0) = f(0) = 0$, 与 $f(0) = 1$ 矛盾.

二、定积分的换元法

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{x = \varphi(t)}{=} \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

其中 $x = \varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上有连续导数, 且 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, a \leq \varphi(t) \leq b$.

三、定积分的分部积分法

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

四、对称区间上的定积分

(1) 设 $f(x)$ 连续, 则

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx \\ &= \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx. \end{aligned}$$

$$(2) \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数,} \\ 0, & f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

说明 定积分的换元法对积分限处理的常用结论:

$$\textcircled{1} \int_a^b f(x) dx \stackrel{x = a+b-t}{=} \int_a^b f(a+b-t) dt.$$

$$\textcircled{2} \int_0^a f(x) dx \stackrel{\substack{xb=ta \\ x=\frac{a}{b}t}}{=} \int_0^b f\left(\frac{a}{b}t\right) \cdot \frac{a}{b} dt.$$

$$\textcircled{3} \int_a^{a+T} f(x) dx \stackrel{x=t+a}{=} \int_0^T f(t+a) dt.$$

$$\textcircled{4} \int_a^b f(x) dx \stackrel{\Delta}{=} \int_c^d f\left[\frac{t-c}{d-c}(b-a)+a\right] \frac{b-a}{d-c} dt, \text{ 其中变换 } \Delta \text{ 为}$$

$$t = \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c, \quad x = \frac{t-c}{d-c}(b-a) + a.$$

例如 证明:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

证 利用结论①, 得

$$\int_{-a}^a f(x) dx \stackrel{x=a-a-t}{=} \int_{-a}^a f(-t) dt = \int_{-a}^a f(-x) dx,$$

故

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

五、常用的定积分计算公式

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的正奇数.} \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上连续, 则

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx;$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, & n \text{ 为正偶数,} \\ 0, & n \text{ 为正奇数.} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx;$$

$$\textcircled{4} \int_0^{\pi} f(|\cos x|) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$\textcircled{5} \int_0^{2\pi} f(|\sin x|) dx = \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

说明 结论⑤的证明:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(|\sin x|) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\sin x|) dx + \\ &\quad \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(|\sin x|) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(|\sin x|) dx. \end{aligned}$$

将第二、第三、第四个积分化为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ 即可.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\sin x|) dx &\stackrel{x=t+\frac{\pi}{2}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right|\right] dt, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt, \\ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(|\sin x|) dx &\stackrel{x=t+\pi}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f[|\sin(t+\pi)|] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt, \\ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(|\sin x|) dx &\stackrel{x=t+\frac{3\pi}{2}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\left|\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)\right|\right] dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt,$$

所以

$$\int_0^{2\pi} f(|\sin x|) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

同理可证其他结论.

典型例题分析

题型一 定积分的性质

例 1 证明: 不等式 $\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

证 由

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - \tan x) \cos x}{x^2} < 0 \quad \left[x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

知 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少, 故 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x) < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 所以

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} dx,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

题型二 定积分的换元法

例 2 计算下列定积分:

$$(1) \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$(2) \int_0^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sqrt{2x-x^2} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(4) \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$$

解 (1) 令 $x = \sec t$ ($\frac{\pi}{2} < t < \pi$), 则 $dx = \sec t \cdot \tan t dt$.

当 $x = -2$ 时, $t = \frac{2\pi}{3}$; 当 $x = -\sqrt{2}$ 时, $t = \frac{3\pi}{4}$, 故

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sec t \cdot \tan t}{-\tan t} dt = -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \sec t dt \\ &= -\left(\ln |\sec t + \tan t|\right) \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} = \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

注 换元 $x = \sec t$, $x \in [-2, -\sqrt{2}]$ 后, 应取函数的单调区间 $t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

(2) 先配方, $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$, 再用换元法. 令 $x-1 = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$, 故

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sqrt{2x-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1+\sin t}{2}\right) \cos^2 t dt \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt \end{aligned}$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt + 0 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

(3) 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$. 故

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cdot t}{\cos t} \cdot \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t (1 - \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\sin 2t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{t \sin 2t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \right) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(4) 令 $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$, 则 $\sqrt{\frac{x}{1+x}} = \sin t$, 得 $x = \tan^2 t$.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} t d(\tan^2 t) = t \tan^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t dt \\ &= \pi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t - 1) dt = \pi - (\tan t - t) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

例 3 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$, 并求其值.

证 利用换元法. 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi - 1}{4}. \end{aligned}$$

例 4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x, x \in (0, \pi)$, 求 $I = \int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$.

分析 利用条件 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$ 及定积分的换元法, 将 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$ 化成 $\int_0^{\pi} f(x) dx$.

解

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{3\pi} [f(x - \pi) + \sin x] dx \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} f(x - \pi) dx + \int_{\pi}^{3\pi} \sin x dx \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} f(x - \pi) dx + (-\cos x) \Big|_{\pi}^{3\pi} \\ &\stackrel{u=x-\pi}{=} \int_0^{2\pi} f(u) du \\ &= \int_0^{\pi} f(u) du + \int_{\pi}^{2\pi} f(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} u \, du + \int_{\pi}^{2\pi} [f(u-\pi) + \sin u] \, du \\
&= \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \sin u \, du + \int_{\pi}^{2\pi} f(u-\pi) \, du \\
&= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_{\pi}^{2\pi} f(u-\pi) \, du \\
&\stackrel{u-\pi=t}{=} \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_0^{\pi} f(t) \, dt = \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_0^{\pi} t \, dt = \pi^2 - 2.
\end{aligned}$$

注 也可利用关系 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$ 求出 $f(x)$ 的表达式, 再计算 I .

题型三 定积分的分部积分法

例 5 设过原点的曲线 $y = f(x)$ 在其上一点 $(2, 4)$ 处的切线方程为 $y = 5x - 6$, 且 $f''(x)$ 连续, 计算 $I = \int_0^2 x f''(x) \, dx$.

解 由已知, 有 $f(0) = 0, f(2) = 4, f'(2) = 5$, 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 x f''(x) \, dx = \int_0^2 x \, d[f'(x)] \\
&= x f'(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x) \, dx \\
&= x f'(x) \Big|_0^2 - f(x) \Big|_0^2 \\
&= 2f'(2) - [f(2) - f(0)] = 6.
\end{aligned}$$

例 6 设 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$, 且 $f(0) = 0$, 求 $I = \int_0^1 f(x) \, dx$.

解 用分部积分法, 有

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x) \, dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(x) \, dx \\
&= f(1) - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 \, dx.
\end{aligned}$$

①

而

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(x) \, dx = \int_0^1 \arcsin(x-1)^2 \, dx,$$

代入式 ①, 得

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \arcsin(x-1)^2 \, dx - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 \, dx \\
&= \int_0^1 (1-x) \arcsin(x-1)^2 \, dx \\
&\stackrel{x-1=t}{=} - \int_{-1}^0 t \arcsin t^2 \, dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \arcsin t^2 \, d(t^2) \\
&= -\frac{1}{2} \left[t^2 \arcsin t^2 \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{2t^3}{\sqrt{1-t^4}} \, dt \right] \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_{-1}^0 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^4}} \, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{d(1-t^4)}{\sqrt{1-t^4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{1-t^4} \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

注 也可直接对 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$ 进行积分求出 $f(x)$, 计算较烦琐.

例 7 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $I = \int_0^\pi f(x) dx$.

分析 $f(x)$ 不易求出, 但其导数容易计算, 故可用分部积分法.

解
$$I = \int_0^\pi f(x) dx = x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx.$$

而 $f'(x) = \frac{\sin x}{\pi - x}$, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi f(x) dx = \pi f(\pi) - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\pi - x} dx \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi - x} dx - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\pi - x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin x}{\pi - x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2. \end{aligned}$$

注 本题也可以用二重积分进行计算(见图 6-1):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt \\ &\stackrel{\text{交换}}{\stackrel{\text{积分顺序}}{=}} \int_0^\pi dt \int_t^\pi \frac{\sin t}{\pi - t} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t} \cdot (\pi - t) dt \\ &= \int_0^\pi \sin t dt = 2. \end{aligned}$$

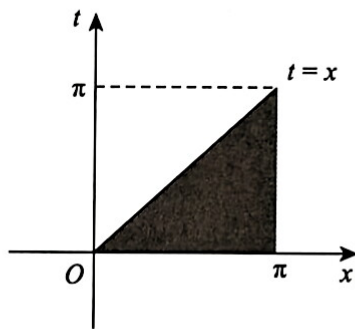


图 6-1

题型四 积分法的综合应用

例 8 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$, 求 $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.

解 用分部积分法, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 f(x) d(2\sqrt{x}) \\ &= 2 \left[\sqrt{x} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \right]. \end{aligned}$$

由于 $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, $f(1) = 0$, 故

$$\begin{aligned} I &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} dx = -2 \int_0^1 \ln(x+1) d(2\sqrt{x}) \\ &= -4 \sqrt{x} \ln(x+1) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = -4 \ln 2 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx. \end{aligned}$$

令 $\sqrt{x} = u$, 则

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = 2 \int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1} du = 2(u - \arctan u) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2},$$

故 $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 8 - 2\pi - 4 \ln 2$.

注 ① 对于这类利用积分变限函数 $f(x) = \int_a^x g(t) dt$ 求 $\int_a^b f(x) dx$ 的题, 通常用分部积分法来计算.

② 本题也可用二重积分进行计算.

例 9 设 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = A$, 计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx$.

解

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx &= -\int_0^{\pi} \cos x d\left(\frac{1}{x+2}\right) \\ &= \left. \frac{-\cos x}{x+2} \right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{-\sin x}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+2} dx = A. \end{aligned} \quad ①$$

又

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+2} dx &\stackrel{x=2t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2t+2} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{t+1} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx. \end{aligned} \quad ②$$

将式 ② 代入式 ①, 得

$$\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx = A,$$

解得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2} - A \right).$$

例 10 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$, $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

证

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt = b_n - b_{n+2}, \\ b_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t d(\cos t) \\ &= -\left[\cos t \cdot \sin^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot (n+1) \sin^n t \cdot \cos t dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cdot (1 - \sin^2 t) dt = (n+1)b_n - (n+1)b_{n+2}, \end{aligned}$$

移项得 $b_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} b_n$, 于是

$$a_n = b_n - b_{n+2} = b_n - \frac{n+1}{n+2} b_n = \frac{b_n}{n+2},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

题型五 对称区间上的定积分

例 11 计算 $I = \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$.

分析 利用对称区间上函数的奇偶性.

解 原式 $= \int_{-1}^1 \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + 0 \\
 &= 4 \int_0^1 \frac{x^2(1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} dx \\
 &= 4 \int_0^1 dx - 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= 4 - 4 \times \frac{1}{4} \pi \times 1^2 = 4 - \pi.
 \end{aligned}$$

注 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi \cdot a^2$, 表示圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 面积的 $\frac{1}{4}$ (见图 6-2).

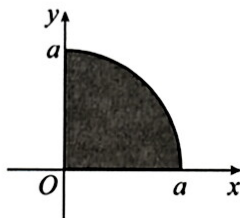


图 6-2

例 12 计算 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx$.

解 考虑到被积函数的表达式构造, 利用结论 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$ 来计算.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} + \frac{\cos^2 x}{1 + e^x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} + \frac{1}{1 + e^x} \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \left(\frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{1}{1 + e^x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

例 13 设 $f(x)$ 为连续的奇函数, $F(x) = \int_0^x f(t) \cos t dt + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, 且 $F(1) = \pi$, 求 $F(-1)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad F(-1) &= \int_0^{-1} f(x) \cos x dx + \arctan x \Big|_0^{-1} \\
 &= -\frac{\pi}{4} + \int_0^{-1} f(x) \cos x dx = -\frac{\pi}{4} - \int_{-1}^0 f(x) \cos x dx, \\
 F(1) &= \frac{\pi}{4} + \int_0^1 f(x) \cos x dx.
 \end{aligned}$$

为了利用对称区间上奇函数的积分为 0, 两式相减, 得

$$F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{2} + \int_{-1}^1 f(x) \cos x dx = \frac{\pi}{2},$$

故

$$F(-1) = F(1) - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

例 14 设 $f(x), g(x)$ 在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x) + f(-x) = A$ (A 为常数).

(1) 证明: $\int_{-a}^a f(x) g(x) dx = A \int_0^a g(x) dx$;

(2) 利用(1)的结论计算 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{(1) 证} \quad \int_{-a}^a f(x) g(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) g(x) dx + \int_0^a f(x) g(x) dx, \\
 \int_{-a}^0 f(x) g(x) dx &\stackrel{x=-u}{=} \int_a^0 f(-u) g(-u) d(-u) \\
 &= \int_0^a f(-x) g(-x) dx \\
 &= \int_0^a f(-x) g(x) dx \quad [g(x) \text{ 为偶函数}].
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)g(x)dx &= \int_0^a f(-x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^a [f(-x) + f(x)]g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx.\end{aligned}$$

(2) **解** 取 $g(x) = |\sin x|$, $f(x) = \arctan e^x$, 则 $g(x)$ 为偶函数. 下证 $f(x) + f(-x) = A$. 考虑其导数, 有

$$\begin{aligned}[f(x) + f(-x)]' &= (\arctan e^x + \arctan e^{-x})' \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = 0,\end{aligned}$$

所以 $f(x) + f(-x) \equiv A$, 其中 A 为常数. 取 $x = 0$, 有 $2\arctan e^0 = \frac{\pi}{2} = A$, 故

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = -\frac{\pi}{2} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

题型六 分段函数、带绝对值符号的函数的定积分

例15 求 $I = \int_0^2 f(x-1)dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$

解 令 $u = x - 1$, 则当 $x = 0$ 时, $u = -1$; 当 $x = 2$ 时, $u = 1$.

$$\begin{aligned}I &= \int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 f(u)du \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^u} du + \int_0^1 \frac{1}{1+u} du \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1+e^u - e^u}{1+e^u} du + \ln(1+u) \Big|_0^1 \\ &= \int_{-1}^0 du - \int_{-1}^0 \frac{d(1+e^u)}{1+e^u} + \ln 2 \\ &= u \Big|_{-1}^0 - \ln(1+e^u) \Big|_{-1}^0 + \ln 2 = \ln(1+e).\end{aligned}$$

例16 设 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt$ ($x > 0$), 求 $f'(x)$ 的表达式和 $f(x)$ 的最小值.

解 当 $0 < x < 1$ 时,

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^1 |t^2 - x^2| dt = \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt \\ &= \frac{1}{3} - x^2 + \frac{4}{3}x^3;\end{aligned}$$

当 $x \geq 1$ 时,

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt = \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = x^2 - \frac{1}{3},$$

于是

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - x^2 + \frac{4}{3}x^3, & 0 < x < 1, \\ x^2 - \frac{1}{3}, & x \geq 1, \end{cases}$$

故

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4x^2, & 0 < x < 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$

在 $x = 1$ 处, 由于 $f(x)$ 连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 4x^2) = 2,$$

即 $f'_-(1) = 2$, 又

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2,$$

即 $f'_+(1) = 2$, 故 $f'(1) = 2$.

令 $f'(x) = 0$, 即

$$-2x + 4x^2 = 0 \quad (0 < x < 1),$$

得 $x = \frac{1}{2}$.

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

题型七 周期函数的定积分

设 $f(x+T) = f(x)$, 则

$$(1) \int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

说明 结论(1):

$$\int_0^{nT} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx + \int_T^{2T} f(x) dx + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x) dx,$$

而

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x) dx \xrightarrow{x=t+kT} \int_0^T f(t+kT) dt = \int_0^T f(t) dt \quad (k=1, 2, \cdots, n-1),$$

所以 $\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$.

结论(2):

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx,$$

而

$$\int_T^{a+T} f(x) dx \xrightarrow{x=t+T} \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t) dt,$$

所以 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$, 即周期函数在一个周期上的积分与起点和终点无关.

进一步, 令 $a = -\frac{T}{2}$, 则 $\int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$.

例17 求 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right| dx$, n 为正整数.

分析 先求 $\frac{d}{dx} \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right)$, 再去掉绝对值.

解

$$I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| -\sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\sin(\ln x^{-1})| \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\sin(-\ln x)| d(\ln x) \\
&= \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\sin(\ln x)| d(\ln x) \quad (\text{利用 } \sin x \text{ 是奇函数}) \\
&\stackrel{\ln x = u}{=} \int_{-2n\pi}^0 |\sin u| du \quad (|\sin u| \text{ 以 } \pi \text{ 为周期}) \\
&\stackrel{u = -t}{=} -\int_{2n\pi}^0 |\sin t| dt = \int_0^{2n\pi} |\sin t| dt \\
&= 2n \int_0^{\pi} \sin t dt = 2n(-\cos t) \Big|_0^{\pi} = 4n.
\end{aligned}$$

第二节 积分变限函数的求导问题

内容与方法提要

积分变限函数的求导可分为以下几种类型:

1. 公式型

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

2. 乘积型

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt \right]' \\
&= \left[x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt \right]' \\
&= 2x \cdot \int_0^x f(t) dt + x^2 \cdot f(x) - x^2 \cdot f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt.
\end{aligned}$$

3. 换元型

$$(1) \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt.$$

令

$$x^2 - t^2 = u, \quad t dt = -\frac{1}{2} d(x^2 - t^2),$$

则

$$\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du,$$

从而

$$\left[\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \right]' = \frac{1}{2} \cdot f(x^2) \cdot 2x = x f(x^2).$$

$$(2) \int_0^1 f(xt) dt.$$

令 $xt = u$, 则

$$\int_0^1 f(xt) dt = \int_0^x f(u) \cdot \frac{1}{x} du \quad (x \neq 0),$$

所以

$$\left[\int_0^1 f(xt) dt \right]' = \left[\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right]' = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du + \frac{1}{x} \cdot f(x).$$

典型例题分析

例 1 设 $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt$, $\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

分析 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型, 用洛必达法则求解.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}}{\cos x \cdot (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{5}{e}.$$

例 2 求 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间和极值.

解 定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt,$$

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt,$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$. 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

由表可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ 内单调减少, 在 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 内单调增加; $f(x)$ 的极小值为 $f(-1) = f(1) = 0$, $f(x)$ 的极大值为 $f(0) = \int_0^1 t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

说明 讨论用积分变限表示的函数的性态是常考内容.

例 3 设 $F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$, 其中 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$,

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4}$.

解
$$F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \xrightarrow{x^2 - t^2 = u} \int_{x^2}^0 f(u) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du}{x^4}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x^2) \cdot 2x}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \frac{1}{4} f'_+(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

注 下面的做法是错误的:

$$\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x^2) \cdot 2x}{2x} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}.$$

因为 $f'(x)$ 未必存在.

例 4 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

解法 1 对分子变形, 有

$$\int_0^x f(x-t)dt \xrightarrow{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du,$$

故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(u)du} \\ &\xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\ &\xrightarrow[\text{中值定理}]{\text{积分}} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (\xi \rightarrow 0)}} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \\ &= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

解法 2 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(u)du}$

$$\xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{x} \int_0^x f(u)du + f(x)},$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

$$\text{所以原式} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}.$$

例 5 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, 求 $F'(x)$, 并讨论 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 及 $f(x)$ 的连续性, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0, \quad F(0) = \int_0^1 f(0)dt = 0.$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$F(x) = \int_0^1 f(xt)dt \xrightarrow[t = \frac{1}{x}u]{xt=u} \int_0^x f(u) \cdot \frac{1}{x}du = \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du,$$

$$\text{故 } F'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时, 利用导数的定义求导, 有

$$\begin{aligned}
 F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}A.
 \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \right] \\
 &= A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A = F'(0),
 \end{aligned}$$

所以 $F'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = \int_0^x \frac{t}{t + \sqrt{a^2 - t^2}} dt$ ($a > 0$), 求 $f(a)$.

解 已知等式两边同时对 x 求导, 得

$$g[f(x)]f'(x) = \frac{x}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

又由于 $g[f(x)] = x$, 所以当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}, \\
 f(a) &= f(0) + \int_0^a f'(x) dx = \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &\stackrel{x = a \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt.
 \end{aligned}$$

又由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \stackrel{t = \frac{\pi}{2} - u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u + \cos u} du,$$

故

$$f(a) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x du \int_0^u [u^2 - 3\sin(u-t)^2] dt}{x^8}$.

分析 本题是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 用洛必达法则求解.

解 若记 $f(u) = \int_0^u [u^2 - 3\sin(u-t)^2] dt$, 则分子的导数为 $f(x)$, 故

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [x^2 - 3\sin(x-t)^2] dt}{8x^7} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3 \int_0^x \sin(x-t)^2 dt}{8x^7}.
 \end{aligned}$$

而

$$3 \int_0^x \sin(x-t)^2 dt \stackrel{x-t=s}{=} 3 \int_0^x \sin s^2 ds,$$

故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3 \int_0^x \sin s^2 ds}{8x^7} \stackrel{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 3 \sin x^2}{56x^6} \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 3(\cos x^2) \cdot 2x}{6 \cdot 56x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x^2)}{56x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^4}{56x^4} = \frac{1}{112}. \end{aligned}$$

例 8 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - e^{-t^2}} \int_0^t dx \int_x^t e^{-(x-y)^2} dy$.

分析 本题是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 分母 $1 - e^{-t^2} \sim t^2 (t \rightarrow 0)$.

解 若记 $f(x, t) = \int_x^t e^{-(x-y)^2} dy$, 则分子 $\int_0^t f(x, t) dx$ 不能对 t 直接求导, 考虑交换积分顺序 (见图 6-3).

$$\begin{aligned} \int_0^t dx \int_x^t e^{-(x-y)^2} dy &= - \int_0^t dx \int_x^t e^{-(x-y)^2} dy \\ &= - \int_0^t dy \int_0^y e^{-(x-y)^2} dx, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-t^2} - 1} \int_0^t dy \int_0^y e^{-(x-y)^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{t^2} \right) \cdot \int_0^t dy \int_0^y e^{-(x-y)^2} dx \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{-2t} \cdot \int_0^t e^{-(x-t)^2} dx. \\ \text{而} \int_0^t e^{-(x-t)^2} dx &\stackrel{x-t=u}{=} \int_{-t}^0 e^{-u^2} du, \text{ 所以} \\ \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_{-t}^0 e^{-u^2} du}{-2t} \stackrel{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-(-t)^2} \cdot (-1)}{-2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

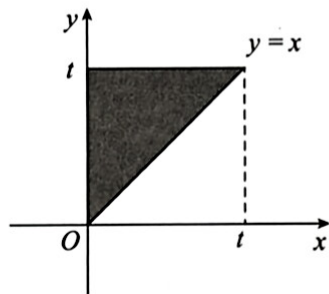


图 6-3

第三节 积分不等式与积分等式

内容与方法提要

对于与积分不等式或积分等式有关的证明, 一般有以下方法:

- (1) 利用单调性.
- (2) 利用积分法 (分部积分法、换元法).
- (3) 利用微分中值定理.

典型例题分析

题型一 积分不等式

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调减少, 证明: 当 $0 < a < b$ 时, 有

$$a \int_0^b f(x) dx \leq b \int_0^a f(x) dx.$$

证法1 利用单调性证明. 视 b 为 x , 作辅助函数

$$F(x) = a \int_0^x f(t) dt - x \int_0^a f(x) dx, \quad a \leq x \leq b,$$

则

$$F'(x) = af(x) - \int_0^a f(x) dx$$

$$\frac{\text{积分}}{\text{中值定理}} af(x) - af(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq a)$$

$$= a[f(x) - f(\xi)] \quad (0 \leq \xi \leq a \leq x \leq b).$$

由 $f(x)$ 单调减少, 知 $F'(x) \leq 0$, 故 $F(x)$ 单调减少. 又由于 $F(a) = 0$, 则

$$F(x) \leq F(a) = 0,$$

即

$$a \int_0^b f(x) dx \leq b \int_0^a f(x) dx.$$

证法2 利用换元法将两端积分限化为同一积分限. 令 $x = \frac{a}{b}t$, 则

$$b \int_0^a f(x) dx = a \int_0^b f\left(\frac{a}{b}t\right) dt = a \int_0^b f\left(\frac{a}{b}x\right) dx.$$

由已知条件, $x > \frac{a}{b}x$, 且 $f(x)$ 单调减少, 于是 $f(x) \leq f\left(\frac{a}{b}x\right)$, 所以

$$a \int_0^b f(x) dx \leq a \int_0^b f\left(\frac{a}{b}x\right) dx = b \int_0^a f(x) dx.$$

例2 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 证明: 对任意 $a \in [0, 1]$, 有

$$\int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(a) g(1).$$

证 利用单调性证明. 作辅助函数

$$F(x) = \int_0^x g(t) f'(t) dt + \int_0^1 f(t) g'(t) dt - f(x) g(1), \quad x \in [0, 1],$$

只要证明 $F(a) \geq 0$.

$$F'(x) = g(x) f'(x) - f'(x) g(1) = f'(x) [g(x) - g(1)],$$

又由 $f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$ 知 $F'(x) \leq 0$, 故 $F(x)$ 单调减少. 由于

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 g(t) f'(t) dt + \int_0^1 f(t) g'(t) dt - f(1) g(1) \\ &= \int_0^1 [g(t) f'(t) + f(t) g'(t)] dt - f(1) g(1) \\ &= \int_0^1 d[g(t) f(t)] - f(1) g(1) \\ &= g(t) f(t) \Big|_0^1 - f(1) g(1) = 0, \end{aligned}$$

故 $F(a) \geq F(1) = 0$, 即所证不等式成立.

例3 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

证 由已知, 有

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \quad (k=1, 2, \dots),$$

故

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) > 0, \end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 有下界. 又由

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx < 0,$$

可知 $\{a_n\}$ 单调减少, 故由单调有界准则, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

例 4 设 $a = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $b = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $c = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$, 则 a, b, c 的大小关系为().

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

分析 它们的积分区间相同, 直接比较被积函数的大小.

解 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时,

$$0 < \sin x < \cos x < 1 < \cot x,$$

又由于 $\ln u$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 则

$$\ln(\sin x) < \ln(\cos x) < \ln(\cot x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx,$$

所以选项 B 正确.

例 5 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k=1, 2, 3$), 则().

- A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_2 < I_1$ C. $I_2 < I_3 < I_1$ D. $I_2 < I_1 < I_3$

解 由于

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx, \end{aligned}$$

又由于 $e^{x^2} \sin x < 0$, $x \in (\pi, 2\pi)$, 则 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < 0$, 故 $I_2 < I_1$. 又因为

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx &= \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= e^{\xi_1^2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + e^{\xi_2^2} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx \\ &= 2(e^{\xi_2^2} - e^{\xi_1^2}) > 0 \quad (\pi < \xi_1 < 2\pi, 2\pi < \xi_2 < 3\pi), \end{aligned}$$

故 $I_3 > I_1$, 所以选项 D 正确.

注 这里应用了推广的积分第一中值定理.

推广的积分第一中值定理: 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

证 设

$$H(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt, \quad R(x) = \int_a^x g(t)dt,$$

由 $g(x)$ 不变号, 知 $g(x) > 0$ 或 $g(x) < 0$, 或 $g(x) \equiv 0$, 当 $g(x) \equiv 0$ 时, 等式显然成立. 当 $g(x) > 0$ 或 $g(x) < 0$ 时, $R'(x) = g(x) \neq 0$.

由柯西中值定理, 知存在一点 $\xi \in (a, b)$, 有

$$\frac{H'(\xi)}{R'(\xi)} = \frac{H(b) - H(a)}{R(b) - R(a)},$$

即

$$\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

即证得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明: $\left| \int_0^1 f(x)dx \right| \leq \frac{M}{4}$, 其中 $M = \max_{0 \leq x \leq 1} \{ |f'(x)| \}$.

证法 1 从中点 $x = \frac{1}{2}$ 将区间 $[0, 1]$ 划分为 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x)dx \right| &\leq \int_0^1 |f(x)|dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(0) + f'(\xi_1)x|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(1) + f'(\xi_2)(x-1)|dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(\xi_1)x|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(\xi_2)(x-1)|dx \\ &\leq M \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + M \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)dx = \frac{M}{8} + \frac{M}{8} = \frac{M}{4}. \end{aligned}$$

证法 2 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0, 1]$, 应用泰勒公式, 将 $F(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 处分别展开, 再代入中点 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(\xi_1)x^2 \quad (\xi_1 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

$$F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{1}{2}F''(\xi_2)(x-1)^2 \quad (\xi_2 \text{ 介于 } 1 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f'(\xi_1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}f'(\xi_1), \quad ①$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = F(1) + \frac{1}{2}f'(\xi_2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = F(1) + \frac{1}{8}f'(\xi_2), \quad ②$$

式②-式①,得

$$F(1) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{8} [f'(\xi_1) - f'(\xi_2)],$$

所以

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{8} (|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)|) \leq \frac{M}{4}.$$

例 7 设 $s(x) = \int_0^x |\cos t| dt$.

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明: $2n \leq s(x) < 2(n+1)$.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x}$.

解 (1) $|\cos x|$ 以 π 为周期, 且 $\int_0^\pi |\cos x| dx = 2$.

因为 $|\cos x| \geq 0$, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx \leq s(x) = \int_0^x |\cos t| dt < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx,$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} |\cos x| dx &= n \int_0^\pi |\cos x| dx = 2n, \\ \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx &= (n+1) \int_0^\pi |\cos x| dx = 2(n+1), \end{aligned}$$

故 $2n \leq s(x) < 2(n+1)$.

(2) 由(1)知, 当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{s(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi},$$

又由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi},$$

由夹逼准则, 可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{s(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$.

题型二 积分等式

例 8 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续.

(1) 证明: $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$.

(2) 若 $f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin x dx$, 利用(1)的结论, 求 $f(x)$.

解 (1) 用积分换元法.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\sin x) dx &\stackrel{x=\pi-t}{=} \int_0^\pi (\pi-t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt, \end{aligned}$$

移项可得

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

(2) 在已知等式两边同时乘以 $\sin x$, 再从 $-\pi$ 到 π 积分, 得

$$\int_{-\pi}^\pi f(x) \sin x dx = \int_{-\pi}^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin x dx \cdot \int_{-\pi}^\pi \sin x dx$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{奇偶性}} 2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + 0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ & = \pi \left[-\arctan(\cos x) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}, \end{aligned}$$

所以 $f(x) = \frac{x}{1 + \cos^2 x} + \frac{\pi^2}{2}$.

例 9 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数, 证明: $g(x) = \int_0^x 2f(t)dt - x \int_0^2 f(t)dt$ 以 2 为周期.

证 利用周期性的定义, 只要证明 $g(x+2) - g(x) = 0$.

记 $F(x) = g(x+2) - g(x)$, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{x+2} 2f(t)dt - (x+2) \int_0^2 f(t)dt - \int_0^x 2f(t)dt + x \int_0^2 f(t)dt, \\ F'(x) &= 2f(x+2) - \int_0^2 f(t)dt - 2f(x) + \int_0^2 f(t)dt \\ &= 2[f(x+2) - f(x)] = 0, \end{aligned}$$

于是

$$F(x) = g(x+2) - g(x) \equiv C \quad (C \text{ 为常数}),$$

取 $x = 0$, 得 $F(x) = 0$, 即 $C = 0$, 故 $g(x)$ 以 2 为周期.

例 10 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0$.

(1) 写出 $f(x)$ 带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明: 至少存在一点 $\eta \in [-a, a]$, 使得 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x)dx$.

(1) **解**
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(\xi)x^2 \\ &= f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}). \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

(2) **证法 1** 式 ① 两边同时积分, 得

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a f'(0)x dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx,$$

由 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续知, $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上取得最大值 M 与最小值 m , 故

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x)dx &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx \leq \frac{1}{2} M \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{1}{3} Ma^3, \\ \int_{-a}^a f(x)dx &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx \geq \frac{1}{2} m \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{1}{3} ma^3, \end{aligned}$$

因此

$$m \leq \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x)dx \leq M.$$

由介值定理, 知存在一点 $\eta \in (-a, a)$, 使得 $f''(\eta) = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x)dx$, 即

$$a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x)dx.$$

证法 2 令 $F(x) = \int_{-x}^x f(t)dt$, 用泰勒公式和介值定理证明. 因为

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \quad F'(x) = f(x) + f(-x), \quad F'(0) = 2f(0) = 0, \\ F''(x) &= f'(x) - f'(-x), \quad F''(0) = 0, \quad F'''(x) = f''(x) + f''(-x), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 F(x) &= F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \frac{1}{6}F'''(\xi)x^3 \\
 &= \frac{1}{6}[f''(\xi) + f''(-\xi)] \cdot x^3 \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).
 \end{aligned}$$

由 $f''(x)$ 连续, 根据介值定理, 知存在一点 $\eta \in (-\xi, \xi)$, 使得

$$f''(\eta) = \frac{1}{2}[f''(\xi) + f''(-\xi)],$$

故

$$F(x) = \frac{1}{3}f''(\eta) \cdot x^3. \quad ②$$

将 $x = a$ 代入式 ②, 得

$$F(a) = \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{3}f''(\eta) \cdot a^3, \quad \eta \in (-\xi, \xi) \subset [-a, a],$$

$$\text{即 } a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

例 11 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$, 证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使得

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$$

证 令辅助函数

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, \pi],$$

则 $F(0) = F(\pi) = 0$. 又由于

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi \cos x d[F(x)] \\
 &= \cos x \cdot F(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x) \sin x dx = \int_0^\pi F(x) \sin x dx,
 \end{aligned}$$

所以存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $F(\xi) \sin \xi = 0$ [否则 $F(x) \sin x$ 在 $(0, \pi)$ 内恒正或恒负, 均与 $\int_0^\pi F(x) \sin x dx = 0$ 矛盾], 而 $\sin \xi \neq 0$, 故 $F(\xi) = 0$. 由此知,

$$F(0) = F(\xi) = F(\pi), \quad 0 < \xi < \pi.$$

对 $F(x)$ 在 $[0, \xi], [\xi, \pi]$ 上分别应用罗尔定理, 知至少存在 $\xi_1 \in (0, \xi), \xi_2 \in (\xi, \pi)$, 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

例 12 设 $f(x)$ 连续, $f(x+T) = f(x), T > 0$, 且 $f(-x) = f(x)$.

(1) 证明: $\int_0^{kT} x f(x) dx = \frac{k^2 T}{2} \int_0^T f(x) dx$ (k 为正整数).

(2) 利用 (1) 的结论, 求 $I = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$.

(1) **证** 利用换元法,

$$\int_0^{kT} x f(x) dx \xrightarrow{x = kT - t} kT \int_0^{kT} f(t) dt - \int_0^{kT} t f(t) dt,$$

移项得

$$\int_0^{kT} x f(x) dx = \frac{kT}{2} \int_0^{kT} f(x) dx.$$

又由于 $f(x+T) = f(x)$, 故 $\int_0^{kT} f(x) dx = k \int_0^T f(x) dx$, 所以

$$\int_0^{kT} x f(x) dx = \frac{k^2 T}{2} \int_0^T f(x) dx.$$

(2) **解** 因为 $|\sin x|$ 以 π 为周期且为偶函数, 所以由(1)的结论, 知

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx = \frac{n^2 \pi}{2} \int_0^\pi |\sin x| dx \\ &= \frac{n^2 \pi}{2} \int_0^\pi \sin x dx = n^2 \pi. \end{aligned}$$

例13 设 $f''(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 记 $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$, 证明:

$$(1) \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx;$$

$$(2) \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}.$$

(1) **证法1**

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x) d[f'(x)] \\ &= (x^2 - x) f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x - 1) f'(x) dx \\ &= - \int_0^1 (2x - 1) d[f(x)] \\ &= -(2x - 1) f(x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx.$$

证法2 利用分部积分法, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx = - \int_0^1 x f'(x) dx \\ &= - \int_0^1 x f'(x) d(x-1) \\ &= -x(x-1) f'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 (x-1) f'(x) dx + \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-1) f'(x) dx &= \int_0^1 (x-1) d[f(x)] \\ &= (x-1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 - \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx,$$

即

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx.$$

注 在证明积分等式中, 常用到分部积分法.

(2) **证**

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |x(x-1)| |f''(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| \int_0^1 x(1-x) dx \\ &= \frac{1}{12} M. \end{aligned}$$

第四节 反常积分

内容与方法提要

一、无穷区间上的反常积分

1. 定义

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty}; \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^0 f(x) dx \\ &= F(x) \Big|_0^{+\infty} + F(x) \Big|_{-\infty}^0.\end{aligned}$$

2. 敛散性判别法

比较判别法: 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且存在 $c \geq a$, 使得当 $x \geq c$ 时, 有 $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散.

比较判别法的极限形式: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda \cdot f(x) = l.$$

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $\lambda > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $\lambda \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

二、无界函数的反常积分

1. 定义

设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的任一邻域内都无界, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

设 $f(x)$ 在点 $x = b$ 的任一邻域内都无界, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

说明 由 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ 可得 $f(x)$ 在 $x = a, x = b$ 附近均无界.

2. 敛散性判别法

比较判别法的极限形式: 设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上非负连续, $x = a$ 为瑕点,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^\lambda f(x) = l.$$

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $\lambda < 1$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $\lambda \geq 1$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

3. 几个常用反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \ (a > 0) \begin{cases} \text{收敛, } p > 1, \\ \text{发散, } p \leq 1. \end{cases} \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} \begin{cases} \text{收敛, } p > 1, \\ \text{发散, } p \leq 1, \end{cases} \quad a > 1.$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q} dx \ (a < b) \begin{cases} \text{收敛, } q < 1, \\ \text{发散, } q \geq 1. \end{cases} \quad \int_a^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx \begin{cases} \text{收敛, } \lambda > 0, \\ \text{发散, } \lambda \leq 0, \end{cases} \quad k \geq 0.$$

三、定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ 和 } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 均收敛.}$$

$$\int_a^b f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \int_a^c f(x) dx \text{ 和 } \int_c^b f(x) dx \text{ 均收敛.}$$

[设 $f(x)$ 在 $x=a, x=b$ 的任一邻域内都无界.]

四、 Γ (伽马) 函数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (\alpha > 0).$$

Γ 函数的性质如下: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$. 例如:

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6.$$

说明 对数学一、数学三的考生, Γ 函数在概率统计中经常用到.

典型例题分析

例 1 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax} = \int_{-\infty}^a t e^t dt$, 则 $a =$ _____.

解
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^a = e^a,$$

$$\int_{-\infty}^a t e^t dt = (t e^t - e^t) \Big|_{-\infty}^a = e^a(a-1).$$

由已知, 有 $e^a = e^a(a-1)$, 可得 $a = 2$.

例 2 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ 知, $x=0$ 不是瑕点, 故所求积分为无穷区间上的反常积分.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= \int_0^{+\infty} \sin^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx \stackrel{2x=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

例 3 判别下列反常积分的敛散性:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x}}$; (2) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$.

解 (1) 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x}} = 1$, 知反常积分收敛.

(2) 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-0) \frac{1}{\ln(1+x)} = 1$, 知反常积分发散.

例 4 下列反常积分收敛的是().

A. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ B. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ C. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ D. $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

解 四个反常积分均可以由定义法判别其敛散性. 由于

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx &= \int_2^{+\infty} x e^{-x} dx = -\int_2^{+\infty} x d(e^{-x}) \\ &= -x e^{-x} \Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = 2e^{-2} - e^{-x} \Big|_2^{+\infty} = 3e^{-2},\end{aligned}$$

故选项 D 正确.

注 ① 下列计算是错误的:

因为 $\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0$, 故其收敛.

对于反常积分, 只有当其收敛时, 才能使用被积函数的奇偶性来判别其收敛性. 事实上,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx,$$

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{x}{1+x^2} = 1$ 知 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ 发散, 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ 发散.

② 对于 $\int_a^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$, 其中 $Q_m(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上无零点, $P_n(x), Q_m(x)$ 分别为 n, m 次多项式.

当 $m-n > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ 收敛;

当 $m-n \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ 发散.

例 5 计算下列积分:

$$(1) I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}; \quad (2) I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

解 (1) $x=1$ 为被积函数的无穷间断点,

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}},$$

而

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin(2x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \ln \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right] \Big|_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \ln(2+\sqrt{3}),\end{aligned}$$

故

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

(2) 由 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = +\infty$, 知 $x=1$ 是瑕点, 此题既是无穷区间上的反常积分, 又是无界函数的反

常积分.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \stackrel{\sqrt{x-1}=t}{=} \int_0^1 \frac{2t}{t(t^2+1)} dt = 2\arctan t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \stackrel{\sqrt{x-1}=t}{x=t^2+1} \int_1^{+\infty} \frac{2t}{t(t^2+1)} dt = 2\arctan t \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{故 } I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

例 6 设 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{e^{-x}}{1+e^x} \int_0^{+\infty} f(x)dx$, 求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

解 令 $A = \int_0^{+\infty} f(x)dx$, 对已知等式两边同时积分, 得

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx - A \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} dx,$$

即

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx - A \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} dx. \quad ①$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x(1+e^x)} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x} \right) dx \\ &= -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= 1 + \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{由式 ①, 知 } A = \frac{\pi}{2} - A \cdot (1 - \ln 2), \text{ 解得 } A = \frac{\pi}{2(2 - \ln 2)}.$$

例 7 已知 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2+ax+b}{2x^2+bx} - 1 \right) dx = 1 (b > 0)$, 求 a, b 的值.

解 依题设, 有

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2+ax+b}{2x^2+bx} - 1 \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{(a-b)x+b}{2x^2+bx} dx.$$

当 $a-b \neq 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{(a-b)x+b}{2x^2+bx} = \frac{a-b}{2} \neq 0.$$

由比较判别法知, 积分发散, 而已知积分收敛. 故 $a-b=0$, 从而有

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{b}{2x^2+bx} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+b} \right) dx = \ln \frac{x}{2x+b} \Big|_1^{+\infty} = \ln \frac{2+b}{2},$$

故 $a=b=2(e-1)$.

注 此题中 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{2}{2x+b} dx$ 均发散, 但 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+b} \right) dx$ 收敛, 所以这类题应先求 $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+b} \right) dx$, 再求反常积分.

例 8 设 $\int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \ln 2$, 则 $a =$ _____.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a} \right) dx = (\ln x - \ln |2x+a|) \Big|_1^{+\infty} \\ &= \ln \frac{x}{|2x+a|} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{|2x+a|} - \ln \frac{1}{|2+a|} = \ln \frac{|2+a|}{2} = \ln 2, \end{aligned}$$

解得 $a = 2$ 或 $a = -6$.

当 $a = -6$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{-3}{x(x-3)} dx = \int_1^4 \frac{-3}{x(x-3)} dx + \int_4^{+\infty} \frac{-3}{x(x-3)} dx,$$

而 $\int_1^4 \frac{-3}{x(x-3)} dx$ 发散, 因此 $a = -6$ 不符合题意, 故 $a = 2$.

第五节 定积分的应用

内容与方法提要

一、微元法

设量 Q 非均匀分布在 $[a, b]$ 上, 且具有可加性.

(1) 任取区间 $[x, x+dx] \subset [a, b]$, 量 Q 在 $[x, x+dx]$ 上的微元 $\Delta Q \approx f(x)dx \stackrel{\text{记}}{=} dQ$.

(2) $Q = \int_a^b dQ = \int_a^b f(x)dx$.

说明 微元法是定积分应用的核心方法, 关键是写出 $[x, x+dx]$ 上的微元 dQ , 近似时应注意两点:

① 在左端点 x 处近似;

② 几何上用直线段代替曲线段, 物理上用均匀分布代替非均匀分布.

例如 如图 6-4 所示, 求由直线 $x = a, x = b, x$ 轴, 曲线 $y = f(x)$ 所围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 任取 $[x, x+dx] \subset [a, b]$, 求出阴影部分绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积的近似值.

$$\begin{aligned} dV &= \pi(x+dx)^2 \cdot f(x) - \pi x^2 \cdot f(x) \\ &= 2\pi x f(x) dx + \pi f(x) (dx)^2 \\ &\approx 2\pi x f(x) dx = dv, \end{aligned}$$

故

$$V = \int_a^b dv = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

又如求线密度为 $\rho = \rho(x), x \in [a, b]$ 的细棒的质量.

如图 6-5 所示, 任取 $[x, x+dx] \subset [a, b]$, 则

$$dm = \rho(x) dx,$$

故

$$m = \int_a^b dm = \int_a^b \rho(x) dx.$$

二、几何应用

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标系: 设 D 是由曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x)$ 与 $x = a, x = b (a < b)$ 所围成的图形, 则其面积为

$$A = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

(2) 极坐标系: 设 D 是由曲线 $r = r(\theta)$ 与 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围成的图形, 则其面积为

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

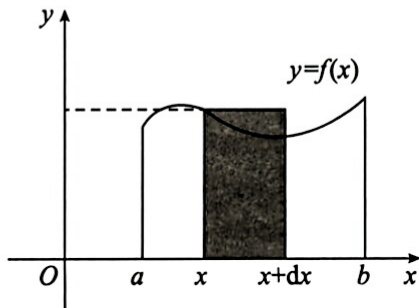


图 6-4

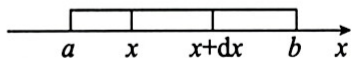


图 6-5

(3) 参数方程: 设 D 是由曲线 $x = x(t), y = y(t) \geq 0 (\alpha \leq t \leq \beta)$ 及 x 轴所围的图形, 如图 6-6 所示.

设 $x = x(t)$ 有反函数 $t = t(x)$, 则 $y = y(t) = y[t(x)]$, 故 D 的面积为

$$A = \int_0^{x(\beta)} y[t(x)] dx \stackrel{x=x(t)}{=} \int_a^\beta y(t) d[x(t)].$$

注 参数方程所围图形的面积可转化到直角坐标系下进行计算.

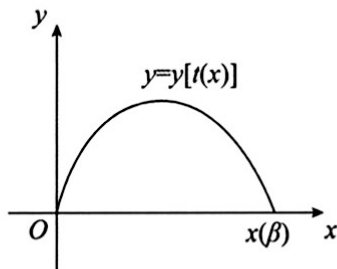


图 6-6

2. 立体的体积

(1) 曲线绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积: 设 D 是由曲线 $y = f(x) (a \leq x \leq b)$, $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形, 则 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

(2) 曲线绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积: 设 D 是由曲线 $y = f(x) > 0 (0 \leq a \leq x \leq b)$, $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形, 则 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

(3) (仅数学一、数学二要求) 平行截面面积已知的立体的体积: 设截面面积为 $s(x)$, 则立体 (见图 6-7) 的体积为

$$V = \int_a^b s(x) dx.$$

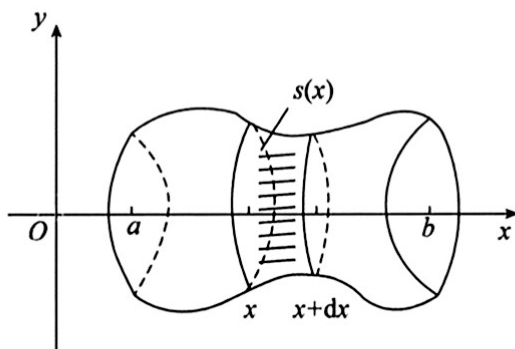


图 6-7

3. 平面曲线的弧长 (仅数学一、数学二要求)

(1) 设 $L: y = f(x) (a \leq x \leq b)$, 则弧微分 $ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$, 弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

(2) 设 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 则弧微分 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$, 弧长

$$s = \int_a^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

(3) 设 $L: r = r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$, 则弧微分 $ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$, 弧长

$$s = \int_a^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

4. 旋转曲面的侧面积 (仅数学一、数学二要求)

设 D 是由曲线 $y = f(x) > 0 (a \leq x \leq b)$, $x = a, x = b$, x 轴所围成的图形, 则 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$S_{\text{侧}} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

三、函数的平均值

函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值为 $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$.

四、定积分的物理应用 (仅数学一、数学二要求)

物理应用包括求细棒的质量、做功、水压力、细棒的质心坐标、引力等.

解决物理问题的步骤如下:

(1) 建立适当的坐标系.

(2) 用微元法求出物理量的微元 dQ .

(3) 对微元 dQ 求积分.

典型例题分析

题型一 几何应用

例 1 设直线 $y = kx$ 与曲线 $y = x^2$ 所围图形的面积为 S_1 , 它们与直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 S_2 , 且 $k < 1$.

(1) 确定 k 的值, 使得 $S_1 + S_2$ 取得最小值, 并求最小值.

(2) 求该最小值所对应的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) $y = kx$ 与 $y = x^2$ 的交点为 $(0, 0), (k, k^2)$.

当 $0 < k < 1$ 时, 如图 6-8 所示,

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \int_0^k (kx - x^2) dx + \int_k^1 (x^2 - kx) dx \\ &= \frac{1}{3}k^3 - \frac{k}{2} + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } S' = k^2 - \frac{1}{2} = 0, \text{ 得 } k = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 舍去} \right).$$

又由于 $S'' = 2k, S''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > 0$, 故当 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, S 取得极小值, 它也是最小值, 最小值为

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

当 $k \leq 0$ 时, 如图 6-9 所示,

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \int_k^0 (kx - x^2) dx + \int_0^1 (x^2 - kx) dx \\ &= -\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

由 $S' = -\frac{1}{2}(k^2 + 1) < 0$ 知, $S(k)$ 单调减少, 故当 $k = 0$ 时, $S(0)$ 为最小值, $S(0) = \frac{1}{3}$, 显然, $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) <$

$S(0)$, 所以, 当 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

为最小值.

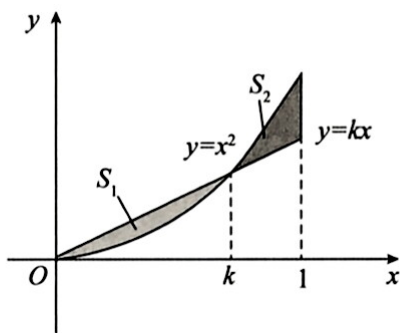


图 6-8

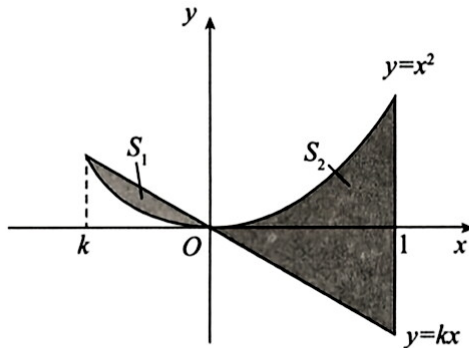


图 6-9

(2) 直接利用公式,有

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - x^4 \right) dx + \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(x^4 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{\sqrt{2}+1}{30} \pi.$$

例 2 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D ,如图 6-10 所示.求:

(1) D 的面积 A .

(2) D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) 设切点为 $(x_0, \ln x_0)$,则在 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程为

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

由切线过点 $(0,0)$ 知,

$$\ln x_0 - 1 = 0, \quad x_0 = e,$$

故切线方程为 $y = \frac{1}{e}x$,所以

$$A = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \frac{1}{2}e - 1.$$

(2) 切线 $y = \frac{1}{e}x$ 与 x 轴及 $x = e$ 所围三角形绕 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积为 $V_1 = \frac{1}{3}\pi e^2$,

曲线 $y = \ln x$ 与 x 轴及 $x = e$ 所围图形绕 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_2 = \int_0^1 \pi(e - e^y)^2 dy,$$

所以

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi e^2 - \int_0^1 \pi(e - e^y)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3). \end{aligned}$$

例 3 求曲线 $y = e^{-x} \sqrt{\sin x} (x \geq 0)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

解 $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ 的定义域要求 $\sin x \geq 0$,得 $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] (k = 0, 1, 2, \dots)$.

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-2x} \sin x dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi \int_0^{\pi} e^{-2(t+2k\pi)} \sin t dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi e^{-4k\pi} \int_0^{\pi} e^{-2t} \sin t dt \quad (\text{分部积分法}) \\ &= \frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-4k\pi} \\ &= \frac{\pi(1+e^{-2\pi})}{5} \cdot \frac{1}{1-e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}. \end{aligned}$$

注 $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-4k\pi}$ 是等比级数. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 即 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 若 $|q| < 1$, 则等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

例 4 证明: 曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 的弧长等于椭圆 $x^2 + 2y^2 = 2$ 的周长.

证 椭圆 $x^2 + 2y^2 = 2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

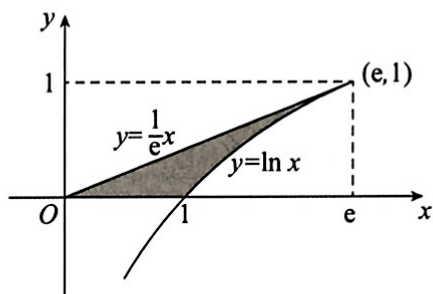


图 6-10

由对称性知,椭圆的周长为

$$\begin{aligned} L_{\text{椭圆}} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

由对称性知,曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的弧长为

$$\begin{aligned} L_{\text{曲线}} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &\stackrel{x = \frac{\pi}{2} - t}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

故 $L_{\text{椭圆}} = L_{\text{曲线}}$.

例 5 求由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$) 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 及 x 轴所围图形分别绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) 如图 6-11 所示,

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx \\ &\stackrel{\substack{x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t)}}{=} \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

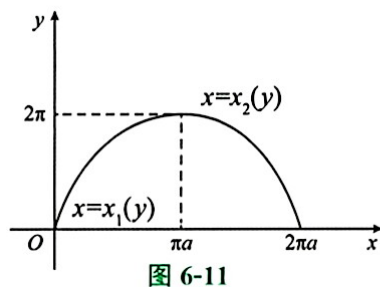


图 6-11

(2) 设由已知参数方程表示的曲线的直角坐标方程为 $y = y[t(x)]$, 且在 $[0, \pi a]$ 与 $[\pi a, 2\pi a]$ 上的反函数分别为 $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, 则

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy \\ &= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt \\ &= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

注 求 V_y 也可以用公式 $V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} |x| y(x) dx$.

例 6 设曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 求由此曲线、切线及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积.

解 如图 6-12 所示, 设切点为 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$, 则切线方程为

$$y - \sqrt{x_0-1} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x - x_0),$$

又由于切线过点 $(0,0)$, 可得 $x_0 = 2$, 故切点为 $P(2,1)$, 切线方程为 $y = \frac{1}{2}x$.

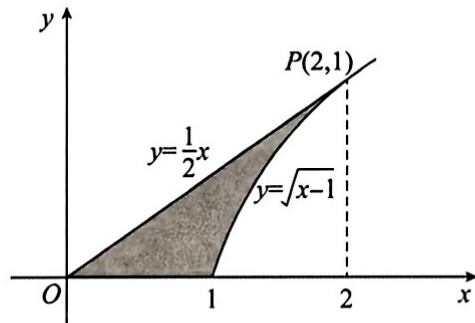


图 6-12

由曲线 $y = \sqrt{x-1}$ ($1 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$S_1 = \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3} dx = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1),$$

由直线段 $y = \frac{1}{2}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$S_2 = \int_0^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^2 2\pi \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx = \sqrt{5}\pi,$$

故所求表面积为

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi(11\sqrt{5}-1)}{6}.$$

题型二 物理应用(仅数学一、数学二要求)

例 7 一个半球形容器,其半径为 R . 容器中盛满水,将容器中的水全部抽出容器口,至少需要做功多少?(设水的密度为 $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$)

解 建立如图 6-13 所示的直角坐标系,则边界曲线方程为 $x^2 + y^2 = R^2$ ($0 \leq x \leq R$). 用微元法,任取 $[x, x+dx] \subset [0, R]$,阴影部分这一薄层水(视为圆柱体)的体积微元为

$$dV = \pi y^2 dx = \pi(R^2 - x^2) dx.$$

将薄层水抽到容器口,克服重力所做功的微元为

$$\begin{aligned} dW &= (-x) \cdot (-\rho g dV) \\ &= x \rho g \pi y^2 dx = x \rho g \pi (R^2 - x^2) dx, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} W &= \int_0^R dW = \pi \rho g \int_0^R x(R^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{4} \pi \rho g R^4 = \frac{\pi R^4}{4} \times 10^4 (\text{J}). \end{aligned}$$

例 8 一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上,其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$,求该细棒的质心坐标 $\bar{x}$.

解 由细棒的质心坐标公式,有

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x \rho(x) dx}{\int_0^1 \rho(x) dx},$$

$$\int_0^1 \rho(x) dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1) dx = \frac{5}{3},$$

$$\int_0^1 x \rho(x) dx = \int_0^1 x(-x^2 + 2x + 1) dx = \frac{11}{12},$$

$$\text{故 } \bar{x} = \frac{3}{5} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{20}.$$

例 9 某闸门的形状与大小如图 6-14 所示,其中 l 为对称轴. 闸门的上部为矩形 $ABCD$,下部由二次抛物线与线段 AB 组成,当水面与闸门的上端相平时,欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4,问闸门矩形部分的高 h 应为多少米?

解 建立如图 6-14 所示的直角坐标系,则抛物线方程为

$$x = h+1 - y^2, \quad 0 \leq x \leq h+1,$$

闸门矩形部分承受的水压力为

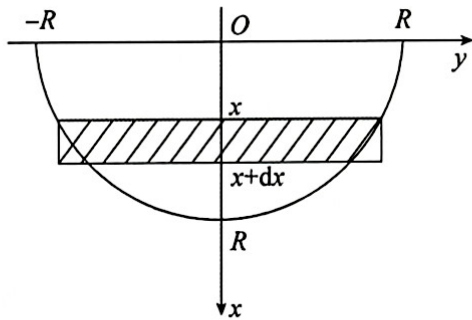


图 6-13

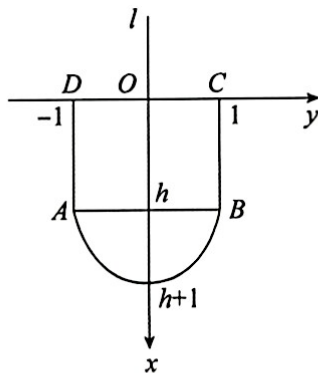


图 6-14

$$P_1 = 2 \int_0^h \rho g x \, dx = \rho g h^2,$$

闸门下部承受的水压力为

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \int_h^{h+1} \rho g x \cdot \sqrt{h+1-x} \, dx \\ &\stackrel{\sqrt{h+1-x}=t}{=} 4 \rho g \int_0^1 (h+1-t^2) t^2 \, dt \\ &= 4 \rho g \left(\frac{1}{3} h + \frac{2}{15} \right). \end{aligned}$$

由已知, 有 $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}$, 即

$$\frac{h^2}{4 \left(\frac{1}{3} h + \frac{2}{15} \right)} = \frac{5}{4},$$

解得 $h = 2$, $h = -\frac{1}{3}$ (舍去), 故 $h = 2(\text{m})$.

例10 设单位质点 P, Q 分别位于点 $(0,0)$ 和点 $(0,1)$ 处, P 从点 $(0,0)$ 出发沿 x 轴正向移动, 记 G 为引力常量, 则当质点 P 移动到点 $(l,0)$ 时, 克服质点 Q 的引力所做的功为().

A. $\int_0^l \frac{G}{x^2+1} \, dx$

B. $\int_0^l \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

C. $\int_0^l \frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

D. $\int_0^l \frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

解 由万有引力公式, 质点 Q 对质点 $P(x,0)$ 的引力大小为

$$F(x) = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{G}{1+x^2},$$

其沿 x 轴方向的分力大小为

$$\frac{G}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

故质点 P 克服质点 Q 的引力所做的功 $W = \int_0^l \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \, dx$, 选项 B 正确.

习题演练

一、选择题

(1) 设 $M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} \, dx$, $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} \, dx$, 则().

A. $M > N > 1$

B. $1 > M > N$

C. $N > M > 1$

D. $1 > N > M$

(2) 设 $\alpha(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} \, dt$, $\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} \, dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的().

A. 等价无穷小

B. 低阶无穷小

C. 高阶无穷小

D. 同阶但非等价无穷小

(3) 设在 $[a,b]$ 上, $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 记

$$S_1 = \int_a^b f(x) \, dx, \quad S_2 = f(b)(b-a), \quad S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a),$$

则().

A. $S_1 < S_2 < S_3$

B. $S_2 < S_1 < S_3$

C. $S_3 < S_1 < S_2$

D. $S_2 < S_3 < S_1$

(4) 下列反常积分发散的是().

A. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

B. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

二、填空题

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n + n e^{\frac{2i}{n}}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设 $y = \int_0^2 x \sqrt{12 - x^2 u^2} du (x \geq 0)$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 设 $f(x)$ 为已知连续函数, $I(s, t) = t \int_0^{\frac{1}{t}} f(tx) dx$, 其中 $t > 0, s > 0$, 则 $\frac{dI}{ds} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

(1) 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x$, 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

(2) 设 $f(1) = 0, f'(1) = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^u f(e^u - e^{x^2} + 1) du}{x^2 \ln(\cos x)}.$

(3) 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(4) 求下列积分:

(I) $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx;$

(II) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx;$

(III) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}};$

(IV) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx;$

(V) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx;$

(VI) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx;$

(VII) $\int_{-e^e}^{-e^e} \frac{\ln \ln |x|}{x \ln |x|} dx;$

(VIII) $\int_{-1}^1 (x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$

(5) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}.$

(6) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$, 证明: $\{a_n\}$ 单调减少, 且

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

(7) (I) 证明: $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx;$

(II) 求 $I = \int_0^{\pi} x \sin^n x dx.$

(8) 求 $I = \int_{-1}^1 |x-y| e^x dx$ ($|y| < 1$).

(9) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调增加, 证明: 当 $b > a > 0$ 时, 有

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{1}{2} \left[b \int_0^b f(x) dx - a \int_0^a f(x) dx \right].$$

(10) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1$, 证明:

$$\left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 > \int_0^1 f^3(x) dx.$$

(11) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, $f(a) = 0$, 证明:

$$\frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx \leq M, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

(12) 设 $f(x)$ 是 $[0, a]$ 上的正值函数, 且 $f''(x) > 0, a > 0$, 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq a f\left(\frac{a}{2}\right).$$

(13) 设 $f''(x) > 0, x \in [a, b]$, 证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

(14) 计算反常积分:

$$(I) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}}; \quad (II) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}.$$

(15) (仅数学一、数学二要求) 求摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的弧长.

(16) 求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴所围图形的面积.

(17) 设平面图形 D 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所围, 求图形 D 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(18) 求圆域 $x^2 + (y-b)^2 \leq a^2 (b > a)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(19) 设曲线 $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$ 与 $y = 1 - x^2$ 交于点 A , 过原点 O 与点 A 的直线与 $y = ax^2$ 围成一个平面图形, 问 a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积最大? 最大体积是多少?

(20) (仅数学一、数学二要求) 设一容器的内侧是由图 6-15 中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y (y \geq \frac{1}{2})$ 与 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq \frac{1}{2})$ 连接而成.

(I) 求容器的容积;

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶全部抽出, 至少需要做多少功?

(21) 设 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是可导的正值函数, 且 $f(-t) = f(t)$, 令

$$g(x) = \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt, \quad -a \leq x \leq a \quad (a > 0).$$

(I) 证明: $g(x)$ 是凹函数;

(II) 求出 $g(x)$ 的最小值;

(III) 当 $g(x)$ 的最小值为 $f(a) - a^2 - 1$ 时, 求 $f(t)$.

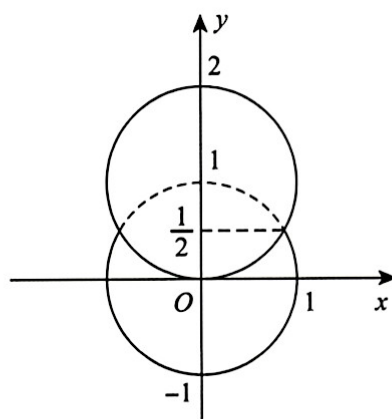


图 6-15

习题演练解答

一、选择题

(1) B.

解 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{(x - \sin x \cos x) \sec^2 x}{x^2} > 0$$

(当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $x - \sin x \cos x = \frac{1}{2}(2x - \sin 2x) > 0$),

故 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上单调增加, 于是

$$1 = f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi},$$

从而

$$\frac{\pi}{4} = 1 \times \frac{\pi}{4} < M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx < \frac{4}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < 1 \times \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4},$$

故可排除选项 A、C、D, 则选项 B 正确.

(2) D.

解 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}},$$

知 $\alpha(x) \sim 2x (x \rightarrow 0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt}{x^m} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \cos x}{mx^{m-1}} \\ &= \frac{e}{m} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{m-1}}, \end{aligned}$$

知 $\beta(x) \sim ex$, 故 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶但非等价无穷小, 选项 D 正确.

(3) B.

解 如图 6-16 所示, $S_1 = A_1 + S_2$, $S_3 = A_1 + A_2 + S_2$, 故 $S_2 < S_1 < S_3$.

选项 B 正确.

(4) D.

解 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = +\infty$, 发散. 经计算, 知选

项 A、B、C 均收敛. 选项 D 正确.

二、填空题

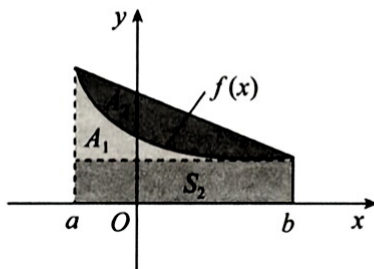
(1) $\arctan e - \frac{\pi}{4}$.

图 6-16

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{i}{n}}}{1 + e^{\frac{2i}{n}}} = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx \\ &= \arctan e^x \Big|_0^1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(2) $xf(x^2)$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(x^2 - t^2) dt &= -\frac{1}{2} \int_0^x f(x^2 - t^2) d(x^2 - t^2) \\ &\stackrel{x^2 - t^2 = u}{=} \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du,\end{aligned}$$

故

$$\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt = xf(x^2).$$

(3) $4\sqrt{3-x^2}$.解 由 $\int_0^2 x \sqrt{12-x^2u^2} du \stackrel{xu=t}{=} \int_0^{2x} \sqrt{12-t^2} dt$, 得

$$y' = \sqrt{12-4x^2} \cdot 2 = 4\sqrt{3-x^2}.$$

(4) $f(s)$.解 令 $tx = u$, 则 $I(s, t) = \int_0^s f(u) du$, 故 $\frac{dI}{ds} = f(s)$.

三、解答题

(1) 解

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(x-t) dt &\stackrel{x-t=u}{=} \int_0^x (x-u)f(u) du \\ &= x \int_0^x f(u) du - \int_0^x uf(u) du,\end{aligned}$$

故

$$x \int_0^x f(u) du - \int_0^x uf(u) du = 1 - \cos x.$$

等式两边同时对 x 求导, 得

$$\int_0^x f(u) du + xf(x) - xf(x) = \sin x,$$

即 $\int_0^x f(u) du = \sin x$, 令 $x = \frac{\pi}{2}$, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

(2) 解

$$\begin{aligned}\int_0^{x^2} e^u f(e^u - e^{x^2} + 1) du &= \int_0^{x^2} f(e^u - e^{x^2} + 1) d(e^u - e^{x^2} + 1) \\ &\stackrel{e^u - e^{x^2} + 1 = t}{=} \int_{2-e^{x^2}}^1 f(t) dt = -\int_1^{2-e^{x^2}} f(t) dt,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\int_1^{2-e^{x^2}} f(t) dt}{x^2 \ln[1 + (\cos x - 1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{2-e^{x^2}} f(t) dt}{x^2 \cdot (1 - \cos x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{2-e^{x^2}} f(t) dt}{x^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^{x^2} \cdot f(2 - e^{x^2})}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 - e^{x^2})}{x^2} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 - e^{x^2}) - f(1)}{x^2} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 - e^{x^2}) - f(1)}{2 - e^{x^2} - 1} \cdot \frac{2 - e^{x^2} - 1}{x^2} = f'(1) = 2.
\end{aligned}$$

(3) 解 令 $\int_0^1 f(x) dx = a$, 则 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + ax^3$, 故

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + a \int_0^1 x^3 dx,$$

于是 $a = \frac{\pi}{4} + \frac{a}{4}$, 解得 $a = \frac{\pi}{3}$, 故

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{3}x^3.$$

(4) 解 (I)

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx \\
&= 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + 0 \\
&= 4 \int_0^1 \frac{x^2(1 - \sqrt{1-x^2})}{1 - (1-x^2)} dx = 4 \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) dx \\
&= 4 \int_0^1 dx - 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4 - 4 \times \frac{1}{4} \pi \times 1^2 = 4 - \pi.
\end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx \\
&= n \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx \\
&= n \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx \\
&= n \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\sin x - \cos x| dx \right) \\
&= n \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \right] = 2\sqrt{2}n.
\end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{x = \sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cdot \cos t}{(1 + \cos^2 t) \cos t} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = -\arctan(\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(IV)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2} - t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin x) + \ln(\cos x)] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cdot \cos x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin 2x}{2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx - \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 \right] \\
&\stackrel{2x=u}{=} -\frac{\pi \ln 2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du \\
&= -\frac{\pi \ln 2}{4} + \frac{1}{4} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u) du \right] \\
&= -\frac{\pi \ln 2}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi \ln 2}{4} + \frac{1}{2} I,
\end{aligned}$$

移项, 解得 $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

$$\begin{aligned}
(\text{V}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x) \\
&= \frac{1}{2} x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{VI}) \quad I &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x-\frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 x \left(1-\frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 x e^{x+\frac{1}{x}} d\left(x+\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^2 x e^{x+\frac{1}{x}} d\left(x+\frac{1}{x}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^2 x d\left(e^{x+\frac{1}{x}}\right) = x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx \\
&= \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx,
\end{aligned}$$

代入原式, 得 $I = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}$.

$$\begin{aligned}
(\text{VII}) \quad \text{原式} &= \int_{-e^e}^{-e^{\sqrt{e}}} \frac{\ln(\ln |x|)}{\ln |x|} d(\ln |x|) \\
&= \int_{-e^e}^{-e^{\sqrt{e}}} \ln(\ln |x|) d[\ln(\ln |x|)] \\
&= \frac{1}{2} [\ln(\ln |x|)]^2 \Big|_{-e^e}^{-e^{\sqrt{e}}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{VIII}) \quad \int_{-1}^1 (x^2)^{\frac{3}{2}} dx &= \int_{-1}^1 |x|^3 dx = \int_{-1}^0 |x|^3 dx + \int_0^1 |x|^3 dx \\
&= \int_{-1}^0 (-x)^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(5) 解

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{1+i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1+i^2}}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

显然, $\frac{\sqrt{1+i^2}}{n} \in \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(6) 证

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt \stackrel{\text{记}}{=} b_n - b_{n+2}, \end{aligned}$$

由公式

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \\ &= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 1 的正奇数,} \end{cases} \end{aligned}$$

知 $b_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} b_n$, 故

$$a_n = b_n - b_{n+2} = b_n - \frac{n+1}{n+2} b_n = \frac{1}{n+2} b_n.$$

由

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) \sqrt{1-x^2} dx < 0,$$

知 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{n-1}{n+2}$, 即 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$.

(7)(I) 证

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\sin x) dx &\stackrel{x=\pi-t}{=} \int_0^\pi (\pi-t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt, \end{aligned}$$

移项, 得

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

(II) 解 利用(I), 有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi x \sin^n x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^n x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \pi, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot \pi, & n \text{ 为大于 1 的正奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

(8) 解

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^y (y-x) e^x dx + \int_y^1 (x-y) e^x dx \\ &= y \int_{-1}^y e^x dx - \int_{-1}^y x e^x dx + \int_y^1 x e^x dx - y \int_y^1 e^x dx \\ &= 2e^y - \left(e + \frac{1}{e}\right) y - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

(9) 证 令 $F(x) = \int_a^x t f(t) dt - \frac{1}{2} \left[x \int_0^x f(t) dt - a \int_0^a f(t) dt \right]$, 则

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= xf(x) - \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt \\
 &= \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt \\
 &\geq \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f(x)dt \\
 &= \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}xf(x) = 0,
 \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 单调增加, 所以 $F(b) \geq F(a) = 0$, 即

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2} \left[b \int_0^b f(x)dx - a \int_0^a f(x)dx \right].$$

(10) 证 令 $F(x) = \left[\int_0^x f(t)dt \right]^2 - \int_0^x f^3(t)dt, x \in [0, 1]$, 则

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= 2 \int_0^x f(t)dt \cdot f(x) - f^3(x) \\
 &= f(x) \left[2 \int_0^x f(t)dt - f^2(x) \right].
 \end{aligned}$$

由 $f'(x) > 0$, 知 $f(x) > f(0) = 0$. 再令

$$g(x) = 2 \int_0^x f(t)dt - f^2(x),$$

$$g'(x) = 2f(x) - 2f(x) \cdot f'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0,$$

可知 $g(x)$ 单调增加, 则 $g(x) > g(0) = 0, F'(x) > 0$, 即 $F(x)$ 单调增加, 故

$$0 < F(x) < F(1) = \left[\int_0^1 f(x)dx \right]^2 - \int_0^1 f^3(x)dx,$$

所证不等式成立.

(11) 证 由拉格朗日中值定理, 得

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a),$$

故

$$|f(x)| = |(x - a)f'(\xi)| \leq (x - a) \max |f'(x)|,$$

所以

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq \max |f'(x)| \int_a^b (x - a)dx = \frac{1}{2}(b - a)^2 \cdot M,$$

即

$$\frac{2}{(b - a)^2} \int_a^b |f(x)|dx \leq M.$$

(12) 证 利用泰勒公式将 $f(x)$ 在 $x_0 = \frac{a}{2}$ 处展开, 得

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \frac{a}{2} \text{ 之间}) \\
 &\geq f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right),
 \end{aligned}$$

对两边同时积分, 得

$$\begin{aligned}
 \int_0^a f(x)dx &\geq \int_0^a \left[f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) \right] dx \\
 &= \left[f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot x + \frac{1}{2}f'\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right] \Big|_0^a = af\left(\frac{a}{2}\right).
 \end{aligned}$$

(13) 证法1 利用泰勒公式, 令 $x_0 = \frac{a+b}{2}$, 只要证

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a)f(x_0) = \int_a^b [f(x) - f(x_0)] dx \geq 0.$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 - f(x_0) \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \geq f'(x_0)(x-x_0), \end{aligned}$$

积分,得

$$\int_a^b [f(x) - f(x_0)] dx \geq f'(x_0) \int_a^b (x-x_0) dx = 0,$$

即

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(x_0) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

证法2 利用单调性,令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt - (x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)$. 由 $f''(x) > 0$, 知 $f'(x)$ 单调增加.

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{x-a}{2} \cdot f'\left(\frac{a+x}{2}\right) \\ &\stackrel{\text{拉格朗日}}{\underset{\text{中值定理}}{=}} \frac{x-a}{2} \cdot f'(\xi) - \frac{x-a}{2} \cdot f'\left(\frac{a+x}{2}\right) \\ &= \frac{x-a}{2} \left[f'(\xi) - f'\left(\frac{a+x}{2}\right) \right] \geq 0 \quad \left(\frac{a+x}{2} < \xi < x \right), \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 单调增加, $F(b) \geq F(x) \geq F(a) = 0$, 即

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq 0,$$

故所证不等式成立.

$$\begin{aligned} (14) \text{ 解 } (I) \quad & \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}} \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{d(x-1)}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}} \\ &\stackrel{x-1=t}{=} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4 \sqrt{t^2-1}} \stackrel{t=\sec u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec u \cdot \tan u}{\sec^4 u \cdot \tan u} du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 u du = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(II) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$, $x=1, x=3$ 是奇点, 可先用判别法. 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2} < 1, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

所以原反常积分收敛.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} &= \int_1^3 \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} \stackrel{x-2=t}{=} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \arcsin t \Big|_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

注 也可将积分拆成两个积分的和,

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}},$$

再分别计算后两个积分.

(15) 解

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 4 \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dx \\
 &= 4 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 8.
 \end{aligned}$$

(16) 解

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi}] \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{e^{\pi} - 1} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\pi} - 1}.
 \end{aligned}$$

(17) 解 如图 6-17 所示, D 的两条边界方程分别为 $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ 和 $x = y$. 用微元法, $\forall [y, y + dy] \subset [a, b]$, 有

$$\begin{aligned}
 dV &= \{\pi[2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})]^2 - \pi(2 - y)^2\} dy \\
 &= 2\pi[\sqrt{1 - y^2} - (1 - y)^2] dy,
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 2\pi[\sqrt{1 - y^2} - (1 - y)^2] dy \\
 &= 2\pi \left[\frac{y}{2} \sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y + \frac{(1 - y)^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

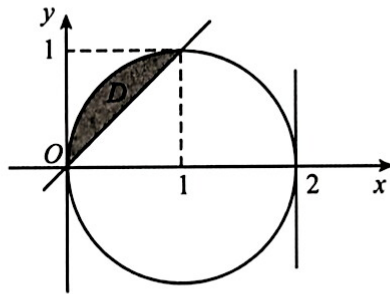


图 6-17

(18) 解 $dV = [\pi(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - \pi(b - \sqrt{a^2 - x^2})^2] dx$, 故

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^a 4\pi b \sqrt{a^2 - x^2} dx \\
 &= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b.
 \end{aligned}$$

(19) 解 当 $x \geq 0$ 时, 由 $\begin{cases} y = ax^2, \\ y = 1 - x^2, \end{cases}$ 解得 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}, y = \frac{a}{1+a}$.

直线 OA 的方程为 $y = \frac{ax}{\sqrt{1+a}}$, 故

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \left(\frac{a^2 x^2}{1+a} - a^2 x^4 \right) dx = \frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{\frac{5}{2}}}, \\
 \frac{dV}{da} &= \frac{\pi(4a - a^2)}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}} = 0 \quad (a > 0),
 \end{aligned}$$

得驻点 $a = 4$, 最大体积 $V = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{16}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

(20) 解 (I) $V = 2 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi f^2(y) dy = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-y^2) dy = \frac{9\pi}{4}.$

(II) 用微元法.

$$\begin{aligned} dW &= \rho g \pi f^2(y)(2-y) dy \\ &= \begin{cases} \rho g \pi (1-y^2)(2-y) dy, & -1 \leq y \leq \frac{1}{2}, \\ \rho g \pi (2y-y^2)(2-y) dy, & \frac{1}{2} \leq y \leq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} W &= \pi \rho g \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-y^2)(2-y) dy + \pi \rho g \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y-y^2)(2-y) dy \\ &= \frac{27}{8} \pi \rho g. \end{aligned}$$

(21) (I) 证
$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt \\ &= \int_{-a}^x (x-t) f(t) dt + \int_x^a (t-x) f(t) dt \\ &= x \int_{-a}^x f(t) dt - \int_{-a}^x t f(t) dt + \int_x^a t f(t) dt - x \int_x^a f(t) dt \\ &= x \int_{-a}^x f(t) dt - \int_{-a}^x t f(t) dt - \int_x^a t f(t) dt + x \int_x^a f(t) dt, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{-a}^x f(t) dt + \int_x^a f(t) dt, \\ g''(x) &= f(x) + f(x) = 2f(x) > 0, \end{aligned}$$

故 $g(x)$ 是凹函数.

(II) 解 由于 $f(-t) = f(t)$, 所以

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t) dt &\stackrel{t=-u}{=} \int_{-a}^{-x} f(-u) (-du) \\ &= \int_{-x}^{-a} f(-u) du = \int_{-x}^{-a} f(u) du = \int_{-x}^{-a} f(t) dt, \end{aligned}$$

故

$$g'(x) = \int_{-a}^x f(t) dt + \int_{-x}^{-a} f(t) dt = \int_{-x}^x f(t) dt.$$

由 $f(t) > 0$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = -x$, 即 $x = 0$ (唯一驻点). 又由 $g''(x) > 0$ 知 $g''(0) > 0$, 故 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的极小值点, 也是其最小值点, 且最小值为

$$g(0) = \int_{-a}^a |t| f(t) dt = 2 \int_0^a t f(t) dt.$$

(III) 解 依题设, 有

$$2 \int_0^a t f(t) dt = f(a) - a^2 - 1. \quad ①$$

两边同时对 a 求导, 得

$$2af(a) = f'(a) - 2a,$$

方程为可分离变量微分方程, 故

$$\int \frac{d[f(a)]}{f(a)+1} = \int 2a da,$$

$$\ln[1+f(a)] = a^2 + c. \quad ②$$

由式 ① 知, $f(0) = 1$. 代入式 ②, 得 $c = \ln 2$. 于是

$$f(a) + 1 = e^{a^2 + \ln 2} = 2e^{a^2},$$

故

$$f(t) = 2e^{t^2} - 1.$$

第七章 微积分在经济学中的应用

(仅数学三要求)

考试要求

1. 了解边际与弹性的概念.
2. 了解差分与差分方程及其通解与特解等概念.
3. 了解一阶常系数线性差分方程的求解方法.
4. 会用微分方程求解简单的经济应用问题.

内容与方法提要

一、经济学中常用的函数与概念

1. 增长函数

- (1) 简单增长函数: $f(t) = a + bt$, 其中 a, b 为常数, t 表示时间.
- (2) 复合增长函数: $f(t) = A(1+r)^t$. 如按年复利计算, r 为年利率, A 为现值, 则 t 年末的本利之和为 $f(t) = A(1+r)^t$.
- (3) 指数型增长函数: $f(t) = Ae^{rt}$, 其中 A 为现值, 按年复利计算, 则 t 年末的本利之和 $f(t) = Ae^{rt}$.

2. 需求函数

$Q = f(P)$, 其中 Q 为需求量, P 为价格. 一般地, 需求函数是单调减少的.

3. 供给函数

$Q = \varphi(P)$, 其中 Q 为供给量, P 为价格.

4. 成本函数

(1) 总成本函数: $C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)$, 其中 C 为总成本, C_1 为固定成本, C_2 为可变成本, Q 为产量.

(2) 平均成本函数: $\bar{C} = \bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$, 即总成本除以产量.

5. 收益函数

$R = R(Q) = QP$, 其中 Q 为销售量, P 为价格, R 为总收益.

6. 利润函数

$L(Q) = R(Q) - C(Q)$, 其中 $R(Q)$ 为总收益, $C(Q)$ 为总成本.

7. 生产函数

$Q = AL^\alpha K^\beta$, 其中 L 为劳动投入量, K 为资金投入量, L 与 K 也称为投入两要素, Q 为产出量, A, α, β 为参数.

二、边际与弹性

1. 边际成本

设总成本函数为 $C = C(Q)$, 则称 $C'(Q)$ 为边际成本函数. 当产量 $Q = Q_0$ 时, $C'(Q_0)$ 表示在 $Q = Q_0$ 处, 当 Q 变化一个单位时, 总成本 $C(Q)$ 变化 $|C'(Q_0)|$ 个单位.

2. 边际收益

设总收益函数为 $R = R(Q)$, 则称 $R'(Q)$ 为边际收益函数. 当销售量为 $Q = Q_0$ 时, $R'(Q_0)$ 表示在 $Q = Q_0$ 处, 当销售量 Q 变化一个单位时, 总收益变化 $|R'(Q_0)|$ 个单位.

3. 边际利润

设总利润函数为 $L = L(Q)$, 则称 $L'(Q)$ 为边际利润函数. 当销售量 $Q = Q_0$ 时, $L'(Q_0)$ 表示在 $Q =$

Q_0 处,当销售量 Q 变化一个单位时,利润变化 $|L'(Q_0)|$ 个单位.

4. 弹性函数

设 $y = f(x)$ 可导,称

$$\eta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

为 $y = f(x)$ 的弹性函数. 当 $x = x_0$ 时, $\eta \Big|_{x=x_0} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的弹性,其含义为:在 x_0 处,当自变量变化 1% 时,因变量 y 变化 $\eta\%$.

说明 ① 弹性在经济学中表示因变量对自变量变化的灵敏度.

② 记 $\eta = \frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$, 则 $\eta = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$, 即弹性 η 表示 y 的相对变化率是 x 的相对变化率的倍数. 例如,

$\frac{Ey}{Ex} = 1.2$, 表示当 x 增长 1% 时, y 增长 1.2%.

③ 当 $\frac{Ey}{Ex} > 1$ 时, 表示该商品是有弹性的; 当 $\frac{Ey}{Ex} < 1$ 时, 表示该商品是刚性的. 例如, 粮食等生活必需品是刚性的.

5. 需求弹性

设需求函数 $Q = f(P)$, $f(P)$ 为单调减少函数, 故需求弹性为

$$E_d = \frac{-P}{f(P)} f'(P).$$

由 $P = P_0, Q = Q_0$ 为正数知, $E_d \Big|_{P=P_0} = -\frac{P_0}{f(P_0)} f'(P_0) > 0$, 其含义为: 当价格为 P_0 时, 若提价(或降价)1%, 则需求量将减少(增加) $E_d\%$.

说明 只有当规定需求弹性大于 0 时, 才有 $E_d = \frac{-P}{f(P)} f'(P)$. 在经济学中, 需求弹性表示当商品价格变化时, 需求量变化的强弱.

6. 供给弹性

设供给函数 $Q = \varphi(P)$, 则称

$$E_s = \frac{P}{\varphi(P)} \varphi'(P)$$

为供给弹性. 由于供给函数为单调增加函数, 即 $\varphi'(P) > 0$, 故 $E_s > 0$. 其含义为: 当价格 $P = P_0$ 时, 若提价(降价)1%, 则供给量增长(减少) $E_s\%$.

三、现值与利息

1. 分期复利计息公式

设 A_0 为开始存入银行的本金, r 为年利率, 利息按年计算, n 年末的本利之和为

$$A_n = A_0(1+r)^n.$$

若已知 n 年末的本利之和为 A_n , 则现值为 $A_0 = A_n(1+r)^{-n}$.

2. 连续复利计息公式

设 A_0 为开始存入银行的本金, r 为连续复利年利率, n 年末的本利之和为

$$A_n = A_0 e^{nr}.$$

若已知 n 年末的本利之和为 A_n , 则现值为 $A_0 = A_n e^{-nr}$.

说明 分期复利是指利息一年支付一次, 连续复利是指利息一年支付 k 次, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 极限为 $A_0 e^{nr}$.

例如 设银行存款的年利率为 $r = 0.05$, 并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元, 实现第一年提取 19 万元, 第二年提取 28 万元, $\dots$, 第 n 年提取 $(10 + 9n)$ 万元, 并能按此规律一直提取下去, 问 A 至少应为多少万元?

解 由已知, 按年复利计算, 记 A_n 为用于第 n 年提取 $(10 + 9n)$ 万元的贴现值, 则 $A_n = \frac{10 + 9n}{(1 + r)^n}$, 故

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + 9n}{(1 + r)^n} = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + r)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{(1 + r)^n} \\ &= 200 + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1 + r)^n}. \end{aligned}$$

这里等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + r)^n} = \frac{\frac{1}{1 + r}}{1 - \frac{1}{1 + r}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{0.05} = 20$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, x \in (-1, 1)$, 则

$$S(x) = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1 - x} \right)' = \frac{x}{(1 - x)^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

故 $S\left(\frac{1}{1 + r}\right) = S\left(\frac{1}{1.05}\right) = 420$ 万元, $A = 200 + 9 \times 420 = 3980$ (万元), 即至少存入 3980 万元.

注 若本题条件改为按连续复利计算, 则第 n 年提取 $(10 + 9n)$ 万元的贴现值为 $(10 + 9n)e^{-nr}$, 故

$$\begin{aligned} A &= 19e^{-0.05} + 28e^{-0.05 \times 2} + \dots + (10 + 9n)e^{-0.05n} + \dots \\ &= 10 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-0.05n} + \sum_{n=1}^{\infty} 9ne^{-0.05n} = 10 \cdot \frac{e^{-0.05}}{1 - e^{-0.05}} + \sum_{n=1}^{\infty} 9n(e^{-0.05})^n. \end{aligned}$$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 9nx^{n-1}$, 则

$$\int_0^x S(t) dt = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1} dt = 9 \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{9x}{1 - x}, \quad |x| < 1,$$

求导, 得 $S(x) = 9 \left(\frac{x}{1 - x} \right)' = \frac{9}{(1 - x)^2}$, 故

$$\begin{aligned} A &= 10 \cdot \frac{e^{-0.05}}{1 - e^{-0.05}} + e^{-0.05} \sum_{n=1}^{\infty} 9n(e^{-0.05})^{n-1} \\ &= 10 \cdot \frac{e^{-0.05}}{1 - e^{-0.05}} + e^{-0.05} \frac{9}{(1 - e^{-0.05})^2} \\ &= \frac{19e^{-0.05} - 10e^{-0.1}}{(1 - e^{-0.05})^2} \approx 3794.29, \end{aligned}$$

由此可见, A 至少应为 3795 万元, 比按年复利计算要少.

四、差分方程

1. 差分

设 $y_t = f(t)$ 为 t 的函数, 称 $\Delta y_t = f(t + 1) - f(t)$ 为 $f(t)$ 的一阶差分, 称

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_t &\stackrel{\text{记}}{=} \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t \\ &= (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) \\ &= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t \end{aligned}$$

为 $f(x)$ 的二阶差分.

2. 差分方程

含有未知函数差分的方程称为差分方程.

3. 一阶常系数线性差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = f(t) \quad [a \neq 0, f(t) \text{ 不恒为 } 0] \quad (1)$$

称为非齐次差分方程. 当 $f(t) = 0$ 时,

$$y_{t+1} + ay_t = 0 \quad (2)$$

称为齐次差分方程.

$r + a = 0$ 称为方程 (2) 的特征方程, $r = -a$ 为其特征根, $y_t = Cr^t = C(-a)^t$ (C 为常数) 称为方程 (2) 的通解.

方程 (1) 的通解为 $y_t = Y_t + y_t^*$, 其中 Y_t 为方程 (2) 的通解, y_t^* 为方程 (1) 的一个特解.

4. 非齐次差分方程的特解.

(1) 当 $f(t) = P_m(t)$ 时, 其中 $P_m(t)$ 为 t 的 m 次多项式时, 令特解 $y_t^* = t^k Q_m(t)$, 其中 $Q_m(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m$, $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 待定.

① 当 1 不是特征根时, 即 $-a \neq 1$, 取 $k = 0$.

② 当 1 是特征根时, 即 $-a = 1$, 取 $k = 1$.

(2) 当 $f(t) = P_m(t)b^t$ 时, 令特解 $y_t^* = t^k Q_m(t)b^t$, $Q_m(t)$ 同 (1).

① 当 b 不是特征根时, 即 $b \neq -a$, 取 $k = 0$.

② 当 b 是特征根时, 即 $b = -a$, 取 $k = 1$.

(3) 当 $f(t) = b_1 \cos wt + b_2 \sin wt$, 其中 b_1, b_2 不同时为 0, $w > 0$ 时, 令特解 $y_t^* = t^k (B_1 \cos wt + B_2 \sin wt)$, B_1, B_2 待定.

① 当 e^{iw} 不是特征根时, 即 $e^{iw} \neq -a$, 或 $\Delta = (a + \cos w)^2 + \sin^2 w \neq 0$, 取 $k = 0$.

② 当 e^{iw} 是特征根时, 即 $\Delta = 0$, 取 $k = 1$.

说明 $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} w = 2n\pi, \\ a = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} w = (2n+1)\pi, \\ a = 1 \end{cases} \quad (n \text{ 为正整数}).$

注 当 $f(t) = b$ (b 为常数) 时, 则

$$y_{t+1} = -ay_t + b,$$

分别以 $t = 0, 1, 2, \cdots$ 代入上式, 得

$$y_1 = (-a)y_0 + b,$$

$$y_2 = (-a)y_1 + b = (-a)^2 y_0 + b[1 + (-a)],$$

$$y_3 = (-a)y_2 + b = (-a)^3 y_0 + b[1 + (-a) + (-a)^2],$$

$\vdots$

$$y_t = (-a)^t y_0 + b[1 + (-a) + (-a)^2 + \cdots + (-a)^{t-1}]. \quad (1)$$

若 $-a \neq 1$, 则由式 (1) 及等比数列求和公式, 得

$$y_t = (-a)^t y_0 + b \frac{1 - (-a)^t}{1 + a} \quad (t = 0, 1, 2, \cdots),$$

即

$$y_t = (-a)^t \left(y_0 - \frac{b}{1+a} \right) + \frac{b}{1+a} = C \cdot (-a)^t + \frac{b}{1+a}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots,$$

其中 $C = y_0 - \frac{b}{1+a}$ 为任意常数.

若 $-a = 1$, 由式 (1) 得, $y_t = y_0 + bt = C + bt$ ($t = 0, 1, 2, \cdots$), $C = y_0$ 为任意常数, 故差分方程 $y_{t+1} + ay_t = b$ 的通解为

$$y_t = \begin{cases} C \cdot (-a)^t + \frac{b}{1+a}, & a \neq -1, \\ C + bt, & a = -1. \end{cases}$$

例如 求差分方程 $y_{t+1} - \frac{2}{3}y_t = \frac{1}{5}$ 的通解.

解

$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{5}, \quad \frac{b}{1+a} = \frac{3}{5},$$

由以上通解公式可知 $y_t = C \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{3}{5}$ (C 为任意常数).

典型例题分析

例 1 设生产函数 $Q = AL^\alpha K^\beta$, Q 为产出量, L 为劳动投入量, K 为资金投入量, A, α, β 为正参数, 则当 $Q = 1$ 时, K 关于 L 的弹性为_____.

解 当 $Q = 1$ 时,

$$1 = AL^\alpha K^\beta \quad (\text{视 } K \text{ 为 } L \text{ 的函数}),$$

两边同时对 L 求导, 得

$$0 = A\alpha L^{\alpha-1} K^\beta + A\beta L^\alpha K^{\beta-1} \cdot \frac{dK}{dL},$$

解得 $\frac{dK}{dL} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L}$, 故

$$\frac{EK}{EL} = \frac{L}{K} \cdot \frac{dK}{dL} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

例 2 设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中价格 $P \in (0, 20)$, Q 为需求量.

(1) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$);

(2) 证明: $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (R 表示收益), 并用弹性 E_d 说明当价格在何范围内时, 降价反而使收益增加.

解 (1) $E_d = \left| \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right| = \left| \frac{P}{100-5P} \cdot (-5) \right| = \frac{P}{20-P}, \quad P \in (0, 20).$

(2) 由 $R = PQ$, 得

$$\frac{dR}{dP} = Q + PQ' = Q \left(1 + \frac{P}{Q} Q' \right) = Q(1 - E_d).$$

由 $E_d = \frac{P}{20-P} = 1$, 得 $P = 10$.

当 $10 < P < 20$ 时, $E_d > 1$, 于是 $\frac{dR}{dP} < 0$. 故当 $10 < P < 20$ 时, 降价反而使收益增加.

注 当 $E_d = 1$ 时, 称需求是中性的; 当 $E_d > 1$ 时, 称需求是有弹性的; 当 $E_d < 1$ 时, 称需求是刚性的.

例 3 设某商品的最大需求量为 1 200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(P)$, 需求弹性 $\eta = \frac{P}{120-P} (\eta > 0)$, P 为单价(万元).

(1) 求需求函数的表达式;

(2) 求 $P = 100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

解 (1) 由弹性公式 $\eta = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$, 可知

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} = \frac{-P}{120-P} \Rightarrow -\frac{dQ}{Q} = \frac{dP}{120-P}$$

为可分离变量的微分方程, 故 $Q = C(P - 120)$.

由 $Q(0) = 1\,200$, 知 $C = -10$, 故需求函数

$$Q(P) = -10(P - 120) = 10 \cdot (120 - P) = 1\,200 - 10P.$$

(2) 收益函数为

$$R = QP = (1\,200 - 10P) \cdot P,$$

边际收益函数为

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{dR}{dP} \cdot \frac{dP}{dQ} = -\frac{1}{10}(1\,200 - 20P) = 2P - 120,$$

由此 $\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{P=100} = 80.$

经济意义:需求量增加一件,收益增长 80 万元.

例 4 为实现利润最大化,厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量, P 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性($\eta > 0$).

(1) 证明:定价模型为 $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}};$

(2) 若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1\,600 + Q^2$, 需求函数为 $Q = 40 - P$, 试求由(1)中定价模型确定的此商品价格.

解 (1) 由收益 $R = QP$, 可得边际收益为

$$MR = \frac{dR}{dQ} = P + Q \cdot \frac{dP}{dQ} = P \left(1 - \frac{1}{\eta} \right),$$

要使利润最大, 应有 $MR = MC$, 即

$$P \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) = MC,$$

所以定价模型为 $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}.$

(2) 由已知得

$$\begin{aligned} MC &= \frac{dC}{dQ} = 2Q = 2(40 - P), \\ \eta &= -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} = -\frac{P}{40 - P} \cdot (-1) = \frac{P}{40 - P}, \end{aligned}$$

从而

$$P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}} = \frac{2(40 - P)}{1 - \frac{40 - P}{P}} = \frac{P(40 - P)}{P - 20},$$

故 $P = 30$, 此商品价格为 $P = 30$.

例 5 求差分方程 $y_{t+1} - y_t = t \cdot 2^t$ 的通解.

解 该方程属于 $f(t) = P_m(t)b^t$ 型, 且 $m = 1, b = 2$.

因特征根为 $r = 1$, 所以对应的齐次差分方程的通解为 $Y_t = C \cdot 1^t = C$. 又由于 $b = 2$ 不是特征根, 故取 $k = 0$. 令特解为 $y_t^* = (a_0 t + a_1)2^t$, 将其代入方程, 有

$$a_0 t + 2a_0 + a_1 = t,$$

解得 $a_0 = 1, a_1 = -2$, 故 $y_t^* = (t - 2)2^t$, 所以原方程的通解为

$$y_t = Y_t + y_t^* = C + (t - 2)2^t.$$

例 6 设 $y_t = t^2$ 是差分方程 $y_{t+1} + p y_t = b_1 t + b_2$ 的解, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}, b_1 = \underline{\hspace{2cm}}, b_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 将 $y_t = t^2$ 代入方程, 得

$$(1+t)^2 + p t^2 = t^2 + 2t + 1 + p t^2 = b_1 t + b_2,$$

比较系数, 得 $p = -1, b_1 = 2, b_2 = 1$.

例 7 求差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = \sin t$ 的通解.

解 由已知,特征根 $r = 2$,则对应的齐次差分方程的通解为 $Y_t = C \cdot 2^t$.

又 $a = -2, w = 1, \Delta = (a + \cos w)^2 + \sin^2 w \neq 0$,故取 $k = 0$,令非齐次差分方程的特解为

$$y_t^* = A \cos t + B \sin t.$$

代入原方程,得

$$A \cos(t+1) + B \sin(t+1) - 2A \cos t - 2B \sin t = \sin t,$$

即

$$A(\cos t \cos 1 - \sin t \sin 1) + B(\sin t \cos 1 + \cos t \sin 1) - 2A \cos t - 2B \sin t = \sin t.$$

比较两端 $\cos t, \sin t$ 项的系数,得

$$\begin{cases} (\cos 1 - 2)A + B \sin 1 = 0, \\ -A \sin 1 + B(\cos 1 - 2) = 1. \end{cases}$$

解得 $A = \frac{-\sin 1}{5 - 4 \cos 1}, B = \frac{\cos 1 - 2}{5 - 4 \cos 1}$,故通解为

$$y_t = C \cdot 2^t + \frac{1}{5 - 4 \cos 1} [-\sin 1 \cos t + (\cos 1 - 2) \sin t].$$

习题演练

解答题

(1) 设某产品在日产量为 x (件) 时,其总成本函数为 $C(x) = 100 + 18x - 40\sqrt{x}$ (百元),求使平均成本为最小的日产量.

(2) 设某种商品的社会需求量 $Q = Q(P)$ (P 表示价格),其弹性 $E_d = \frac{2P^2}{256 - P^2} (E_d > 0)$,当 $P = 10$ 时, $Q = 156$,一个工厂生产这种商品,其日总成本函数 $C(Q) = 4Q + 2000$,求该厂日产量 Q 为多少时,总利润最大.

(3) 某商品的需求量 $Q = Q(P)$,需求对价格的弹性 $\eta = \frac{2P^2}{192 - P^2}$,若 R 为总收益函数,证明: $\frac{dR}{dP} = Q(1 - \eta)$.

(4) 设某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $P \ln 3$,若商品的市场最大需求量为 1 500 件,求需求函数.

(5) 设某产品的需求函数 $Q = Q(P)$,其对价格 P 的弹性 $\xi_P = 0.2$,当需求量为 10 000 件时,价格增加 1 元,问此时会使产品的收益增加多少元?

(6) 设某酒厂有一批新酿好酒,若现在 ($t = 0$) 出售,总收入为 R_0 ,若窖陈起来,按陈酒价格出售, t 年末总收入为 $R = R_0 e^{\frac{2}{5}rt}$,现设银行年利率为 r ,以连续复利计算,求窖陈多少年售出可使总收入现值最大,并求 $r = 0.06$ 时, t 的值.

(7) 设某商品需求函数为 $Q = 100 - 5P$.

(I) 当 $P = 3$ 时,问涨价会使销售收入增加还是减少? 若价格上涨幅度为 8.5%,则对销售收入的影响幅度为多少?

(II) 当 $P = 12$ 时,问涨价会使销售收入增加还是减少? 若价格上涨幅度为 5%,则对销售收入影响的幅度为多少?

(8) 求差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解.

习题演练解答

解答题

(1) **解** 平均成本为

$$\bar{C}(x) = \frac{100 + 18x - 40\sqrt{x}}{x} = \frac{100}{x} + 18 - \frac{40}{\sqrt{x}}.$$

由 $\frac{d\bar{C}(x)}{dx} = \frac{-100}{x^2} + \frac{20}{x\sqrt{x}} = 0$, 得 $x = 25$. 又由

$$\left. \frac{d^2\bar{C}(x)}{dx^2} \right|_{x=25} = \frac{2}{625} > 0,$$

知当日产量为 $x = 25$ (件) 时, 平均成本为最小.

(2) 解 由 $E_d = -Q' \frac{P}{Q} = \frac{2P^2}{256 - P^2}$, 得

$$Q' + \frac{2PQ}{256 - P^2} = 0,$$

解一阶线性微分方程, 得

$$Q = C \cdot e^{-\int \frac{2P}{256 - P^2} dP} = C(256 - P^2).$$

又 $P = 10, Q = 156$, 得 $C = 1$, 故

$$Q = 256 - P^2.$$

利润为

$$\begin{aligned} L(P) &= R(Q) - C(Q) = (256 - P^2)P - 4(256 - P^2) - 2\,000 \\ &= -P^3 + 4P^2 + 256P - 4 \times 256 - 2\,000, \end{aligned}$$

令 $L'(P) = -3P^2 + 8P + 256 = 0$, 得 $P = \frac{32}{3} \approx 10.67$ (负根舍去), 且

$$L''(P) = -6P + 8 \Big|_{P=10.67} < 0,$$

故当 $P \approx 10.67$ 时, 利润最大, 此时 $Q = 256 - P^2 \approx 142.2$.

(3) 证 $R = P \cdot Q = P \cdot Q(P), \quad \frac{dR}{dP} = Q + P \frac{dQ}{dP},$

而 $\eta = -\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$, 故 $\frac{dQ}{dP} = -\frac{\eta}{P}Q$, 即

$$\frac{dR}{dP} = Q + P \left(-\frac{\eta}{P}Q \right) = Q(1 - \eta).$$

(4) 解 需求对价格的弹性为 $\eta = -\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$, 为可分离变量方程.

$$\frac{dQ}{Q} = -(\ln 3)dP,$$

积分得 $Q = C \cdot e^{-(\ln 3)P}$. 又 $Q(0) = 1\,500$, 得 $C = 1\,500$, 于是需求函数为 $Q = 1\,500 \cdot 3^{-P}$.

(5) 解 由 $Q = Q(P)$ 单调减少, 故 $\frac{dQ}{dP} < 0$, $\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$ 为负值, 由 $\xi_P = 0.2$, 故

$$\xi_P = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}.$$

由 $R = P \cdot Q$, 两边同时对 P 求导, 得

$$\frac{dR}{dP} = Q + P \frac{dQ}{dP} = Q \left(1 + \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} \right),$$

故

$$dR = Q(1 - \xi_P) \cdot dP.$$

当 $Q = 10\,000, dP = 1$ 时, 产品收益增加

$$dR = 10\,000 \times (1 - 0.2) \times 1 = 8\,000 (\text{元}).$$

(6) 解 按连续复利公式, t 年末售出总收入 R 的现值为

$$A(t) = R e^{-rt},$$

而 $R = R_0 e^{\frac{2}{5}rt}$, 所以

$$A(t) = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{r}-rt},$$

$$\frac{dA}{dt} = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{r}-rt} \left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right) = 0,$$

解得 $t_0 = \frac{1}{25r^2}$, 且

$$\left. \frac{d^2 A}{dt^2} \right|_{t=t_0} = R_0 e^{\frac{1}{25r}} (-12.5r^3) < 0,$$

于是 $t_0 = \frac{1}{25r^2}$ 是唯一极大值点, 即最大值点, 故 $t = t_0 = \frac{1}{25r^2}$ 年出售总收入现值最大. 当 $r = 0.06$ 时,

$$t = \frac{100}{9} \approx 11 (\text{年}).$$

(7) 解 (I) 需求对价格的弹性为

$$\eta_{QP} = -\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{P}{20-P} \quad (P \text{ 表示价格, } Q \text{ 表示需求}),$$

$$\eta_{QP} \Big|_{P=3} = \frac{3}{17} < 1,$$

故当 $P = 3$ 时, 涨价会使销售收入增加.

销售收入对价格的弹性为

$$\eta_{RP} = \frac{dR}{dP} \cdot \frac{P}{R} = \frac{20-2P}{20-P}, \quad \eta_{RP} \Big|_{P=3} = \frac{14}{17},$$

其中 R 表示收入, 故当 $P = 3$ 时, 涨价 8.5%, 对销售收入产生的影响为 $\frac{14}{17} \times 8.5\% = 7\%$, 即使销售收入增加 7%.

(II) 与 (I) 类似,

$$\eta_{QP} \Big|_{P=12} = \frac{3}{2} > 1,$$

即当 $P = 12$ 时, 涨价会使销售收入减少.

由于

$$\eta_{RP} \Big|_{P=12} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dR}{R} = \eta_{RP} \cdot \frac{dP}{P} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 5\% = -2.5\%,$$

故涨价 5%, 会使销售收入减少 2.5%.

注 ①

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dP} &= \frac{d(PQ)}{dP} = Q + P \frac{dQ}{dP} = Q \left(1 + \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} \right) \\ &= Q(1 - \eta_{QP}), \end{aligned}$$

当 $\eta_{QP} < 1$ 时, 有 $\frac{dR}{dP} > 0$, 即涨价会使销售收入增加; 反之, 当 $\eta_{QP} > 1$ 时, 有 $\frac{dR}{dP} < 0$, 即涨价会使销售收入减少.

② 当涨价相对幅度为 $\frac{dP}{P}$ 时, 销售收入所受影响相对幅度为

$$\frac{dR}{R} = \frac{P}{R} \cdot \frac{dR}{dP} \cdot \frac{dP}{P} = \eta_{RP} \cdot \frac{dP}{P}.$$

(8) 解 原差分方程对应的齐次方程的通解为

$$\bar{y}_t = C \cdot 2^t.$$

设非齐次方程的特解为

$$y_t^* = at \cdot 2^t,$$

将 y_t^* 代入原方程, 得 $2a = 1$, 即 $a = \frac{1}{2}$, 故通解为

$$y = C \cdot 2^t + t \cdot 2^{t-1}.$$

第八章 多元函数微分学

考试要求

1. 理解多元函数的概念, 理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念, 会求全微分, 了解全微分存在的必要条件和充分条件, 了解全微分形式的不变性.
4. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.
5. 了解隐函数存在定理, 会求多元隐函数的偏导数.
6. 理解多元函数极值和条件极值的概念, 掌握多元函数极值存在的必要条件, 了解二元函数极值存在的充分条件, 会求二元函数的极值, 会用拉格朗日乘数法求条件极值, 会求简单多元函数的最大值和最小值, 并会解决一些简单的应用问题.
7. (仅数学一要求) 理解方向导数与梯度的概念, 并掌握其计算方法.
8. (仅数学一要求) 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念, 会求它们的方程.
9. (仅数学一要求) 了解二元函数的二阶泰勒公式.

第一节 多元函数微分学的基本概念

内容与提要

一、多元函数的极限与连续性

1. 二重极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ 时, 都有}$$

$$|f(x, y) - A| < \epsilon.$$

说明 ① 记 $P_0(x_0, y_0)$, $\{(x, y) | 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$ 称为点 P_0 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(P_0, \delta)$.

② 二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在, 要求当 (x, y) 以任何方式趋于 (x_0, y_0) 时, $f(x, y)$ 都趋于同一个数.

③ 若当 (x, y) 沿两条不同路径趋于 (x_0, y_0) 时, $f(x, y)$ 趋于两个不同的值或有一个不存在, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在.

④ 二重极限有与一元函数极限类似的运算法则和性质. 如重要极限、夹逼准则等.

例如 (i) 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pi}} [1 + \sin(xy)]^{\frac{y}{x}}$.

解

$$\text{原式} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pi}} \left\{ [1 + \sin(xy)]^{\frac{1}{\sin(xy)}} \right\}^{\frac{y^2 \sin(xy)}{xy}} = e^{\pi^2}.$$

(ii) 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2}{x^4 + y^4}$.

解

因为 $0 \leq \frac{x^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{1}{x^2}$, 而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, 由夹逼准则, 得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2}{x^4 + y^4} = 0.$$

(iii) 证明: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在.

证 取 $y = kx, k \neq 0$. 因为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx \rightarrow 0}} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2} \quad (\text{与 } k \text{ 的取值有关}),$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在.

(iv) 证明: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

证 由于 $\left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1$, 且无穷小乘以有界量是无穷小, 故

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

2. 二元函数的连续性

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

有界闭区域 D 上连续的二元函数的性质:

(1) 有界性: 若 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上有界.

(2) 最值定理: 若 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上取得最大值和最小值.

(3) 介值定理: 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其最大值和最小值分别为 M 和 m , 则 $f(x, y)$ 在 D 上可取到介于 m 和 M 之间的任何值.

二、多元函数的偏导数

1. 一阶偏导数的定义

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

说明 ① 由偏导数的定义, 知偏导数的计算实际上是一元函数的导数的计算.

② 求偏导数的方法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{利用偏导数的定义.} \\ \text{利用公式、法则.} \end{array} \right.$

利用偏导数的定义可求下列情形下的偏导数:

(i) 分段函数.

(ii) 带绝对值符号的函数.

(iii) 抽象函数.

(iv) “不能代入”.

例如 讨论 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^4}}$ 在点 $(0, 0)$ 处的偏导数.

解

$$f'_x(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^4}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^4}}, \quad \text{①}$$

因为 $(0, 0)$ 不能代入式 ①, 故用偏导数的定义求.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{(\Delta x)^2}} - 1}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \quad (\text{极限不存在}), \\
 f'_y(0,0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{(\Delta y)^4}} - 1}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta y)^2}{\Delta y} = 0.
 \end{aligned}$$

2. 高阶偏导数的定义

设 $z = f(x, y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 仍是 x, y 的函数. 若 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 对 x, y 存在偏导数, 则

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}
 \end{aligned}$$

称为二阶偏导数.

二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数.

3. 二阶偏导数的性质

若 $f(x, y)$ 是有二阶连续的偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

三、多元函数的可微性

1. 可微的定义

若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量为

$$\begin{aligned}
 \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
 &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),
 \end{aligned}$$

其中, A, B 是与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的常数, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

2. 可微的必要条件

(1) 若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 反之不一定成立.

(2) 若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数存在, 反之不一定成立.

说明 ① 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

故 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$, 所以 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

② 若取 $\Delta y = 0$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{A\Delta x}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x} \right] = A,$$

即 $A = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}$, 同理可得 $B = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}$, 所以偏导数存在. 记 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, 称为函数 $z = f(x, y)$ 的全微分.

③ 可微的定义可以写成
$$\begin{cases} \Delta z = dz + o(\rho), \\ \Delta z - dz = o(\rho), \\ \frac{\Delta z - dz}{\rho} \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0). \end{cases}$$

3. 可微的充分条件

若 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数连续, 则 $f(x, y)$ 可微, 反之不一定成立.

4. 四个概念的关系 (见图 8-1)

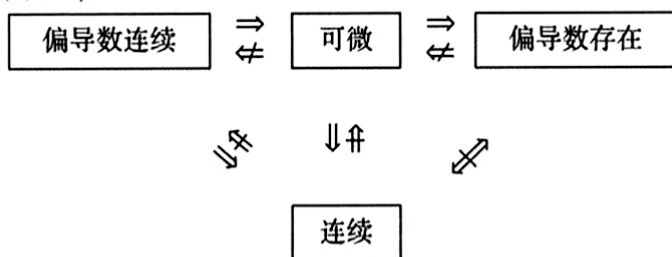


图 8-1

说明 ① 函数 $z = f(x, y)$ 连续 $\nRightarrow$ 偏导数存在.

例如 $z = |x| + |y|$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 但偏导数不存在.

事实上, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x| + |y|) = f(0, 0) = 0$, 所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续. 但

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

极限不存在, 因此偏导数不存在.

② $z = f(x, y)$ 的偏导数存在 $\nRightarrow f(x, y)$ 连续.

例如 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 的偏导数存在, 但 $f(x, y)$ 不连续.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0,$$

但 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续.

典型例题分析

例 1 设 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处().

A. 连续, 但偏导数不存在

B. 偏导数存在, 但不可微

C. 可微

D. 偏导数存在, 但不连续

解 因为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0, 0),$$

所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续. 又由于

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0,$$

故偏导数存在. 又

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sqrt{\left| \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right|}, \end{aligned}$$

极限不存在, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微, 选项 B 正确.

例 2 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的充分条件是().

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0, \lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$

解 选项 A 相当于 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续. 选项 B 相当于 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

对于选项 C, 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + 0^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 0,$$

即 $f'_x(0, 0) = 0$. 同理, $f'_y(0, 0) = 0$, 故

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0)] - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \end{aligned}$$

由可微的定义知, 选项 C 正确.

选项 D 相当于 $f'_x(x, 0)$ 在 $x = 0$ 处连续, $f'_y(0, y)$ 在 $y = 0$ 处连续.

注 偏导数连续, 则 $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x, y) = f'_x(0, 0), \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_y(x, y) = f'_y(0, 0). \end{cases}$

第二节 复合函数的偏导数和全微分

内容与提要

1. 复合函数的链式法则(见图 8-2)

设 $z = f(u, v)$, $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$ 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

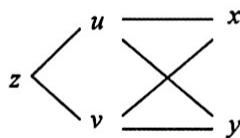


图 8-2

说明 求复合函数的二阶偏导数时, 注意 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ 是 u, v 的函数, 而 u 与 v 又是 x 与 y 的函数. 例如,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

2. 全微分

设 $z = f(u, v)$, $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$ 则

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\
 &= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.
 \end{aligned}$$

上式称为一阶全微分形式的不变性.

典型例题分析

题型一 复合函数的偏导数与全微分

例 1 设 $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)}$, $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x - y}{x^2 + y^2},$$

所以 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 0$. 又

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

所以 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 1$.

例 2 设 $u(x, y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中 φ 有二阶导数, ψ 有一阶导数, 证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

证 利用复合函数求导的链式法则, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x + y) \cdot 1 + \varphi'(x - y) \cdot 1 + \psi(x + y) \cdot 1 - \psi(x - y) \cdot 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x + y) \cdot 1 + \varphi'(x - y) \cdot (-1) + \psi(x + y) \cdot 1 - \psi(x - y) \cdot (-1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x + y) \cdot 1 + \varphi''(x - y) \cdot 1 + \psi'(x + y) \cdot 1 - \psi'(x - y) \cdot 1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x + y) \cdot 1 + \varphi''(x - y) \cdot 1 + \psi'(x + y) \cdot 1 + \psi'(x - y) \cdot (-1),$$

故 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

例 3 设 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, f 有二阶连续偏导数, 求 $du, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.

解
$$\begin{aligned}
 du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\
 &= f'_1 \cdot \frac{1}{y} \cdot dx + \left[f'_1 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f'_2 \cdot \frac{1}{z} \right] dy + f'_2 \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) \cdot dz \\
 &= \frac{1}{y} f'_1 dx + \left(-\frac{x}{y^2} f'_1 + \frac{1}{z} f'_2\right) dy - \frac{y}{z^2} f'_2 dz.
 \end{aligned}$$

由 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f'_1 + \frac{1}{z} f'_2$, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= -\frac{x}{y^2} \left[f''_{11} \cdot 0 + f''_{12} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) \right] + \left(-\frac{1}{z^2}\right) f'_2 + \frac{1}{z} \cdot \left[f''_{21} \cdot 0 + f''_{22} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) \right] \\ &= \frac{x}{yz^2} f''_{12} - \frac{1}{z^2} f'_2 - \frac{y}{z^3} f''_{22}.\end{aligned}$$

题型二 已知偏导数的等式,求函数 $f(x, y)$

例 4 求方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ 满足 $z(x, 0) = 1, z'_y(x, 0) = x$ 的解 $z = z(x, y)$.

解 等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, 两边同时对 y 积分得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int 2 dy + \varphi(x) = 2y + \varphi(x).$$

由 $z'_y(x, 0) = x$, 得 $x = 0 + \varphi(x)$, 故

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x. \quad ①$$

式 ① 两边再同时对 y 积分, 得

$$z = y^2 + xy + \varphi_1(x),$$

由 $z(x, 0) = 1$ 知, $1 = \varphi_1(x)$, 所以

$$z = z(x, y) = 1 + xy + y^2.$$

例 5 利用变换 $\xi = x + y, \eta = x - y$, 解方程 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 视 ξ, η 为中间变量, x, y 为自变量, 复合关系如图 8-3 所示, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot 1, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot (-1),\end{aligned}$$

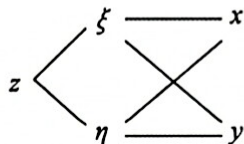


图 8-3

代入 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$, 得 $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$. 所以

$$z = \varphi(\xi) = \varphi(x + y) \quad (\varphi \text{ 为任意可微函数}).$$

例 6 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$, 可将方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 且 z 二阶偏导连续, 求常数 a 的值.

分析 视 u, v 为中间变量, x, y 为自变量. 求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, 然后代入原方程化简.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a - 2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

代入原方程, 化简得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

依题意,有 $\begin{cases} 6+a-a^2=0, \\ 10+5a \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a=3$.

例 7 设 $f(t)$ 有一阶连续导数, $f(1)=1$, $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$ ($x>0, y>0$), 求函数 z 的表达式.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}.$$

令 $\frac{y}{x} = t$, 则 $f'(t) - \frac{1}{t^2+t}f(t) = -\frac{1}{1+t}$, 解一阶线性微分方程得

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\int \frac{1}{t^2+t} dt} \left(-\int \frac{1}{t+1} \cdot e^{-\int \frac{1}{t^2+t} dt} dt + C \right) \\ &= \frac{t}{t+1} (-\ln t + C), \end{aligned}$$

由 $f(1)=1$, 得 $C=2$, 于是 $f(t) = \frac{t}{t+1} (-\ln t + 2)$, 所以

$$z = (x+y)f\left(\frac{y}{x}\right) = -y \ln \frac{y}{x} + 2y.$$

第三节 隐函数微分法

内容与方法提要

本节介绍隐函数存在定理, 并根据多元复合函数的求导法来计算隐函数的导数.

设 $F(x, y, z) = 0$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某个邻域内满足以下条件:

- (1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;
- (2) F'_x, F'_y, F'_z 连续;
- (3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某个邻域内能唯一确定一个隐函数 $z = z(x, y)$ 满足 $z_0 =$

$z(x_0, y_0)$, 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

说明 ① 方程 $F(x, y, z) = 0$, 两边同时对 x 求导, 得

$$F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

即 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$. 同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

② 若 $F(x, y, z) = 0$ 确定函数 $x = x(y, z)$, 则将条件(3) 改为 $F'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

③ 若 $F(x, y, z) = 0$ 确定函数 $y = y(x, z)$, 则将条件(3) 改为 $F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

典型例题分析

题型一 隐函数

例 1 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解法 1 令 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$F'_x = \frac{1}{z}, \quad F'_y = -\frac{y}{z} \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) = \frac{1}{y}, \quad F'_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x+z}{z^2},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

解法2 方程 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 两端同时对 x 求导, 其中 $z = z(x, y)$, 得

$$\frac{1 \cdot z - x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}$, 同理有 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$.

例2 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}$ 确定, 其中 F 可导, 且 $F' \neq -1$, 证明: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

证 令 $G(x, y, z) = F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}$, 则

$$G'_x = F' \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad G'_y = F' \cdot \frac{1}{y^2}, \quad G'_z = F' \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2},$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G'_x}{G'_z} = \frac{z^2 F'}{x^2(F' + 1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G'_y}{G'_z} = -\frac{z^2 F'}{y^2(F' + 1)},$$

所以 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

例3 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 确定, φ 有二阶导数且 $\varphi' \neq -1$.

(1) 求 dz .

(2) 记 $u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

解 (1) 因为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, 所以只要计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z),$$

两端同时对 x 求导, 得

$$2x - \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'}$.

利用方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 关于 x, y 具有轮换性 (x, y 位置互换, 方程不变), 知 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - \varphi'}{1 + \varphi'}$, 故

$$dz = \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'} dx + \frac{2y - \varphi'}{1 + \varphi'} dy.$$

(2) 由于 $u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{2}{1 + \varphi'}$, 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2}{(1 + \varphi')^2} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \varphi'' = \frac{-2(2x + 1)\varphi''}{(1 + \varphi')^3}.$$

注 $\varphi(x+y+z)$ 对 x 求导时要写成 φ' , 不能写成 φ'_x .

题型二 复合函数与隐函数的综合

例 4 设 $u = f(x, y, z)$, 而 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$, 其中 f, φ 有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

解 此题为复合函数与隐函数的综合题. 由已知条件, 有

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}, \\ \frac{dy}{dx} &= \cos x. \end{aligned} \quad ①$$

方程 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ 两端对 x 同时求导, 得

$$\varphi'_1 \cdot 2x + \varphi'_2 \cdot e^y \cdot \cos x + \varphi'_3 \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

解得

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -\frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + e^y \cos x \cdot \varphi'_2) \\ &= -\frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + e^{\sin x} \varphi'_2 \cos x), \end{aligned}$$

代入式 ①, 得

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + e^{\sin x} \varphi'_2 \cos x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos x - \frac{1}{\varphi'_3} \frac{\partial f}{\partial z} (2x\varphi'_1 + e^{\sin x} \varphi'_2 \cos x). \end{aligned}$$

例 5 设 $y = g(x, z)$, 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $f(x - z, xy) = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 将 $z = z(x, y)$ 代入 $y = g(x, z)$, 得

$$y = g[x, z(x, y)]. \quad ①$$

式 ① 两边对 x 同时求导, 得

$$\frac{dy}{dx} = g'_1 \cdot 1 + g'_2 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right). \quad ②$$

对 $f(x - z, xy) = 0$ 两端分别关于 x, y 求导, 得

$$\begin{cases} f'_1 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + f'_2 y = 0, \\ f'_1 \left(0 - \frac{\partial z}{\partial y} \right) + f'_2 x = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'_1 + f'_2 y}{f'_1}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'_2 x}{f'_1}. \end{cases}$$

将其代入式 ②, 得

$$\frac{dy}{dx} = g'_1 + g'_2 \left(\frac{f'_1 + f'_2 y}{f'_1} + \frac{f'_2 x}{f'_1} \cdot \frac{dy}{dx} \right),$$

整理, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'_1 g'_1 + g'_2 (f'_1 + f'_2 \cdot y)}{f'_1 - x f'_2 g'_2}.$$

题型三 方程组确定的隐函数

例 6 设由方程组 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 确定 $x=x(z), y=y(z)$, 求 $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$.

解 方程组两端同时对 z 求导, 得

$$\begin{cases} 1 \cdot \frac{dx}{dz} + 1 \cdot \frac{dy}{dz} + 1 = 0, \\ 2x \cdot \frac{dx}{dz} + 2y \cdot \frac{dy}{dz} + 2z = 0, \end{cases}$$

当 $y \neq x$ 时, 解得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}.$$

例 7 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续一阶偏导数, 且 $y = y(x), z = z(x)$ 分别由 $e^{xy} - xy = 2, e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 所确定, 求 $\frac{du}{dx}$.

解

$$\frac{du}{dx} = f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx} + f'_z \cdot \frac{dz}{dx}. \quad ①$$

方程 $e^{xy} - xy = 2$ 两端同时对 x 求导, 得

$$e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) - \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

解得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \quad ②$$

方程 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 两端同时对 x 求导, 得

$$e^x = \frac{\sin(x-z)}{x-z} \cdot \left(1 - \frac{dz}{dx} \right),$$

解得

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}. \quad ③$$

将式 ② 和式 ③ 代入式 ①, 得

$$\frac{du}{dx} = f'_x - \frac{y}{x} f'_y + \left[1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)} \right] \cdot f'_z.$$

第四节 极值与最值

内容与方法提要

一、极 值

1. 极值的定义

设 $z = f(x, y)$ 在 $\dot{U}(P_0)$ 内有定义, 其中 $P_0(x_0, y_0)$, 若对任意一点 $(x, y) \in \dot{U}(P_0), f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极大值, (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极大值点; 若对任意一点 $(x, y) \in \dot{U}(P_0), f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值, (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极小值点.

2. 求二元函数 $f(x, y)$ 极值的步骤

(1) 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases}$ 解得 (x_0, y_0) .

(2) 计算 $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

(3) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, $\begin{cases} A > 0, f(x_0, y_0) \text{ 为极小值,} \\ A < 0, f(x_0, y_0) \text{ 为极大值.} \end{cases}$

当 $AC - B^2 < 0$ 时, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处无法取得极值.

当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定 $f(x_0, y_0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值.

说明 ① $f(x, y)$ 可能取得极值的点有两种:

(i) 满足 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 的点 (x_0, y_0) ;

(ii) 偏导数不存在的点.

对于偏导数不存在的点, 用极值的定义判别.

例如 $z = f(x, y) = |x| + |y|$ 在点 $(0, 0)$ 处, $f'_x(0, 0)$ 与 $f'_y(0, 0)$ 均不存在.

当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时, 由 $f(x, y) > f(0, 0) = 0$, 知 $f(0, 0)$ 为极小值.

② 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 用极值的定义判别.

3. 条件极值的拉格朗日乘数法

求 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值.

(1) 令 $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z)$.

(2) 解方程组 $\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_z = 0, \\ F'_\lambda = 0, \end{cases}$ 得 $x = x_0, y = y_0, z = z_0$.

(3) 根据实际问题的含义或将 (x_0, y_0, z_0) 代入函数 $f(x, y, z)$ 来判定 $f(x_0, y_0, z_0)$ 是最大值还是最小值.

说明 ① 拉格朗日乘数法是求最值的必要条件.

② 二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值 $\nRightarrow$ 一元函数 $f(x, y_0)$ 与 $f(x_0, y)$ 分别在 x_0 和 y_0 处取得极值.

例如 $z = f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ 在点 $(0, 0)$ 处, $f(x, 0) = x^2$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, $f(0, y) = 2y^2$ 在 $y = 0$ 处取得极小值, 但点 $(0, 0)$ 不是 $z = f(x, y)$ 的极小值点, 因为

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0,$$

$$A = f''_{xx}(0, 0) = 2, \quad B = f''_{xy}(0, 0) = -3, \quad C = f''_{yy}(0, 0) = 4,$$

$$AC - B^2 = 8 - 9 = -1 < 0,$$

所以点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

③ 将条件极值转化为无条件极值.

若从条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 中容易解出 $z = z(x, y)$, 则将其代入到 $f(x, y, z)$ 中得 $f[x, y, z(x, y)]$, 将条件极值转化为无条件极值.

二、求 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最值的一般步骤

(1) 在 D 内, 求 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases}$ 得 (x_0, y_0) .

(2) 在 D 的边界上, 求 $f(x, y)$ 的最值.

(3) 比较大小: 比较 D 内可能的极值与 D 的边界上的最值的大小, 便可求出 $f(x, y)$ 在 D 上的最值.

典型例题分析

题型一 极值的定义

例 1 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + 1 - x \sin y - \cos^2 y} = A < 0,$$

讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否取得极值.

解 利用极值的定义讨论. 由于

$$x^2 + 1 - x \sin y - \cos^2 y = \left(x - \frac{1}{2} \sin y\right)^2 + \frac{3}{4} \sin^2 y \geq 0,$$

且当 $\begin{cases} x - \frac{1}{2} \sin y = 0, \\ \sin^2 y = 0, \end{cases}$ 即 $x = 0, y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时等号成立, 所以在点 $(0, 0)$ 的某个去心邻域

内, 有 $x^2 + 1 - x \sin y - \cos^2 y > 0$. 由极限的保号性知, 存在点 $(0, 0)$ 的某个邻域, 使得当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $f(x, y) - f(0, 0) < 0$, 即 $f(x, y) < f(0, 0)$, 从而 $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值.

题型二 函数的极值

例 2 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0, \\ f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0, \end{cases}$ 得 $x = 0, y = \frac{1}{e}$. 又由于

$$f''_{xx} = 2(2 + y^2), \quad f''_{xy} = 4xy, \quad f''_{yy} = 2x^2 + \frac{1}{y},$$

则

$$A = f''_{xx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right), \quad B = f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 0, \quad C = f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = e,$$

于是

$$AC - B^2 = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) \cdot e > 0, \quad A > 0,$$

所以 $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ 为极小值.

例 3 求二元函数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0, \\ f'_y(x, y) = 4y^3 - 4y + 4x = 0, \end{cases}$ 可得三个驻点 $(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 易求

$$f''_{xx} = 12x^2 - 4, \quad f''_{xy} = 4, \quad f''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

对点 $(0, 0)$, 有 $A = -4, B = 4, C = -4, AC - B^2 = 0$, 利用极值的充分条件无法判别, 故用极值的定义, 在点 $(0, 0)$ 附近考虑.

在直线 $y = x$ 上, $f(x, x) = 2x^4$, 在 $x = 0$ 处取得极小值; 在直线 $y = -x$ 上, $f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2$ 在 $x = 0$ 处取得极大值, 所以点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

对点 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 有 $A = 20 > 0, B = 4, C = 20, AC - B^2 = 384 > 0$, 故 $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$ 是极小值.

对点 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 有 $A = 20 > 0, B = 4, C = 20, AC - B^2 = 384 > 0$, 故 $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$ 也是极小值.

例 4 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

解 本题是隐函数的极值问题. 令 $F(x, y, z) = (x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1)$, 则 $F'_z = x^2 + y^2 + \frac{1}{z} > 0$, 故 $z(x, y)$ 无偏导数不存在的点.

方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 两边同时对 x, y 求偏导数, 得

$$\begin{cases} 2xz + (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2yz + (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} + 2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得 $\begin{cases} xz + 1 = 0, \\ yz + 1 = 0, \end{cases}$ 故 $x = y = -\frac{1}{z}$. 将其代入 $(x^2 + y^2)z + \ln z +$

$2(x + y + 1) = 0$, 得 $\ln z - \frac{2}{z} + 2 = 0$, 解得 $z = 1$, 故 $x = y = -1$.

再对式 (1) 和式 (2) 两边分别关于 x, y 求偏导数, 得

$$\begin{cases} 2z + 4x \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \\ 2y \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \frac{\partial z}{\partial y} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \\ 2z + 4y \frac{\partial z}{\partial y} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \end{cases}$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0, x = y = -1, z = 1$ 代入该方程组, 得

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2}{3},$$

又由 $AC - B^2 > 0, A < 0$, 知 $(-1, -1)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 极大值为 $z(-1, -1) = 1$.

题型三 最值问题

例 5 求 $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - x^3$ 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 16$ 上的最大值和最小值.

解 (1) 在 D 内部, $x^2 + y^2 < 16$, 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 6x - 3x^2 = 0, \\ f'_y(x, y) = 6y = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (0, 0), (x, y) = (2, 0)$.

(2) 在 D 的边界上: $x^2 + y^2 = 16$, 用拉格朗日乘数法.

令 $F(x, y, \lambda) = 3x^2 + 3y^2 - x^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 16)$, 则

$$\begin{cases} F'_x = 6x - 3x^2 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 6y + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 16 = 0, \end{cases}$$

解得 $(x, y) = (4, 0), (x, y) = (-4, 0), (x, y) = (0, 4), (x, y) = (0, -4)$.

比较函数值:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(2, 0) = 4, \quad f(4, 0) = -16, \quad f(-4, 0) = 112, \quad f(0, \pm 4) = 48,$$

故最小值为 $f(4, 0) = -16$, 最大值为 $f(-4, 0) = 112$.

注 在区域 D 的边界 $x^2 + y^2 = 16$ 上, 有 $y^2 = 16 - x^2$, 代入 $f(x, y)$ 中有 $f(x, \pm \sqrt{16 - x^2}) = 3x^2 + 3(16 - x^2) - x^3$, 化为一元函数在 $x \in [-4, 4]$ 上的最值问题.

例 6 已知 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2x dx - 2y dy$, 且 $f(1, 1) = 2$, 求 $f(x, y)$ 在 $D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$

上的最大值和最小值.

解 由全微分, 可先求出 $f(x, y)$, 再求 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最值.

由已知, 可得 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, 从而

$$f(x, y) = \int 2x dx + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y).$$

又由于 $\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y) = -2y$, 得 $\varphi(y) = -y^2 + C$, 故

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + C.$$

由 $f(1, 1) = 2$, 知 $C = 2$, 所以 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

在 D 内, $x^2 + \frac{y^2}{4} < 1$, 由 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$, 得 $x = 0, y = 0$.

在 D 的边界上, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 解得 $y^2 = 4 - 4x^2$, 所以

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, \pm \sqrt{4 - 4x^2}) \\ &= x^2 - (4 - 4x^2) + 2 = 5x^2 - 2, \quad x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

易知, 当 $x = 0$, 即 $y = \pm 2$ 时, $5x^2 - 2$ 取得最小值; 当 $x = \pm 1$, 即 $y = 0$ 时, $5x^2 - 2$ 取得最大值. 比较大小: $f(0, 0) = 2, f(0, \pm 2) = -2, f(\pm 1, 0) = 3$, 故 $f(x, y)$ 的最大值为 $f(\pm 1, 0) = 3$, 最小值为 $f(0, \pm 2) = -2$.

第五节 方向导数与梯度 (仅数学一要求)

内容与方法提要

一、方向导数 —— 沿指定方向的变化率

1. 定义

设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿 l 方向的变化率为

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} \quad \text{记} \quad \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{P_0}.$$

如图 8-4 所示, 其中 $\rho = |P_0P|$.

2. 计算

设 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿 $l = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{P_0} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= f'_x(x_0, y_0)\cos \alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos \beta. \end{aligned}$$

三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿 $l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{P_0} = f'_x \Big|_{P_0} \cos \alpha + f'_y \Big|_{P_0} \cos \beta + f'_z \Big|_{P_0} \cos \gamma.$$

例如 求 $z = xy^2 + ye^{2x}$ 在 $P_0(0, 1)$ 处沿从 $P_0(0, 1)$ 到 $P(-1, 2)$ 的方向导数.

解 方向 l 即向量 $\overrightarrow{P_0P} = (-1, 1)$ 的方向, 方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta, \\ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0} &= (y^2 + 2ye^{2x}) \Big|_{(0, 1)} = 3, \end{aligned}$$

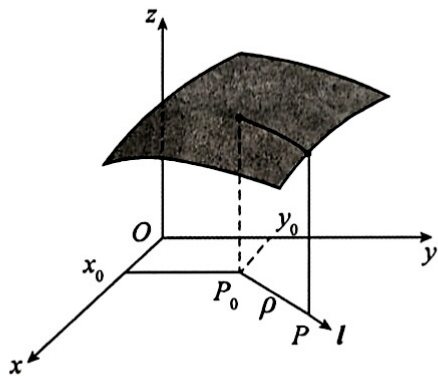


图 8-4

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0} = (2xy + e^{2x}) \Big|_{(0,1)} = 1,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 3 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

二、梯 度

1. 数量场

含有某一物理量的空间称为场. 当物理量为数量时, 称为数量场, 如温度场. 数学上, 数量场为数量值函数, 如温度场 $T = T(x, y, z)$. 当物理量为向量时, 称为向量场, 如重力场——向量值函数.

2. 数量场的梯度(方向导数取得最大值的方向)

设 $z = f(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$, 沿 $l = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 的方向导数为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta) \\ &= \|\mathbf{grad} f(x_0, y_0)\| \cdot \|l\| \cdot \cos \theta, \end{aligned}$$

当 $\theta = 0$ 时取得最大值 $\|\mathbf{grad} f\|$, 取得最大值的方向为 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ (梯度).

3. 梯度与等高线(等值面) 的关系

设曲面 $S: z = f(x, y)$, 则曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ z = c \end{cases}$ (c 为常数) 投影到 xOy 面上的投影曲线 $f(x, y) = c$

称为曲面 S 的等高线. 设 $\begin{cases} u = f(x, y, z), \\ u = c \end{cases}$ (c 为常数), 即 $f(x, y, z) = c$ 为函数 $u = f(x, y, z)$ 的等值面.

由于等高线 $f(x, y) = c$ 上任意一点 $P(x, y)$ 处的法线的斜率为 $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{-\frac{f'_x}{f'_y}} = \frac{f'_y}{f'_x}$, 所以梯度

$\mathbf{grad} z = (f'_x, f'_y)$ 为等高线上点 P 处的法线方向.

结论: $z = f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 处的梯度方向与过点 $P(x, y)$ 的等高线 $f(x, y) = c$ 的法线的一个方向相同, 从数值低的等高线指向数值高的等高线, 梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数, 如图 8-5 和图 8-6 所示.

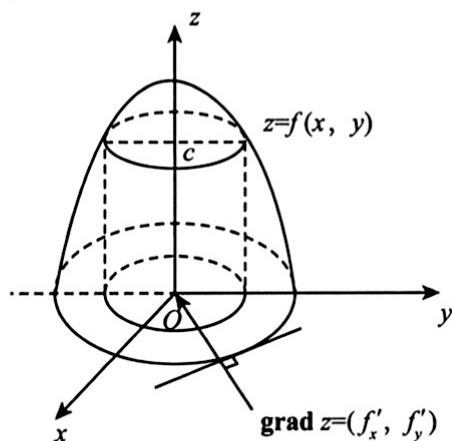


图 8-5

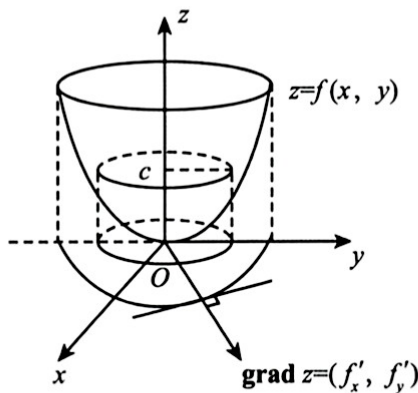


图 8-6

例如 求 $z = x^2 + y^2$ 在 $(1, 0)$ 处沿 $x^2 + y^2 = 1$ 的外法线方向的方向导数.

解 由已知, $x^2 + y^2 = 1$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的一条等高线, 而 $x^2 + y^2 = 1$ 的外法线方向 n (从数值低指

向数值高) 为梯度方向, 故沿 $x^2 + y^2 = 1$ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数等于梯度的模, 故

$$\left. \frac{\partial z}{\partial n} \right|_{(1,0)} = \|\mathbf{grad} z\| \Big|_{(1,0)} = \sqrt{(2 \times 1)^2 + (2 \times 0)^2} = 2.$$

典型例题分析

例 1 求 $u = 3x^2 + 2y^2 - z^2$ 在 $P(1, 2, -1)$ 处沿什么方向的方向导数取得最大值、最小值.

解 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P = 6x \Big|_P = 6, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = 4y \Big|_P = 8, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = -2z \Big|_P = 2,$

故梯度 $\mathbf{grad} u(1, 2, -1) = (6, 8, 2)$, 从而 u 的方向导数沿 $\mathbf{grad} u = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 取得最大值, 沿 $-\mathbf{grad} u(1, 2, -1)$ 取得最小值, 且最大值为

$$\|\mathbf{grad} u(1, 2, -1)\| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2^2} = 2\sqrt{26},$$

最小值为 $-2\sqrt{26}$.

例 2 函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $P(2, 2, 1)$ 处的梯度为_____, 沿 $\boldsymbol{l} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 的方向, 方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P =$ _____.

解 由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

知

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P = \frac{2}{3}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = \frac{2}{3}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = \frac{1}{3},$$

所以梯度 $\mathbf{grad} u(P) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$.

由 $\boldsymbol{l} = (1, -2, 2)$, 得

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}, \\ \cos \beta &= \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3}, \\ \cos \gamma &= \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

故

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{-2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 0.$$

例 3 设 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 且 $f'_x(x, y) > 0, f'_y(x, y) > 0$, 则以下结论中错误的是().

A. $f(1, 1) > f(0, 0)$

B. $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的一个极小值

C. $f(x, y)$ 没有极值

D. 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l} > 0$, 其中 $\boldsymbol{l} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

解 对于选项 A, 由 $f'_x(x, y) > 0 \Rightarrow f(x, y)$ 关于 x 单调增加, $f'_y(x, y) > 0 \Rightarrow f(x, y)$ 关于 y 单调增加, 故

$$f(1, 1) - f(0, 0) = [f(1, 1) - f(0, 1)] + [f(0, 1) - f(0, 0)] > 0.$$

对于选项 B, 由必要条件: $f'_x = 0, f'_y = 0 \Rightarrow f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值是错误的.

对于选项 C, $f(x, y)$ 没有极值, 正确(排除).

对于选项 D, $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$, 正确(排除).

故选 B.

例 4 求 $u = x^2 - xy + y^2$ 在点 $M(-1, 1)$ 沿方向 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ 的方向导数, 并指出 u 在该点沿哪个方向的方向导数最大? 这个最大的方向导数值是多少? u 沿哪个方向减少得最快? 沿哪个方向 u 的值不变?

解

$$\text{grad } u(-1, 1) = (-3, 3),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_M = \text{grad } u \cdot \mathbf{n} = (-3, 3) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{3}{\sqrt{5}},$$

故沿梯度 $\text{grad } u(-1, 1) = (-3, 3)$ 方向, 方向导数最大. 最大方向导数值为

$$\| \text{grad } u(-1, 1) \| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

u 沿负梯度方向, 即 $-(-3, 3) = (3, -3)$, 减少得最快.

令沿 $\mathbf{l} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 方向 u 的变化率为 0, 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M &= \text{grad } u(M) \cdot \mathbf{l} = -3\cos \theta + 3\sin \theta \\ &= 3\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \end{aligned}$$

解得 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$, u 的值不变.

例 5 设可微函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 沿 $\mathbf{l}_1 = (-3, 4)$, $\mathbf{l}_2 = (3, 4)$ 的方向导数分别为 1 和 $-\frac{1}{5}$, 求 $f(x, y)$ 在点 P_0 处的最大方向导数及取得最大方向导数的一个向量 $\mathbf{l}$.

解

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l_1} \right|_{P_0} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cos \alpha_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cos \beta_1 \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cdot \frac{4}{5} = 1, \end{aligned} \quad ①$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l_2} \right|_{P_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cdot \frac{3}{5} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}. \quad ②$$

解式 ① 和式 ② 得

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = -1, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} = \frac{1}{2},$$

则梯度为

$$\text{grad } f(x, y)|_{P_0} = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \right) = \left(-1, \frac{1}{2} \right).$$

$f(x, y)$ 在点 P_0 处的最大方向导数等于该点梯度的模, 即

$$\| \text{grad } f(x, y)|_{P_0} \| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

取得最大方向导数的一个向量为 $\mathbf{l} = \left(-1, \frac{1}{2} \right)$.

例 6 求 $u = 4x^2 + y^2 + z^2 - 6$ 沿曲面 $S: 4x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 上点 $M(1, 1, 1)$ 处外法线方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数.

解法 1 利用梯度与等值面的关系求解.

由已知, 曲面 S 为 $u = 4x^2 + y^2 + z^2 - 6$ 的等值面 $u = 0$, 且等值面是“内小外大”的, 即 $u = 0, 1, 2, \dots$ 等值面增大, 故梯度方向就是外法线方向, 所以沿外法线方向的方向导数为梯度的模(方向导数的最大

值). 由

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 8x \Big|_M = 8, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 2y \Big|_M = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 2z \Big|_M = 2,$$

可知

$$\mathbf{grad} u(M) = (8, 2, 2),$$

故

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_M = \|\mathbf{grad} u(M)\| = \sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2} = 6\sqrt{2}.$$

解法2 先求出外法线方向, 令 $F = 4x^2 + y^2 + z^2 - 6$, 则

$$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) \Big|_M = (8x, 2y, 2z) \Big|_M = (8, 2, 2),$$

所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_M &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cdot \cos \gamma \\ &= 8 \times \frac{8}{\sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2}} + 2 \times \frac{2}{\sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2}} + 2 \times \frac{2}{\sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2}} \\ &= 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

例7 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使得 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿方向 $\mathbf{l} = (1, -1, 0)$ 的方向导数最大.

解法1 $f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处沿梯度方向的方向导数取得最大值.

$$\mathbf{grad} f = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z),$$

由已知, 有 $\mathbf{grad} f = \lambda \mathbf{l} (\lambda > 0)$, 即

$$x = \lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = 0,$$

代入 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, 得

$$2\lambda^2 + 2 \cdot (-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2},$$

故所求点为 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

解法2 用条件极值的拉格朗日乘数法.

由 $\mathbf{l} = (1, -1, 0)$ 知,

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \gamma = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma = \sqrt{2}(x - y),$$

求函数 $\sqrt{2}(x - y)$ 在条件 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 下的最大值. 令

$$L = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1),$$

则

$$\begin{cases} L'_x = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0, \\ L'_y = -\sqrt{2} + 4\lambda y = 0, \\ L'_z = 2\lambda z = 0, \\ L'_\lambda = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}, \\ z = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$$

由于

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)} = \sqrt{2}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)} = -\sqrt{2},$$

故 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 为所求的点.

例 8 求常数 a, b, c 的值, 使得 $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$ 在点 $(1, 2, -1)$ 处沿 z 轴正向的方向导数有最大值 64.

解 由于方向导数有最大值的方向为梯度方向, 所以 $f(x, y, z)$ 在点 $(1, 2, -1)$ 处的梯度与 z 轴正向 $k = (0, 0, 1)$ 同向.

$$f'_x(1, 2, -1) = (ay^2 + 3cx^2z^2) \Big|_{(1, 2, -1)} = 4a + 3c,$$

$$f'_y(1, 2, -1) = (2axy + bz) \Big|_{(1, 2, -1)} = 4a - b,$$

$$f'_z(1, 2, -1) = (by + 2cx^3z) \Big|_{(1, 2, -1)} = 2b - 2c,$$

从而有 $\text{grad } f(1, 2, -1) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c)$ 与 $k = (0, 0, 1)$ 同向, 则

$$4a + 3c = 0, \quad 4a - b = 0, \quad 2b - 2c > 0.$$

又由于 $\frac{\partial f}{\partial k} \Big|_{(1, 2, -1)} = \max \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(1, 2, -1)} = 64 = \|\text{grad } f(1, 2, -1)\| = 2b - 2c$, 于是

$$\begin{cases} 4a + 3c = 0, \\ 4a - b = 0, \\ 2b - 2c = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6, \\ b = 24, \\ c = -8. \end{cases}$$

例 9 已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解 $f(x, y)$ 沿梯度方向的方向导数最大, 最大值为梯度的模. 由于

$$f'_x(x, y) = 1 + y, \quad f'_y(x, y) = 1 + x,$$

因此

$$\text{grad } f = (1 + y, 1 + x), \quad \|\text{grad } f\| = \sqrt{(1 + y)^2 + (1 + x)^2}.$$

问题转化为求 $g(x, y) = (1 + y)^2 + (1 + x)^2$ 在条件 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ 下的最大值. 令 $L = (1 + y)^2 + (1 + x)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$, 则

$$\begin{cases} L'_x = 2(1 + x) + \lambda(2x + y) = 0, \\ L'_y = 2(1 + y) + \lambda(2y + x) = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} M_1(1, 1), M_2(-1, -1), \\ M_3(2, -1), M_4(-1, 2), \end{matrix}$$

又

$$g(M_1) = 8, \quad g(M_2) = 0, \quad g(M_3) = 9, \quad g(M_4) = 9,$$

所以最大方向导数为 $\sqrt{9} = 3$.

第六节 多元函数微分学的几何应用 (仅数学一要求)

内容与方法提要

一、空间曲线的切线与法平面

(1) 设空间曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ 对应于 $t = t_0$ 的点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 过点 P_0 的切线的

方向向量为

$$T = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

(2) 设空间曲线 $L: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$ 方程组确定的隐函数为 $y = y(x), z = z(x)$, 视 $x = x$ 为参数,

则过点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ 的切线的方向向量为

$$T = \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right). \quad ①$$

在方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 两边同时对 x 求导, 得

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = 0, \\ G'_x + G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = -F'_x, \\ G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = -G'_x, \end{cases}$$

解得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -F'_x & F'_z \\ -G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} F'_y & -F'_x \\ G'_y & -G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}},$$

代入式 ①, 得

$$T = \left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \right) \bigg|_{P_0},$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}},$$

法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0} \cdot (x-x_0) + \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0} \cdot (y-y_0) + \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0} \cdot (z-z_0) = 0.$$

二、曲面的切平面与法线

(1) 设曲面 $S: F(x, y, z) = 0$, S 上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量

$$n = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)),$$

过点 P_0 的切平面方程为

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

(2) 设曲面 $S: z = f(x, y)$, 令 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, 则 S 上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1),$$

切平面方程为

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

典型例题分析

例 1 求曲线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin \frac{t}{2}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

解 由已知,

$$x'(t) = 1 - \cos t, \quad y'(t) = \sin t, \quad z'(t) = 2\cos \frac{t}{2},$$

将 $t = \frac{\pi}{2}$ 代入上式得切向量为 $\boldsymbol{T} = (1, 1, \sqrt{2})$.

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时,

$$x_0 = \frac{\pi}{2} - 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 2\sqrt{2},$$

故切线方程为

$$\frac{x - (\frac{\pi}{2} - 1)}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$(x - \frac{\pi}{2} + 1) + (y - 1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0,$$

即

$$x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0.$$

例 2 求曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y + z^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $P_0(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程.

解 设方程组确定的隐函数为 $y = y(x)$, $z = z(x)$, 则曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases}$ (x 为参

数), 故切线的方向向量为 $\boldsymbol{T} = (1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx})$.

在已知方程组两边同时对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0, \\ 3x^2 + \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

将点 $P_0(1, -2, 1)$ 代入上面方程组, 得

$$\begin{cases} 2 \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 1, \\ \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dz}{dx} = -3, \end{cases}$$

解得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}, \frac{dz}{dx} = -\frac{7}{5}$, 切向量 $\mathbf{T} = \left(1, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$, 故切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-\frac{1}{5}} = \frac{z-1}{-\frac{7}{5}},$$

即

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{7},$$

法平面方程为

$$-5(x-1) + (y+2) + 7(z-1) = 0,$$

即 $5x - y - 7z = 0$.

例 3 求曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $P_0(1, 0, 1)$ 处的切平面与法线方程.

解 曲面的切平面的法向量为 $\mathbf{n} = (z'_x, z'_y, -1)$.

由 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$, 知

$$z'_x = 2x(1 - \sin y) - y^2 \cos x, \quad z'_x(1, 0) = 2,$$

$$z'_y = -x^2 \cos y + 2y(1 - \sin x), \quad z'_y(1, 0) = -1,$$

故 $\mathbf{n} = (2, -1, -1)$, 所求切平面方程为

$$2(x-1) - (y-0) - (z-1) = 0,$$

即 $2x - y - z - 1 = 0$, 法线方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

例 4 设直线 $L: \begin{cases} x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$, 求 a, b 的值.

解 曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, -2, 5)$ 处的法向量为

$$\mathbf{n} = (2x, 2y, -1) \Big|_{(1, -2, 5)} = (2, -4, -1),$$

故平面 π 的方程为

$$2(x-1) - 4(y+2) - (z-5) = 0.$$

由直线 L 的方程, 得

$$y = -(x+b), \quad z = x - a(x+b) - 3,$$

代入平面 π 的方程, 得

$$2x + 4(x+b) - x + a(x+b) + 3 - 5 = 0,$$

故

$$5 + a = 0, \quad 4b + ab - 2 = 0,$$

解得 $a = -5, b = -2$.

注 此题也可利用过 L 的平面束方程解答.

设过 L 的平面束方程为

$$x + ay - z - 3 + \lambda(x + y + b) = 0,$$

即

$$(1+\lambda)x + (a+\lambda)y - z - 3 + \lambda b = 0.$$

又曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, -2, 5)$ 处的法向量为 $\mathbf{n} = (2, -4, -1)$. 由题设, 有

$$\frac{1+\lambda}{2} = \frac{a+\lambda}{-4} = \frac{-1}{-1},$$

解得 $\lambda = 1, a = -5$.

又知点 $(1, -2, 5)$ 在平面 π 上, 故

$$(1+\lambda) - 2(a+\lambda) - 8 + \lambda b = 0,$$

解得 $b = -2$.

例 5 设椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上点 P 处的切平面 π 过直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$, 求点 P 的坐标和切平面 π 的方程.

解 将直线 L 的方程化为一般式, 得

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

过 L 的平面束方程为 $\lambda(x - 2y) + x + 2z - 7 = 0$, 即

$$(1+\lambda)x - 2\lambda y + 2z - 7 = 0.$$

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 则点 P 处切平面的法向量为

$$\mathbf{n} = (2x_0, 4y_0, 6z_0),$$

切平面 π 为

$$2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0,$$

即

$$x_0x + 2y_0y + 3z_0z - 21 = 0.$$

依题意, $\frac{x_0}{1+\lambda} = \frac{2y_0}{-2\lambda} = \frac{3z_0}{2} = \frac{-21}{-7} = 3$, 解得

$$z_0 = 2, \quad y_0 = -3\lambda, \quad x_0 = 3(1+\lambda).$$

又 $P(x_0, y_0, z_0)$ 在椭球面上, 故

$$9(1+\lambda)^2 + 18\lambda^2 + 12 = 21,$$

解得 $\lambda = 0$ 或 $-\frac{2}{3}$, 故所求点为 $P(3, 0, 2)$ 和 $P(1, 2, 2)$.

切平面方程为

$$6(x - 3) + 0 \cdot (y - 0) + 12(z - 2) = 0$$

和

$$2(x - 1) + 8(y - 2) + 12(z - 2) = 0,$$

即 $x + 2z - 7 = 0$ 和 $x + 4y + 6z - 21 = 0$.

此外, 平面方程 $x - 2y = 0$ 不满足题意, 故满足题意的方程只有 $x + 2z - 7 = 0$ 和 $x + 4y + 6z - 21 = 0$.

习题演练

一、选择题

(1) 设 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2$, 则 $f(x, y) = (\quad)$.

A. x^2y^2

B. xy

C. x^2y

D. xy^2

(2) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 $(\quad)$.

A. 连续, 但偏导数不存在

B. 偏导数存在, 但不连续

C. 偏导数存在且可微

D. 不可微

(3) $f(x, y)$ 的点 $P(x_0, y_0)$ 处两个偏导数均存在, 是 $f(x, y)$ 在 P 点处连续的 $(\quad)$.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分也非必要条件

(4) 设 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$ $(\quad)$.

A. 不是 $f(x, y)$ 的连续点B. 不是 $f(x, y)$ 的极值点C. 是 $f(x, y)$ 的极小值点D. 是 $f(x, y)$ 的极大值点

二、填空题

(1) 设 $z = x^y$, 则 $dz =$ _____.(2) 设 $z = f(x^2 - y^2, 2y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.(3) 已知 $y = y(x), z = z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{dz}{dx} =$ _____.(4) 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, $f(x, y) = 3 - 2x - y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$, 则 $f'_x(1, 0) =$ _____, $f'_y(1, 0) =$ _____.(5) 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^x + y^y = z^z$ 确定, 则 $dz =$ _____.(6) 设 $F(x, y, z)$ 可微, $F(x, y, z) = 0$ 分别确定函数 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$, 且 $F'_1 \neq 0, F'_2 \neq 0, F'_3 \neq 0$, 则 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.(7) 设 $z = f(u), u = u(x, y)$ 由 $u = \varphi(u) + \int_y^x p(t) dt$ 确定, $p(t)$ 连续, f 与 φ 有连续导数, 且 $\varphi'(u) \neq 1$, 则 $p(x) \frac{\partial z}{\partial y} + p(y) \frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.(8) 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $f(xy, yz) + g(xyz) = 0$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

三、解答题

(1) 设 $z = |xy|$.(I) 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$;(II) 讨论 z 在点 $(0, 0)$ 处是否可微.(2) 设 $f(x, y)$ 可微, 且

$$f(1, 2) = 2, \quad f'_x(1, 2) = 3, \quad f'_y(1, 2) = 4, \quad \varphi(x) = f(x, f(x, 2x)),$$

求 $\varphi'(1)$.(3) 设 $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, 其中 $\xi = x - at, \eta = x + at$ (a 为常数), 求 $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.(4) 设 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数, 且 $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$, 求

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

(5) 设 $u = u(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 确定 a, b 的值, 使得在变换 $z = ue^{ax+by}$ 下, 上述等式可化为 $z(x, y)$ 不含一阶偏导数的等式.(6) 已知 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$, 求 $f(x, y)$ 的极小值.(7) 求 $f(x, y) = x^2 + \sqrt{2}xy + 2y^2$ 在区域 $D: x^2 + 2y^2 \leq 4$ 上的最大值与最小值.(8) 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 的极值.(9) (仅数学一、数学二要求) 设 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 有二阶连续导数, 且 $f'(1) = 1, f(1) = 1$, 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2$, 求函数 $f(x)$.(10) (仅数学一要求) 在 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ 位于第一卦限中的点 P 处作切平面, 使此切平面与坐标面所

围四面体体积最小,求点 P 的坐标.

(11) (仅数学一要求) 设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大, 且最大值为 10, 求 a, b 的值.

(12) (仅数学一要求) 设曲面 $\Sigma: \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, 平面 $\pi: 2x + 2y + z - 5 = 0$.

(I) 在 Σ 上求一点, 使其在该点的切平面与 π 平行;

(II) 求曲面 Σ 与 π 的最短距离.

(13) (仅数学一要求) 求 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 和 $x + y + z = 0$ 的交线在 $P(1, -2, 1)$ 处的切线方程和法平面方程.

(14) (仅数学一要求) 求 $u = xy + yz^3$ 在点 $P(2, -1, 1)$ 处的梯度, 及在该点沿方向 $l = i + 2j + 2k$ 的方向导数.

(15) (仅数学一要求) 求曲面 $z = 3x^2 + 2y^2$ 在点 $P(2, -1, 14)$ 处的切平面方程和法线方程.

(16) 设 $f(x, y) = (x + y)\varphi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续.

(I) 求 $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$;

(II) 讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的可微性, 若可微, 求 $df \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$.

(17) 设 $z = z(x, y)$ 满足 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, 且 $\begin{cases} u = x, \\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \\ \varphi = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}, \end{cases}$ 对函数 $\varphi(u, v)$, 证明: $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$.

(18) (仅数学一要求) 设有一座小山, 取它的底面所在平面为 xOy 坐标平面, 其底部所占区域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.

(I) 设 $M_0(x_0, y_0)$ 为 D 上一点, 问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试求 $g(x_0, y_0)$ 的表达式;

(II) 利用此山开展攀岩活动, 需要在山脚寻找上山坡度最大的点作为起点, 也就是说, 要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使 (I) 中 $g(x, y)$ 达到最大值的点, 试确定攀登起点的位置.

习题演练解答

一、选择题

(1) B.

解 令 $x + y = u, x - y = v$, 则

$$f(x + y, x - y) = f(u, v) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = uv,$$

故 $f(x, y) = xy$, 所以选项 B 正确.

(2) D.

解 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\rho} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

不存在, 故不可微, 选项 D 正确.

(3) D.

解 选项 D 正确. 例如,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

在点(0,0)处, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, 但 $f(x, y)$ 在点(0,0)处不连续.

又如, $f(x, y) = |x| + |y|$ 在点(0,0)处连续, 但 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 均不存在.

(4) C.

解 由已知, 有 $\frac{\partial z}{\partial x} = x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = y$, 所以(0,0)是 $f(x, y)$ 的驻点, 且

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1,$$

$$AC - B^2 = 1 \times 1 - 0 > 0, \quad A = 1 > 0,$$

故点(0,0)是 $f(x, y)$ 的极小值点, 选项 C 正确.

二、填空题

(1) $x^y \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right).$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x,$

故

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = x^y \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right).$$

(2) $4x(-yf''_{11} + f''_{12}).$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot 0 = 2xf'_1,$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x[f''_{11} \cdot (-2y) + f''_{12} \cdot 2] \\ &= 4x(-yf''_{11} + f''_{12}). \end{aligned}$$

(3) $-\frac{x+6xz}{2y+6yz}, \frac{x}{1+3z}.$

解 在已知方程组两边同时对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}, \\ 2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

解得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+6xz}{2y+6yz}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{1+3z}.$$

(4) $-2, -1.$

解 由已知, $f(1,0) = 1$, 故

$$\Delta f = f(x, y) - f(1,0) = -2(x-1) - y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}).$$

由可微的定义, 知 $f(x, y)$ 在点(1,0)处可微, 且

$$f'_x(1,0) = -2, \quad f'_y(1,0) = -1.$$

(5) $\frac{x^x(1+\ln x)}{z^x(1+\ln z)} dx + \frac{y^y(1+\ln y)}{z^x(1+\ln z)} dy.$

解 由 $x^x + y^y = z^x$, 得

$$e^{x \ln x} + e^{y \ln y} = e^{x \ln z}.$$

在等式两边同时微分,得

$$e^{x \ln x}(1 + \ln x)dx + e^{y \ln y}(1 + \ln y)dy = e^{z \ln z}(1 + \ln z)dz,$$

解得

$$dz = \frac{x^x(1 + \ln x)}{z^z(1 + \ln z)}dx + \frac{y^y(1 + \ln y)}{z^z(1 + \ln z)}dy.$$

(6) - 1.

解 在 $F(x, y, z) = 0$ 两边同时对 y 求导,得

$$F'_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + F'_2 \cdot 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_2}{F'_1}.$$

在 $F(x, y, z) = 0$ 两边同时对 z 求导,得

$$F'_2 \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + F'_3 \cdot 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_3}{F'_2}.$$

在 $F(x, y, z) = 0$ 两边同时对 x 求导,得

$$F'_1 + F'_3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\text{解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_1}{F'_3}, \text{ 故}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

(7) 0.

解 依题设, $\begin{cases} z = f(u), \\ u = \varphi(u) + \int_y^x p(t)dt, \end{cases}$ 两边同时对 x 与 y 分别求导,得

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + p(x), \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{p(x)}{1 - \varphi'(u)} f'(u).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} - p(y), \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-p(y)}{1 - \varphi'(u)} f'(u),$$

于是

$$p(x) \frac{\partial z}{\partial y} + p(y) \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$(8) - \frac{f'_1 + zg'}{f'_2 + xg'}.$$

解 令 $F(x, y, z) = f(xy, yz) + g(xyz)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yf'_1 + yzg'}{yf'_2 + xyg'} = -\frac{f'_1 + zg'}{f'_2 + xg'}.$$

三、解答题

(1) **解** (I)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{cases} y, & xy > 0, \\ -y, & xy < 0, \\ 0, & y = 0, \\ \text{不存在}, & x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

(II)
$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 0,$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{z(x, y) - z(0, 0) - \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} \cdot x - \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, z 在点 $(0, 0)$ 处可微.

(2) **解** 由复合函数求导法则, 有

$$\varphi'(x) = f'_1 + f'_2 \cdot (f'_1 + 2f'_2).$$

又由

$$\begin{aligned} f(1, f(1, 2)) &= f(1, 2), \\ f'_1(1, 2) &= f'_x(1, 2) = 3, \\ f'_2(1, 2) &= f'_y(1, 2) = 4, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \varphi'(1) &= f'_1(1, 2) + f'_2(1, 2) \cdot [f'_1(1, 2) + 2f'_2(1, 2)] \\ &= 3 + 4 \times (3 + 8) = 47. \end{aligned}$$

(3) **解**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \varphi'(\xi) + \psi'(\eta),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a\varphi'(\xi) + a\psi'(\eta),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(\xi) + \psi''(\eta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \varphi''(\xi) + a^2 \psi''(\eta),$$

故 $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

(4) **解** 由 $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$, 得

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - f'_1 - f'_2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x - f'_1 + f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -f''_{11} - f''_{12} - f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} - 2f''_{12} - f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1 - f''_{11} - f''_{12} \cdot (-1) - f''_{21} - f''_{22} \cdot (-1) = 1 - f''_{11} + f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -f''_{11} + f''_{12} + f''_{21} + f''_{22} \cdot (-1) = -f''_{11} + 2f''_{12} - f''_{22},$$

故

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1 - 3f''_{11} - f''_{22}.$$

(5) 解 由 $z = ue^{ax+by}$, 得 $u = ze^{-ax-by}$, 故

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} - az\right)e^{-ax-by}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - bz\right)e^{-ax-by}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2a\frac{\partial z}{\partial x} + a^2z\right)e^{-ax-by}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2b\frac{\partial z}{\partial y} + b^2z\right)e^{-ax-by},\end{aligned}$$

代入原方程, 可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (1-2a)\frac{\partial z}{\partial x} + (1+2b)\frac{\partial z}{\partial y} + (a^2-b^2-a-b)z = 0.$$

由已知, 令 $1-2a=0, 1+2b=0$, 解得 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$.(6) 解 $\begin{cases} f'_x = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1) = 0, \\ f'_y = e^{2x}(2y+2) = 0, \end{cases}$ 解得驻点 $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, 由于

$$A = f''_{xx}(P) = 2e, \quad B = f''_{xy}(P) = 0, \quad C = f''_{yy}(P) = 2e,$$

$$AC - B^2 = 2e \times 2e - 0^2 > 0, \quad A = 2e > 0,$$

故 $f(x, y)$ 的极小值为 $f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}$.(7) 解 在 D 内, $\begin{cases} f'_x = 2x + \sqrt{2}y = 0, \\ f'_y = \sqrt{2}x + 4y = 0, \end{cases}$ 解得 $P_1(0, 0)$.在 D 上, 令 $L = x^2 + \sqrt{2}xy + 2y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 4)$, 则

$$\begin{cases} L'_x = (2+2\lambda)x + \sqrt{2}y = 0, \\ L'_y = \sqrt{2}x + (4+4\lambda)y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + 2y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

解得

$$P_2(\sqrt{2}, -1), \quad P_3(-\sqrt{2}, 1), \quad P_4(\sqrt{2}, 1), \quad P_5(-\sqrt{2}, -1).$$

比较 $f(P_1) = 0, f(P_2) = 2, f(P_3) = 2, f(P_4) = 6, f(P_5) = 6$, 故 $f(x, y)$ 的最大值为 6, 最小值为 0.(8) 解 在方程两边同时对 x, y 求偏导, 得

$$\begin{cases} 2x + 2z \cdot z'_x - 2 - 4z'_x = 0, & \text{①} \\ 2y + 2z \cdot z'_y + 2 - 4z'_y = 0, & \text{②} \end{cases}$$

解得

$$z'_x = \frac{1-x}{z-2}, \quad z'_y = -\frac{1+y}{z-2}.$$

在式 ① 与式 ② 两边同时对 x, y 求偏导, 得

$$\begin{cases} 2 + 2(z'_x)^2 + 2z \cdot z''_{xx} - 4z''_{xx} = 0, \\ 2z'_y \cdot z'_x + 2z \cdot z''_{xy} - 4z''_{xy} = 0, \\ 2 + 2(z'_y)^2 + 2z \cdot z''_{yy} - 4z''_{yy} = 0, \end{cases}$$

解得

$$z''_{xx} = -\frac{1+(z'_x)^2}{z-2}, \quad z''_{xy} = -\frac{z'_x \cdot z'_y}{z-2}, \quad z''_{yy} = -\frac{1+(z'_y)^2}{z-2}.$$

在式①与式②中,令 $z'_x = 0, z'_y = 0$, 得 $x = 1, y = -1$. 将 $x = 1, y = -1$ 代入原方程, 得 $z = 6$, $z = -2$.

当 $x = 1, y = -1, z = 6$ 时,

$$A = z''_{xx}(1, -1) = -\frac{1}{4},$$

$$B = z''_{xy}(1, -1) = 0,$$

$$C = z''_{yy}(1, -1) = -\frac{1}{4},$$

$$AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0, \quad A = -\frac{1}{4} < 0,$$

故 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, -1)$ 处取得极大值 6.

当 $x = 1, y = -1, z = -2$ 时,

$$A = z''_{xx}(1, -1) = \frac{1}{4},$$

$$B = z''_{xy}(1, -1) = 0,$$

$$C = z''_{yy}(1, -1) = \frac{1}{4},$$

$$AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0, \quad A = \frac{1}{4} > 0,$$

故 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, -1)$ 处取得极小值 -2.

(9) 解 令 $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{r^3} f'(r) + \frac{x^2}{r^2} f''(r).$$

由轮换性, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3} f'(r) + \frac{y^2}{r^2} f''(r),$$

代入原等式, 得

$$rf''(r) + f'(r) = r^3,$$

解得 $rf'(r) = \frac{1}{4}r^4 + C_1$, 由 $f'(1) = 1$, 得 $C_1 = \frac{3}{4}$, 即

$$f'(r) = \frac{1}{4}r^3 + \frac{3}{4r},$$

积分得

$$f(r) = \frac{1}{16}r^4 + \frac{3}{4}\ln r + C_2,$$

由 $f(1) = 1$, 得 $C_2 = \frac{15}{16}$, 故

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}\ln x + \frac{15}{16}.$$

(10) 解 设切点为 $P(x_0, y_0, z_0)$, 则切平面为

$$\frac{2x_0}{25}(x - x_0) + \frac{2y_0}{9}(y - y_0) + \frac{z_0}{2}(z - z_0) = 0,$$

该切平面在坐标轴上的截距分别为

$$a = x_0 + \frac{25}{2x_0} \left(\frac{2}{9}y_0^2 + \frac{1}{2}z_0^2 \right) = \frac{25}{x_0} \left(\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{4} \right),$$

$$b = y_0 + \frac{9}{2y_0} \left(\frac{2}{25}x_0^2 + \frac{1}{2}z_0^2 \right) = \frac{9}{y_0} \left(\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{4} \right),$$

$$c = z_0 + \frac{2}{z_0} \left(\frac{2}{25}x_0^2 + \frac{2}{9}y_0^2 \right) = \frac{4}{z_0} \left(\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{4} \right),$$

故四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{x_0} \cdot \frac{9}{y_0} \cdot \frac{4}{z_0} = \frac{150}{x_0 y_0 z_0}.$$

令 $L = x_0 y_0 z_0 + \lambda \left(\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{4} - 1 \right)$, 则

$$\begin{cases} L'_{x_0} = y_0 z_0 + \frac{2\lambda}{25} x_0 = 0, \\ L'_{y_0} = x_0 z_0 + \frac{2\lambda}{9} y_0 = 0, \\ L'_{z_0} = x_0 y_0 + \frac{2\lambda}{4} z_0 = 0, \\ L'_\lambda = \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} + \frac{z_0^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$$

解得唯一解为

$$x_0 = \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad y_0 = \frac{3}{\sqrt{3}}, \quad z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

故所求点为 $P\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(11) 解 依题意, 有

$$\text{grad } z \Big|_{(3,4)} = (2ax, 2by) \Big|_{(3,4)} = (6a, 8b).$$

由 $6ai + 8bj$ 与 $-3i - 4j$ 同向, 可知 $\frac{6a}{-3} = \frac{8b}{-4} > 0$, 得

$$a = b < 0, \quad (1)$$

且方向导数最大为

$$\sqrt{36a^2 + 64b^2} = 10, \quad (2)$$

解式①和式②, 得 $a = b = -1$.

(12) 解 (I) 在 $P(x, y, z)$ 处曲面 Σ 的法向量为 $\left(x, 2y, \frac{z}{2}\right)$, 由已知, 要求其平行于 $(2, 2, 1)$, 则有

$$\frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = \frac{\frac{z}{2}}{1}, \text{ 即}$$

$$x = 2y = z. \quad (1)$$

又 $P(x, y, z)$ 在 Σ 上, 故应满足曲面方程

$$\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1. \quad (2)$$

解式①与式②, 得

$$y = \pm \frac{1}{2}, \quad x = z = \pm 1,$$

所以在 Σ 上点 $(1, \frac{1}{2}, 1)$ 与点 $(-1, -\frac{1}{2}, -1)$ 处的切平面与 π 平行.

(II) 依题意, 曲面 Σ 与 π 的最短距离, 即 $(1, \frac{1}{2}, 1)$ 或 $(-1, -\frac{1}{2}, -1)$ 与平面 π 之间距离较小者, 为

$$d = \frac{\left| 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 - 5 \right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

(13) 解 切线的方向向量为 $(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx})$, $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 两边同时对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0, \\ 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

解得

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1, -2, 1)} = \left. \frac{x - z}{z - y} \right|_{(1, -2, 1)} = 0,$$

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1, -2, 1)} = \left. \frac{y - x}{z - y} \right|_{(1, -2, 1)} = -1,$$

故切线方程为 $x - 1 = \frac{y + 2}{0} = \frac{z - 1}{-1}$, 即 $\begin{cases} x + z = 2, \\ y = -2, \end{cases}$ 法平面方程为 $x - 1 - (z - 1) = 0$, 即 $x - z = 0$.

(14) 解 $\text{grad } u(2, -1, 1) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{(2, -1, 1)} = (-1, 3, -3).$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(2, -1, 1)} &= \text{grad } u(2, -1, 1) \cdot l^0 \\ &= (-1, 3, -3) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(15) 解 令 $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - z$, 则法线的方向数为

$$F'_x(2, -1, 14) = 12, \quad F'_y(2, -1, 14) = -4, \quad F'_z(2, -1, 14) = -1,$$

故切平面方程为

$$12(x - 2) - 4(y + 1) - (z - 14) = 0,$$

即 $12x - 4y - z - 14 = 0$. 法线方程为

$$\frac{x - 2}{12} = \frac{y + 1}{-4} = \frac{z - 14}{-1}.$$

(16) 解 (I)
$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\varphi(x, 0) - 0}{x} = \varphi(0, 0), \end{aligned}$$

同理, 有 $f'_y(0, 0) = \varphi(0, 0)$.

(II) 利用可微的定义.

$$\Delta f = f(x, y) - f(0, 0) = (x + y)\varphi(x, y),$$

又由于 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 即 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \varphi(x, y) = \varphi(0, 0)$, 故

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, 0) + \alpha \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \alpha(x, y) = 0 \right],$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta f &= (x+y)[\varphi(0,0)+\alpha] \\ &= x\varphi(0,0)+y\varphi(0,0)+(x+y)\alpha.\end{aligned}$$

又因为

$$0 \leq \left| \frac{(x+y)\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|x||\alpha|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|y||\alpha|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |\alpha| + |\alpha| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0,$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x+y)\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, 即 $(x+y)\alpha = o(\sqrt{x^2+y^2})$, 故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 且

$$df \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \varphi(0,0)dx + \varphi(0,0)dy.$$

(17) 证 由 $\begin{cases} u = x, \\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = u, \\ y = \frac{u}{1+uv}. \end{cases}$ 由 $\varphi = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$, 知 φ 是

z 与 x 的函数. 而 $z = z(x,y)$, $x = u$, $y = \frac{u}{1+uv}$, 故 φ 是 u, v 的函数, 相应

的链式法则如图 8-7 所示, 则

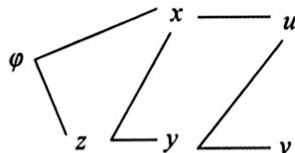


图 8-7

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u} &= -\frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} \\ &= -\frac{1}{z^2} \left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{1}{(1+uv)^2} \right] + \frac{1}{u^2}.\end{aligned}$$

利用 $\frac{1}{1+uv} = \frac{y}{x}$ 及 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, 可知当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u} &= -\frac{1}{z^2 x^2} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{1}{u^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{u^2} = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} = 0.\end{aligned}$$

(18) 解 (I) 由梯度的几何意义, 知 $h(x,y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处沿梯度

$$\text{grad } h(x,y) \Big|_{(x_0, y_0)} = (y_0 - 2x_0)\mathbf{i} + (x_0 - 2y_0)\mathbf{j}$$

方向的方向导数最大, 方向导数的最大值为该梯度的模, 所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}.$$

(II) 令 $f(x,y) = g^2(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$.

依题意, 求 $f(x,y)$ 在条件 $75 - x^2 - y^2 + xy = 0$ 下的最大值点, 可用拉格朗日乘数法. 令

$$L(x,y,\lambda) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy),$$

则

$$\begin{cases} L'_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, \\ L'_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0, \\ L'_\lambda = 75 - x^2 - y^2 + xy = 0, \end{cases}$$

解得

$$M_1(5, -5), \quad M_2(-5, 5), \quad M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), \quad M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}),$$

而

$$f(M_1) = f(M_2) = 450, \quad f(M_3) = f(M_4) = 150,$$

故 $M_1(5, -5)$ 或 $M_2(-5, 5)$ 可作为攀登起点.

第九章 微分方程

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法.
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程, 会用简单的变量代换解某些微分方程. (伯努利方程和全微分方程仅数学一要求.)
4. (仅数学一、数学二要求) 会用降阶法解下列形式的微分方程:
$$y^{(n)} = f(x), \quad y'' = f(x, y'), \quad y'' = f(y, y').$$
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构.
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法, 并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
8. (仅数学一要求) 会解欧拉方程.
9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

第一节 微分方程的基本概念

内容与方法提要

1. 常微分方程

含有一元函数的导数或微分的等式称为常微分方程.

2. 微分方程的阶数

微分方程中所含的导数或微分的最高阶数称为微分方程的阶数.

例如, $y'' + y = 1$ 为二阶微分方程.

3. 线性微分方程

若微分方程关于未知函数及其各阶导数是一次整式, 则称为线性微分方程.

例如, $y'' + x^2 y' + y = 1$ 是线性微分方程, $y'' + x^2 y' + y^2 = 1$ 不是线性微分方程.

4. 微分方程的特解与通解

若函数 $y = y(x)$ 满足微分方程, 则称 $y(x)$ 是微分方程的解. 不含任意常数的解称为微分方程的特解. 若微分方程的解中含有独立的任意常数的个数等于微分方程的阶数, 则称此解为微分方程的通解.

5. 定解条件

确定通解中任意常数的条件称为定解条件.

例如, $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

第二节 一阶微分方程

内容与方法提要

一、可分离变量的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),$$

当 $g(y) \neq 0$ 时,

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

两边同时积分,得

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

故 $G(y) = F(x) + C$.

例如 求微分方程 $xydx + (x^2 + 1)dy = 0$ 的通解.

解 当 $y \neq 0$ 时,分离变量,得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2}dx,$$

两边同时积分,得

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1+x^2}dx,$$

故

$$\ln |y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1,$$

即

$$\ln |y| = \ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + \ln e^{C_1} = \ln [e^{C_1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}],$$

从而有 $y = \pm e^{C_1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, 整理,得 $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$, 其中 $C = \pm e^{C_1}$.

当 $y = 0$ 时,显然 $y = 0$ 也是原微分方程的解,故原微分方程的通解为

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

二、齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 即 $y = ux$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 故方程可转化为

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u),$$

分离变量并积分,得

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}, \quad f(u) - u \neq 0.$$

例如 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} - y = 2\sqrt{xy}$ ($x > 0$) 的通解.

解 将原微分方程变形为

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \text{①}$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 将 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 代入式 ①, 得 $x \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u}$.

当 $u \neq 0$ 时,分离变量,得 $\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$, 积分得 $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x}$, 故

$$\sqrt{u} = \ln |x| + C = \ln x + C,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 可得 $y = x(\ln x + C)^2 (y \neq 0)$.

当 $u = 0$, 即 $y = 0$ 时, 显然 $y = 0$ 也是原微分方程的解, 故原微分方程的通解为

$$y = x(\ln x + C)^2 \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

三、一阶线性微分方程

1. 一阶齐次线性微分方程

$$y' + P(x)y = 0,$$

通解为 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

2. 一阶非齐次线性微分方程(常数变易法)

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad [Q(x) \text{ 不恒为 } 0],$$

其通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right].$$

注 通解公式中有三个不定积分, 计算时只需求一个原函数.

四、伯努利方程(仅数学一要求)

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1),$$

当 $y \neq 0$ 时, 该方程可变形为

$$y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

即

$$\left(\frac{1}{1-n} y^{1-n} \right)' + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

令 $y^{1-n} = z$, 整理, 得

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x),$$

即将伯努利方程化为一阶非齐次线性微分方程.

此外, 当 $n > 0$ 时, 该方程还有解 $y = 0$.

例如 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \cdot y^2$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

分析 该方程为 $n = 2$ 时的伯努利方程.

解 令 $y^{1-2} = y^{-1} = z$, 代入原微分方程, 得一阶非齐次线性微分方程

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2},$$

其通解为

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] \\ &= x \left[\int \left(-\frac{1}{x^3} \right) dx + C \right] = \frac{1}{2x} + Cx. \end{aligned}$$

将 $z = y^{-1}$ 代入, 得 $y = \frac{2x}{1 + 2Cx^2}$.

由 $y(1) = 1$, 得 $C = \frac{1}{2}$, 故所求特解为 $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

五、全微分方程(仅数学一要求)

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad \textcircled{1}$$

当 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 时, 称式 ① 为全微分方程.

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 知存在 $u(x, y)$, 使得

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

故式 ① 的通解为 $u(x, y) = C$.

求 $u(x, y)$ 有三种方法:

(1) 凑微分法.

(2) 公式法. 利用公式: $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$.

(3) 积分法. 由 $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 及全微分的定义, 可知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y),$$

通过积分求出 $u(x, y)$.

例如 求微分方程 $(y - x^2)dx + (x - 1)dy = 0$ 的通解.

分析 由 $P = y - x^2$, $Q = x - 1$, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, 知该方程为全微分方程.

解法1 凑微分法. 由于

$$\begin{aligned} (y - x^2)dx + (x - 1)dy &= ydx + xdy - x^2dx - dy \\ &= d(xy) - d\left(\frac{x^3}{3}\right) - dy = d\left(xy - \frac{x^3}{3} - y\right), \end{aligned}$$

故所求通解为

$$xy - \frac{x^3}{3} - y = C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

解法2 公式法. 取 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy \\ &= \int_0^x (-x^2)dx + \int_0^y (x - 1)dy \\ &= -\frac{x^3}{3} + xy - y, \end{aligned}$$

故所求通解为

$$-\frac{x^3}{3} + xy - y = C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

解法3 积分法. 由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = y - x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = x - 1,$$

得

$$u = \int (y - x^2)dx + \varphi(y) = xy - \frac{x^3}{3} + \varphi(y),$$

又由 $\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x - 1$, 得 $\varphi'(y) = -1$, 积分得 $\varphi(y) = -y + C_1$, 故

$$u(x, y) = xy - \frac{x^3}{3} - y + C_1,$$

即通解为

$$u(x, y) = xy - \frac{x^3}{3} - y + C_1 = C_2,$$

整理, 得通解为

$$xy - \frac{x^2}{3} - y = C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

典型例题分析

题型一 微分方程的基本概念与性质

例 1 已知下列各曲线族(C, C_1, C_2 为任意常数), 求出它们对应的微分方程:

(1) $(x - C)^2 + y^2 = 1$; (2) $xy = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

分析 对曲线族方程两边同时求导, 再与原方程联立, 消去任意常数即可.

解 (1) 方程 $(x - C)^2 + y^2 = 1$ 两边同时对 x 求导, 得

$$2(x - C) + 2yy' = 0,$$

即 $x - C = -yy'$, 代入 $(x - C)^2 + y^2 = 1$, 得所求微分方程为

$$y^2 y'^2 + y^2 = 1.$$

(2) 方程 $xy = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 两边同时对 x 求导, 得

$$y + xy' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}, \quad \text{①}$$

式 ① 两边同时对 x 求导, 得

$$y' + y' + xy'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} = xy,$$

故所求微分方程为 $2y' + xy'' = xy$.

例 2 设 y_1, y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的两个解, 若常数 λ, μ , 使得 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该微分方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是对应齐次微分方程的解, 求 λ 和 μ 的值.

解 依题设, 可知 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的解, 故

$$(\lambda y_1 - \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = 0,$$

整理, 得

$$\lambda[y_1' + P(x)y_1] - \mu[y_2' + P(x)y_2] = 0,$$

又由已知, 得 $(\lambda - \mu)Q(x) = 0$, 由于 $Q(x)$ 不恒为 0, 故

$$\lambda - \mu = 0. \quad \text{①}$$

由 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解, 可知

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = Q(x),$$

整理, 得

$$\lambda[y_1' + P(x)y_1] + \mu[y_2' + P(x)y_2] = Q(x),$$

又由已知, 得 $(\lambda + \mu)Q(x) = Q(x)$, 由于 $Q(x)$ 不恒为 0, 故

$$\lambda + \mu = 1. \quad \text{②}$$

联立式 ① 和式 ②, 得 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

注 若 y_1, y_2 是非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的两个解, 则 $k_1 y_1 + k_2 y_2$ 是该方程的解的充分必要条件是 $k_1 + k_2 = 1$; $k_1 y_1 + k_2 y_2$ 是对应齐次线性微分方程的解的充分必要条件是 $k_1 + k_2 = 0$. 对高阶线性微分方程有类似的结论.

题型二 一阶微分方程的求解

例 3 求微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的特解.

解 方程可变形为

$$y' + \frac{2}{x}y = \ln x.$$

该方程为一阶线性微分方程,其通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{x^2} \left(\int x^2 \ln x dx + C \right) \\ &= \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x + C \cdot \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$, 得 $C = 0$, 故所求特解为 $y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x$.

注 ① 本题是一阶线性微分方程的基本题,可按通解公式求.

② 本题也可以用首次积分法求.

方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 两端同时乘以 x , 得

$$x^2 y' + 2xy = x^2 \ln x,$$

即 $(x^2 y)' = x^2 \ln x$, 两边同时积分, 有

$$x^2 y = \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C,$$

再代入初始条件, 可得 $y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x$.

例 4 求微分方程 $y dx + (x - 3y^2) dy = 0$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

解 由 $y(1) = 1$, 知 $y \neq 0$, 故 $y dx + (x - 3y^2) dy = 0$ 可变形为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y} x = 3y.$$

解此线性微分方程, 得通解为

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(\int 3y e^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right) \\ &= \frac{1}{y} \left(\int 3y^2 dy + C \right) = y^2 + \frac{C}{y}. \end{aligned}$$

由 $y(1) = 1$, 得 $C = 0$, 故 $y = \sqrt{x}$.

注 ① 从已知方程中解得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x - 3y^2}$, 该方程不是可分离变量方程, 也不是齐次方程、一阶线性方程. 对这类方程, 一般可考虑将 $\frac{dy}{dx}$ 化为 $\frac{dx}{dy}$, 即视 y 为自变量, x 为未知函数, 或利用变量替换将其化为已知类型的方程. 例如, $y' \sec^2 y + \frac{x}{1+x^2} \tan y = x$ 可变形为 $(\tan y)' + \frac{x}{1+x^2} \tan y = x$, 令 $\tan y = u$, 则 $u' + \frac{x}{1+x^2} u = x$, 此为一阶线性微分方程.

② 对考数学一的同学, 方程 $y dx + (x - 3y^2) dy = 0$ 可按如下方法求解:

记 $P = y, Q = x - 3y^2$, 则由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, 知原微分方程是全微分方程, 故可以通过凑微分法求 $u(x, y)$. 因为

$$y dx + x dy - 3y^2 dy = d(xy) - d(y^3) = d(xy - y^3),$$

所以通解为 $xy - y^3 = C$, 由 $y(1) = 1$, 得 $C = 0$, 故 $y = \sqrt{x}$.

例 5 已知 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y \Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是比 Δx 高阶的无穷小, $y(0) = \pi$, 求 $y = y(x)$.

分析 要求 $y = y(x)$, 依题设, 写出 $y(x)$ 满足的微分方程.

解 由 $\Delta y = \frac{y \Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x},$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}. \quad ①$$

当 $y \neq 0$ 时, 分离变量得 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2}$, 两边同时积分, 有

$$\ln |y| = \arctan x + C_1,$$

故 $y = \pm e^{C_1 \arctan x}$, 令 $C = \pm e^{C_1}$, 得 $y = Ce^{\arctan x}$ ($C \neq 0$).

又由于 $y = 0$ 是方程 ① 的解, 故方程 ① 的通解为 $y = Ce^{\arctan x}$ (C 为任意常数).

由 $y(0) = \pi$, 得 $C = \pi$, 故 $y(x) = \pi e^{\arctan x}$.

例 6 设微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$ 试求在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数

$y = y(x)$, 使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足所给方程, 且 $y(0) = 0$.

分析 由于 $\varphi(x)$ 为分段函数, 故可分别求出当 $x < 1$ 和 $x > 1$ 时满足条件的 $y(x)$, 然后利用 $y = y(x)$ 的连续性求解.

解 当 $x < 1$ 时, $y' - 2y = 2$, 其通解为

$$y = C_1 e^{2x} - 1 \quad (x < 1),$$

又由 $y(0) = 0$, 得 $C_1 = 1$, 故 $y = e^{2x} - 1$ ($x < 1$).

当 $x > 1$ 时, $y' - 2y = 0$, 其通解为

$$y = C_2 e^{2x} \quad (x > 1),$$

要使 $y(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 则需

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} C_2 e^{2x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{2x} - 1),$$

即 $C_2 = 1 - e^{-2}$, 故 $y = (1 - e^{-2})e^{2x}$ ($x > 1$).

若补充定义 $y(1) = e^2 - 1$, 则所求函数为

$$y = \begin{cases} e^{2x} - 1, & x \leq 1, \\ (1 - e^{-2})e^{2x}, & x > 1. \end{cases}$$

例 7 (仅数学一要求) 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = (\ln x) \cdot y^2$ 的通解.

解 所给微分方程为伯努利方程. 当 $y \neq 0$ 时, 令 $y^{1-2} = y^{-1} = z$, 代入原方程, 得

$$z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

该方程为一阶线性微分方程, 其通解为 $z = x \left(C - \frac{1}{2} \ln^2 x \right)$.

将 $z = y^{-1}$ 代入, 得原微分方程的通解为 $y = \frac{1}{x \left(C - \frac{1}{2} \ln^2 x \right)}$.

此外, 原微分方程还有解 $y = 0$.

例 8 设 $f(x)$ 是以 w 为周期的连续函数, 证明: 线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + ky = f(x) \quad (k \text{ 为常数})$$

存在以 w 为周期的特解, 并求其解.

分析 先求出通解, 再证明通解是以 w 为周期的函数.

解 所给微分方程的通解为

$$y(x) = e^{-kx} \left[\int_{x_0}^x e^{kt} f(t) dt + C \right],$$

其中 x_0 是任意固定值, 假设 $y(x)$ 是以 w 为周期的周期函数, 则

$$y(x+w) = e^{-kx} e^{-kw} \left[\int_{x_0}^{x+w} e^{kt} f(t) dt + C \right].$$

令 $w+u=t$, 由题意, 有 $f(t) = f(w+u) = f(u)$, 故

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x+w} e^{kt} f(t) dt &= \int_{x_0-w}^x e^{k(w+u)} f(u) du \\ &= e^{kw} \left[\int_{x_0-w}^{x_0} e^{ku} f(u) du + \int_{x_0}^x e^{ku} f(u) du \right], \end{aligned}$$

从而有

$$y(x+w) = e^{-kx} \int_{x_0}^x e^{ku} f(u) du + e^{-kx} e^{-kw} \int_{x_0-w}^{x_0} e^{ku} f(u) du + C e^{-kx} e^{-kw}.$$

要使 $y(x+w) = y(x)$, 则常数 C 应满足 $C e^{-kw} + \int_{x_0-w}^{x_0} e^{ku} f(u) du = C$, 解得

$$C = \frac{1}{1 - e^{-kw}} \int_{x_0-w}^{x_0} e^{ku} f(u) du,$$

故原线性微分方程存在以 w 为周期的解, 且解为

$$y = e^{-kx} \left[\int_{x_0}^x e^{kt} f(t) dt + \frac{1}{1 - e^{-kw}} \int_{x_0-w}^{x_0} e^{ku} f(u) du \right].$$

注 由于在一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right]$$

中, 不定积分表示的是一个原函数, 故 $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx$ 可以写成 $\int_{x_0}^x Q(x) e^{\int P(x) dx} dx$.

第三节 可降阶的高阶微分方程 (仅数学一、数学二要求)

内容与方法提要

下面列举一些可降阶的高阶微分方程.

(1) $y^{(n)} = f(x)$. 积分 n 次后可求得通解.

(2) $y'' = f(x, y')$ 不显含 y .

令 $y' = p$, 则 $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$, 将其代入原微分方程, 使其化为一阶微分方程

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

(3) $y'' = f(y, y')$ 不显含 x .

令 $y' = p$, 则

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

将其代入原微分方程, 使其化为一阶微分方程 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$.

典型例题分析

例 1 求微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的解.

分析 由于方程不显含 x , 故视 y 为自变量.

解 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程, 得

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0,$$

解得 $p = 0$ 或 $y \frac{dp}{dy} + p = 0$.

当 $p = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = 0$ 时, 由于它不满足 $y'(0) = \frac{1}{2}$, 故舍去, 从而有

$$y \frac{dp}{dy} + p = 0,$$

分离变量, 得 $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$, 两边同时积分, 得 $py = C_1$, 即 $y \frac{dy}{dx} = C_1 (C_1 \neq 0)$.

由 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$, 得 $C_1 = \frac{1}{2}$, 故 $ydy = \frac{1}{2}dx$, 两边同时积分, 得 $y^2 = x + C_2$, 又由 $y(0) = 1$, 得 $C_2 = 1$, 故 $y = \sqrt{x+1}$.

注 本题中 $yy'' + y'^2 = 0$ 可化为 $(yy')' = 0$, 即 $yy' = C_1$.

例 2 求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足 $y'(1) = y(1) = 1$ 的特解.

解 方程不显含 y . 令 $y' = p$, 则 $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$, 代入方程, 得

$$\frac{dp}{dx}(x + p^2) = p,$$

即 $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x + p^2}$, 变形为

$$\frac{dx}{dp} - \frac{1}{p}x = p,$$

该方程为一阶线性微分方程, 其通解为

$$x = e^{\int \frac{1}{p} dp} \left(\int p e^{-\int \frac{1}{p} dp} dp + C_1 \right) = p(p + C_1).$$

由 $y'(1) = 1$, 得 $C_1 = 0$, 故

$$p^2 = x,$$

又由于 $y'(1) = 1 > 0$, 故应取 $p = \sqrt{x}$, 即 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$, 解得 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2$.

由 $y(1) = 1$, 得 $C_2 = \frac{1}{3}$, 故所求特解为 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$.

第四节 高阶线性微分方程

内容与方法提要

一、线性微分方程解的结构

设

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad [f(x) \text{ 不恒为 } 0], \quad ①$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad ②$$

方程 ① 称为非齐次线性微分方程, 方程 ② 称为齐次线性微分方程.

1. 齐次线性微分方程的通解

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 ② 的任意两个线性无关的解, 则方程 ② 的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

2. 齐次线性微分方程解的叠加原理

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 ② 的任意两个解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 仍是方程 ② 的解, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

说明 当 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 不恒为常数时, $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关.

3. 非齐次线性微分方程的通解

方程 ① 的通解为

$$y = Y + y^*,$$

其中 Y 是对应齐次线性微分方程的通解, y^* 是非齐次线性微分方程的一个特解.

4. 非齐次线性微分方程解的叠加原理

设 $y_1(x), y_2(x)$ 分别是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ 与 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ 的解, 则 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ 的解, 其中 k_1, k_2 为常数.

非齐次线性方程的任两个解 $y_1(x), y_2(x)$ 之差 $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应齐次线性微分方程的解.

说明 齐次线性微分方程与非齐次线性微分方程的叠加原理可以代入方程验证. 以上结论对二阶以上的线性微分方程也成立.

二、常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0,$$

其特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$, 设方程的根为 r_1, r_2 .

当 $r_1 \neq r_2$ 时, 通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

当 $r_1 = r_2$ 时, 通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}$.

当 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ 时, 通解 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

说明 对二阶以上的常系数齐次线性微分方程有类似的结果.

例如 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

解 其特征方程为 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$, 即 $r^2(r^2 - 2r + 5) = 0$, 解得

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = 1 + 2i, \quad r_4 = 1 - 2i,$$

故所求通解为

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x e^{0 \cdot x} + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x) \\ &= C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x), \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数.

三、常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

求解步骤:

(1) 求出对应齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解 Y .

(2) 用待定系数法求出非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的一个特解 y^* .

(3) 通解 $y = Y + y^*$.

① 当 $f(x) = Q(x)e^{\lambda x}$ 时, 设特解 $y^* = x^k P(x)e^{\lambda x}$, 其中按 λ 不是 $r^2 + pr + q = 0$ 的根、是单根、是二重根, k 分别取 0, 1, 2.

说明 $P(x)$ 是与 $Q(x)$ 次数相同的多项式, 将 y^* 代入非齐次方程, 比较两端, 求出 $P(x)$, 便可得特解 y^* .

② 当 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos wx + Q_n(x) \sin wx]$ 时, 设特解

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos wx + R_m^{(2)}(x) \sin wx],$$

其中按 $\lambda \pm iw$ 不是 $r^2 + pr + q = 0$ 的根、是特征根, k 分别取 0, 1. $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, 但

其系数不同, $m = \max\{l, n\}$.

说明 将 y^* 代入非齐次方程, 比较两端, 求出 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$, 便可以求得特解 y^* .

四、欧拉方程(仅数学一要求)

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

称为 n 阶欧拉方程.

(1) 当 $x > 0$ 时, 令 $x = e^t$, 则 $t = \ln x$, 故

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \\ &\vdots\end{aligned}$$

若引入记号 $D = \frac{d}{dt}$, 则

$$xy' = Dy, x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y, \cdots,$$

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y, \cdots, x^n y^{(n)} = D(D-1)\cdots(D-n+1)y,$$

故可将欧拉方程化为关于 $y(t)$ 的常系数线性微分方程.

(2) 当 $x < 0$ 时, 令 $x = -e^t$, 同理可得.

例如 求 $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ 的通解.

解 令 $x = e^t$, 则 $t = \ln x$, 故

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dt^2},\end{aligned}$$

代入原方程, 化简得

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4y = 0.$$

解得通解为

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

典型例题分析

题型一 线性微分方程解的性质与结构

例 1 已知二阶非齐次线性微分方程的三个解为

$$y_1 = x - (x^2 + 1), \quad y_2 = 3e^x - (x^2 + 1), \quad y_3 = 2x - e^x - (x^2 + 1),$$

求该方程满足 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解.

解 依题设, $y_2 - y_1, y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的两个线性无关解, 故该方程的通解为

$$\begin{aligned}y &= C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_3 - y_1) + y_1 \\ &= C_1(3e^x - x) + C_2(x - e^x) + x - (x^2 + 1),\end{aligned}$$

由 $y(0) = y'(0) = 0$, 得 $C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = -\frac{5}{2}$, 故特解为

$$y = e^x - x^2 - x - 1.$$

例 2 以 $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x$ 为通解形式的常系数线性齐次微分方程为_____.

解 由通解表达式, 知 $r = 0$ 是特征方程 $r^3 + pr^2 + qr + s = 0$ 的单根, $r = 1$ 是其二重特征根, 故特征方程为 $r(r-1)^2 = 0$, 即

$$r^3 - 2r^2 + r = 0,$$

故所求微分方程为 $y''' - 2y'' + y' = 0$.

题型二 高阶线性微分方程的求解

例 3 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的通解.

解 先求对应齐次方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解, 特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 解得 $r_1 = -1, r_2 = 3$, 故通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

由于非齐次项 $3x + 1 = e^{0 \cdot x}(3x + 1)$, 且 $\lambda = 0$ 不是特征根, 故取 $k = 0$, 令特解为

$$y^* = x^0 \cdot (ax + b) \cdot e^{0 \cdot x} = ax + b,$$

求导得 $(y^*)' = a, (y^*)'' = 0$, 代入原方程, 得

$$-3ax - (2a + 3b) = 3x + 1,$$

比较两端同次幂的系数, 得

$$\begin{cases} -3a = 3, \\ -2a - 3b = 1, \end{cases}$$

解得 $a = -1, b = \frac{1}{3}$, 故 $y^* = -x + \frac{1}{3}$, 从而原微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{1}{3},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 4 求方程 $y'' - 5y' + 6y = x e^{2x}$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 解得 $r_1 = 2, r_2 = 3$, 故对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

由已知, $\lambda = 2$ 是特征方程的单根, 故取 $k = 1$, 令特解为 $y^* = x(ax + b)e^{2x}$, 将 y^* 代入原方程, 比较两端同次幂的系数可得

$$\begin{cases} -2a = 1, \\ 2a - b = 0, \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{1}{2}, b = -1$, 故 $y^* = -x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{2x}$, 从而原微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{2x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 5 求方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的一个特解.

解 特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 特征根为 $r_1 = i, r_2 = -i$.

由于 $x \cos 2x = x \cdot e^{0 \cdot x} \cos 2x$, 且 $0 \pm 2i$ 不是特征根, 故取 $k = 0$, 令特解为

$$y^* = x^0[(ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x],$$

将 y^* 代入原方程, 得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x \cos 2x,$$

比较两端, 得

$$\begin{cases} -3a = 1, \\ -3b + 4c = 0, \\ -3c = 0, \\ -3d - 4a = 0, \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = 0$, $d = \frac{4}{9}$, 故原方程的一个特解为

$$y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$$

注 在此题的非齐次项 $x \cos 2x$ 中, 只有 $\cos 2x$, 没有 $\sin 2x$, 但令特解时, 应同时含有 $\cos 2x$ 与 $\sin 2x$ 项.

例 6 求方程 $y'' + y = e^x + x \cos 2x$ 的一个特解.

解 原方程的解可以看成以下两个方程解的叠加:

$$y'' + y = e^x, \quad (1)$$

$$y'' + y = x \cos 2x. \quad (2)$$

由特征方程 $r^2 + 1 = 0$, 得 $r_1 = i, r_2 = -i$.

由方程 (1), 知 $\lambda = 1$ 不是特征根, 故取 $k = 0$. 令 $y_1^* = x^0 A e^x$, 代入方程 (1), 可得 $A = \frac{1}{2}$, 又由于方

程 (2) 的特解为 $y_2^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x$ (见本节例 5), 故所求方程的一个特解为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$$

例 7 (1) 方程 $y'' - y = \sin^2 x$ 有形如 $y^* = \underline{\hspace{2cm}}$ 的特解;

(2) 方程 $y''' - 2y'' + y' = x^2 + 1$ 有形如 $y^* = \underline{\hspace{2cm}}$ 的特解.

解 (1) 由于

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x,$$

故将原方程拆成两个方程

$$\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{2} \cdot e^{0 \cdot x}, \\ y'' - y = -\frac{1}{2} \cos 2x. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 特征根为 $r_1 = -1, r_2 = 1$.

在方程 (1) 中, 由于 $\lambda = 0$ 不是特征根, 故取 $k = 0$, 令特解 $y_1^* = x^0 A_1 e^{0 \cdot x}$.

在方程 (2) 中, 由于 $-\frac{1}{2} \cos 2x = e^{0 \cdot x} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)$, 且 $0 \pm 2i$ 不是特征根, 故取 $k = 0$, 令特解

$$y_2^* = x^0 e^{0 \cdot x} (A_2 \cos 2x + A_3 \sin 2x),$$

故所求方程的特解为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = A_1 + A_2 \cos 2x + A_3 \sin 2x.$$

(2) 特征方程为 $r^3 - 2r^2 + r = 0$, 特征根为 $r_1 = 0, r_2 = r_3 = 1$.

又由于 $x^2 + 1 = e^{0 \cdot x} (x^2 + 1)$, 且 $\lambda = 0$ 是单根, 故取 $k = 1$, 令特解

$$y^* = x^1 \cdot (ax^2 + bx + c) \cdot e^{0 \cdot x} = x(ax^2 + bx + c).$$

注 二阶以上的常系数非齐次线性微分方程有与二阶方程类似的结果.

题型三 利用变量替换求解微分方程

例 8 求下列方程的通解: (1) $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$; (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$.

(1) **解** 原方程可变形为 $2yy' - \frac{1}{x+1}y^2 = -\frac{x}{x+1}$, 即

$$(y^2)' - \frac{1}{x+1}y^2 = -\frac{x}{x+1}.$$

令 $y^2 = u$, 得 $u' - \frac{1}{x+1}u = -\frac{x}{x+1}$, 该方程为一阶线性方程, 其通解为

$$\begin{aligned} u = y^2 &= e^{\int \frac{1}{x+1} dx} \left[\int \left(-\frac{x}{x+1} \right) \cdot e^{-\int \frac{1}{x+1} dx} dx + C \right] \\ &= C(x+1) - (x+1)\ln(x+1) - 1. \end{aligned}$$

(2) **解法1** 令 $x+y=u$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$, 代入原方程得

$$\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}.$$

分离变量, 当 $u+1 \neq 0$ 时, 有 $\int \frac{u}{u+1} du = \int dx$, 即 $u - \ln|u+1| = x - C_1$, 将 $u = x+y$ 代入得

$$x+y+1 = \pm e^{C_1} \cdot e^y = Ce^y \quad (C = \pm e^{C_1}).$$

故

$$x = Ce^y - y - 1 \quad (C \text{ 为不为零的任意常数}).$$

当 $u+1=0$ 时, 即 $x+y=-1$, 有 $\frac{du}{dx}=0$. 故 $u=C_2$, 即 $x+y=C_2$, 由 $x+y=-1$ 知 $C_2=-1$.

得 $x+y=-1$.

当 $C=0$ 时, 有 $x+y=-1$, 所以原方程的通解为

$$x = Ce^y - y - 1 \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

解法2 原方程改写为 $\frac{dx}{dy} = x+y$, 视 y 为自变量, 为一阶线性方程, 其通解为

$$\begin{aligned} x &= e^{\int dy} \left(\int y e^{-\int dy} dy + C \right) \\ &= Ce^y - y - 1 \quad (C \text{ 为任意常数}). \end{aligned}$$

例9 (数学三不要求) 设 $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ 是微分方程 $xy'' + 2y' + xy = 0$ 的一个解, 求该方程的通解.

分析 所给方程为变系数二阶线性齐次方程, 要求其通解, 只需求出两个线性无关的解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, 使得通解为 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

由已知, $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, 只需再求一个解 y_2 与 y_1 线性无关即可.

解 令 $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2}{\frac{\sin x}{x}} = u$ 不恒为常数, 即设 $y_2 = u \cdot \frac{\sin x}{x}$ 是原方程的解, 求出 y_2', y_2'' , 代入原方程, 化

简得

$$u'' + \frac{2\cos x}{\sin x}u' = 0.$$

该方程为不显含 u 的二阶方程, 可解得 $u = -C_1 \frac{\cos x}{\sin x} + C_2$.

为保证 y_1 与 y_2 线性无关, 只需取 $u = \frac{\cos x}{\sin x}$, 则

$$y_2 = u \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x},$$

故原方程的通解为 $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$.

例10 利用变换 $t = \tan x$, 将方程

$$\cos^4 x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\cos^2 x (1 - \sin x \cos x) \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

化简为 y 关于 t 的微分方程, 并求原方程的通解.

分析 此题所用变换 $t = \tan x$ 为已知条件, 属于换自变量的题.

解 由 $t = \tan x$, 得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dy}{dt}$, 且

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}, \end{aligned}$$

代入原方程, 化简得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = t, \quad (1)$$

其特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 特征根为 $r_1 = r_2 = -1$, 由于 $\lambda = 0$ 不是特征根, 故取 $k = 0$. 令特解 $y^* = t^0 \cdot (at + b)$, 代入方程 (1), 可解得 $a = 1, b = -2$, 故方程 (1) 的通解为

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + t - 2. \quad (2)$$

将 $t = \tan x$ 代入式 (2), 得原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 \tan x)e^{-\tan x} + \tan x - 2.$$

例11 设 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有二阶连续导数, $y' \neq 0$, 且 $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy} \right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 在 (1) 的基础上, 求变换后的方程满足 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的特解.

解 (1) 将 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, $\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{y''}{y'^3}$ 代入方程, 化简得

$$y'' - y = \sin x. \quad (1)$$

(2) 方程 (1) 对应的齐次方程 $y'' - y = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

令方程 (1) 的特解为 $y^* = A \cos x + B \sin x$, 代入方程 (1) 可求得 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$, 故方程 (1) 的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$, 得 $C_1 = 1, C_2 = -1$, 故所求特解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

例12 (数学三不要求) 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \varphi(t) \end{cases} (t > -1)$ 确定, $\varphi(t)$ 具有二阶

导数, 且 $\varphi(1) = \frac{5}{2}$, $\varphi'(1) = 6$, 已知 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 求 $\varphi(t)$.

解 此题变换由参数方程给定, 实际上是换自变量 x 为 t .

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{x'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{2(1+t)}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(1+t)\varphi''(t) - \varphi'(t)}{2(1+t)^2} \cdot \frac{1}{2(1+t)} = \frac{(1+t)\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4(1+t)^3}.\end{aligned}$$

依题设, 可知

$$\frac{(1+t)\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)} \quad (t > -1),$$

整理, 得

$$\varphi''(t) - \frac{1}{1+t}\varphi'(t) = 3(1+t),$$

该方程为可降阶的微分方程.

令 $\varphi'(t) = u$, 则 $u' - \frac{1}{1+t}u = 3(1+t)$, 解一阶线性微分方程, 得

$$u = e^{\int \frac{1}{1+t} dt} \left[\int 3(1+t)e^{-\int \frac{1}{1+t} dt} dt + C_1 \right] = (1+t)(3t + C_1).$$

由 $u(1) = \varphi'(1) = 6$, 得 $C_1 = 0$, 故 $\varphi'(t) = u = 3t(1+t)$, 积分得

$$\varphi(t) = \frac{3}{2}t^2 + t^3 + C_2.$$

又由 $\varphi(1) = \frac{5}{2}$, 得 $C_2 = 0$, 故 $\varphi(t) = \frac{3}{2}t^2 + t^3$.

题型四 微分方程的应用

例13 设有连接点 $O(0,0)$ 和点 $A(1,1)$ 的向上凸的曲线 $\widehat{OA}$, 对 $\widehat{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$, 曲线弧 $\widehat{OP}$ 与直线 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2 , 求曲线弧 $\widehat{OA}$ 的方程.

解 如图 9-1 所示, 设曲线弧 $\widehat{OA}$ 的方程为 $y = y(x)$ ($0 \leq x \leq 1$),

依题设, 有 $\int_0^x y dx - \frac{xy}{2} = x^2$, 两边同时求导, 得

$$y - \frac{y + xy'}{2} = 2x,$$

即 $\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = -4, \\ y(1) = 1, \end{cases}$ 解方程, 得

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int (-4) \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = Cx - 4x \ln x.$$

由 $y(1) = 1$, 得 $C = 1$, 故所求曲线弧 $\widehat{OA}$ 的方程为 $y = x - 4x \ln x$.

注 ① $y = x - 4x \ln x$ 在 $x = 0$ 处无定义, 但由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - 4x \ln x \rightarrow 0$, 故 $x = 0$ 是函数的可去间断点, 若令 $y(0) = 0$, 则积分曲线过原点.

② 由题设, 曲线过 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$. 若将 $y(0) = 0$ 作为初始条件, 则从通解中不能确定常数 C . 事实上, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (Cx - 4x \ln x) = 0$ 对任意 C 值均成立, 即通解中的任何曲线均过 $O(0,0)$, 可知条件 $y(0) = 0$ 不满足解的唯一性要求, 故不能将其作为初始条件.

例14 设可导函数 $y = f(x)$ 且 $f(x) > 0$, 已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0$, $x = 1$ 及 $x = t$ ($t > 1$) 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积值是曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线方程.

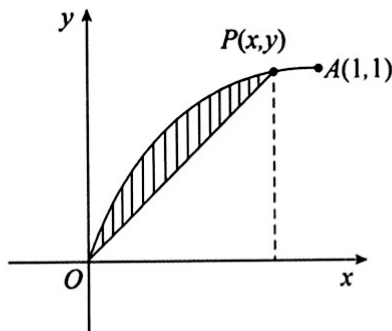


图 9-1

解 依题设, 旋转体的体积为 $V = \pi \int_1^t f^2(x) dx, t > 0$.

曲边梯形的面积为 $S = \int_1^t f(x) dx, t > 1$.

由已知, 得 $V = \pi t \cdot S$, 即

$$\pi \int_1^t f^2(x) dx = \pi t \int_1^t f(x) dx.$$

两边同时对 t 求导, 得

$$f^2(t) = \int_1^t f(x) dx + t f(t), \quad (1)$$

式①两边再同时对 t 求导, 得

$$2f(t)f'(t) = f(t) + f(t) + t f'(t),$$

即 $[2f(t) - t]f'(t) = 2f(t)$, 改写成 $(2y - t)y' = 2y$, 可变形为

$$\frac{dt}{dy} + \frac{1}{2y}t = 1.$$

该方程为一阶线性方程, 解得 $t = \frac{2}{3}y + Cy^{-\frac{1}{2}}$.

在式①中, 令 $t = 1$, 有 $f^2(1) - f(1) = 0$, 又由 $f(t) > 0$, 可知 $f(1) = 1$, 故 $C = \frac{1}{3}$, 从而有 $t = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{2}}$, 即所求曲线方程为 $2y + \frac{1}{\sqrt{y}} - 3x = 0$.

例15 (数学三不要求) 设曲线 $y = y(x)$ 有二阶连续导数, $y''(x) > 0$, 其上任意一点 (x, y) 处的曲率 $K = \frac{1}{2y^2 \cos \alpha}$ ($\cos \alpha > 0$), 其中 α 为该曲线在相应点处的切线的倾角, 且该曲线在点 $(1, 1)$ 处取得极小值, 求曲线 $y = y(x)$.

解 由曲率公式及 $y''(x) > 0$, 知 $K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 又由于 α 为切线的倾角, 所以

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad (\cos \alpha > 0).$$

由已知条件, 得

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^2},$$

化简, 得

$$2y^2 y'' = (1+y'^2)^2. \quad (1)$$

又由 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处取得极小值, 知 $y(1) = 1, y'(1) = 0$. 方程①为不显含 x 的可降阶方程,

令 $y' = p$, 则 $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, 代入方程①得

$$2y^2 p \cdot \frac{dp}{dy} = (1+p^2)^2.$$

分离变量, 得 $\frac{2p dp}{(1+p^2)^2} = \frac{dy}{y^2}$, 积分, 得 $y = (p^2 + 1)(1 + yC_1)$.

由 $y(1) = 1, y'(1) = 0$, 得 $C_1 = 0$, 故 $y = p^2 + 1$, 即

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y-1}.$$

分离变量, 得 $\frac{dy}{\pm\sqrt{y-1}} = dx$ [由 $y''(x) > 0$, 知 $y \neq 1$], 积分, 得 $\pm 2\sqrt{y-1} = x + C_2$. 由 $y(1) = 1$, 得

$$C_2 = -1, \text{ 故 } \pm 2\sqrt{y-1} = x - 1, \text{ 即 } y = 1 + \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

例16 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$, $f(0) = b$, $f'(0) = c$, 求 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

解 已知方程的特征方程为 $r^2 + ar + 1 = 0$, 该方程的判别式 $\Delta = a^2 - 4$.

当 $a > 2$ 时, $r^2 + ar + 1 = 0$ 有两个不同实根 $r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, r_1, r_2 均小于零. 故已知方程的通解为

$$f(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}),$$

$$\text{则 } f'(x) = c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x}.$$

当 $a = 2$ 时, $r^2 + 2r + 1 = 0$ 有两个相同实根 $r_{1,2} = -1$. 故已知方程的通解为

$$f(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-x},$$

$$\text{则 } f'(x) = (c_2 - c_1 - c_2 x) e^{-x}.$$

当 $0 < a < 2$ 时, $r^2 + ar + 1 = 0$ 的根为 $r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm ki$, 其中 $k = \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$. 故已知方程的通解为

$$f(x) = e^{-\frac{a}{2}x} (c_1 \cos kx + c_2 \sin kx),$$

且

$$f'(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left[\left(-\frac{a}{2}c_1 + c_2 k \right) \cos kx + \left(-\frac{a}{2}c_2 - c_1 k \right) \sin kx \right].$$

以上三种情形, 当 $a > 0$ 时, 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 故

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} [-f''(x) - af'(x)] dx = [-f'(x) - af(x)] \Big|_0^{+\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f'(x) - af(x)] - [-f'(0) - af(0)] \\ &= f'(0) + af(0) = c + ab. \end{aligned}$$

例17 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的所有解在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 则 ().

A. $a < 0, b > 0$

B. $a > 0, b > 0$

C. $a = 0, b > 0$

D. $a = 0, b < 0$

解 $y'' + ay' + by = 0$ 的特征方程为 $r^2 + ar + b = 0$.

当 $\Delta = a^2 - 4b > 0$ 时, 特征方程有两个不同实根 r_1, r_2 , 此时 r_1, r_2 至少有一个非零实根, 原方程的通解为 $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$, 取 $c_1 = c_2 = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{r_1 x} + e^{r_2 x}) = +\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{r_1 x} + e^{r_2 x}) = +\infty$, 故解在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

当 $\Delta = a^2 - 4b = 0$ 时, 特征方程有两个相等实根 r , 此时原方程的通解为 $y = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$, 取 $c_1 = 0, c_2 = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{rx} = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{rx} = \infty$, 故解在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

当 $\Delta = a^2 - 4b < 0$ 时, 特征方程有一对共轭复数根 $r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$, 原方程的解为

$$y = e^{-\frac{a}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x \right).$$

当 $a \neq 0$ 时, 取 $c_1 = 1, c_2 = 0$, 知解 $y = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

当 $a = 0$ 时, 原方程的解为 $y = c_1 \cos \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x$, 对任意常数 c_1, c_2 , 该解在

$(-\infty, +\infty)$ 内均有界. 此时 $a = 0, a^2 - 4b = -4b < 0$, 故 $a = 0, b > 0$. 选项 C 正确.

例18 设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x), g(x) = \int_0^x [1 - f(t)]dt + 1$, 且 $f(0) = 1$, 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} [g(x) - f(x)]dx$.

解 由 $f'(x) = g(x)$, 知

$$f''(x) = g'(x) = 1 - f(x), \quad f'(0) = g(0) = 1,$$

即 $f(x)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 1, \\ f(0) = f'(0) = 1, \end{cases} \quad \text{①}$$

特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 特征根为 $r_1 = i, r_2 = -i$.

由于 $1 = 1 \cdot e^{0 \cdot x}$, 且 $\lambda = 0$ 不是特征根, 故取 $k = 0$, 令特解

$$f^*(x) = x^0 A e^{0 \cdot x} = A,$$

代入式 ①, 可求得 $A = 1$, 故式 ① 的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1.$$

由 $f(0) = f'(0) = 1$, 得 $C_1 = 0, C_2 = 1$, 故 $f(x) = \sin x + 1$, 从而有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} [g(x) - f(x)]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} [f'(x) - f(x)]dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d[e^{-x} f(x)] = e^{-x} f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2e^{-\frac{\pi}{2}} - 1. \end{aligned}$$

例19 已知 $f(x)$ 连续且 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

解 由于

$$\int_0^x f(x-t)dt \xrightarrow{x-t=u} \int_x^0 f(u)d(-u) = \int_0^x f(u)du,$$

故已知等式可化为

$$\int_0^x f(u)du = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt + e^{-x} - 1.$$

两边同时对 x 求导, 得

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt + x f(x) - x f(x) - e^{-x},$$

即

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt - e^{-x}, \quad \text{①}$$

两边同时对 x 求导, 得 $f'(x) = f(x) + e^{-x}$.

在式 ① 两边同时令 $x = 0$, 得 $f(0) = -1$, 解初值问题

$$\begin{cases} f'(x) - f(x) = e^{-x}, \\ f(0) = -1, \end{cases}$$

得 $f(x) = -\frac{1}{2}e^x(e^{-2x} + 1)$.

例20 已知方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$ 有形如 $z = f(e^x \sin y)$ 的解, 求函数 z .

解 记 $z = f(e^x \sin y) = f(u)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x} \sin^2 y + f'(u)e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}\cos^2 y - f'(u)e^x \sin y.$$

代入原方程,得 $f''(u) - f(u) = 0$, 其特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -1$, 故通解为 $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$, 从而有

$$z = f(u) = f(e^x \sin y) = C_1 e^{e^x \sin y} + C_2 e^{-e^x \sin y}.$$

例21 (数学三不要求) 设子弹以 200 m/s 的速度射入厚 0.1 m 的木板, 其受到的阻力大小与子弹速度的平方成正比, 如果子弹穿出木板时的速度为 80 m/s, 求子弹穿过木板所用的时间.

解 设子弹射入木板的时刻为 $t = 0$, 子弹在木板中的位移 y 与时间 t 的关系为 $y = y(t)$. 依题意, 可知位移 $y(t)$ 满足牛顿第二定律 $F = ma$, 故可得初值问题

$$\begin{cases} my'' = -ky'^2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 200. \end{cases}$$

该方程为可降阶的二阶方程, 不显含 t .

令 $y' = p$, 则 $y'' = p' = \frac{dp}{dt}$, 记 $\mu = \frac{k}{m}$, 可得

$$p' = -\mu p^2.$$

分离变量并积分, 得 $p = \frac{1}{\mu t + C_1}$.

由 $p(0) = 200$, 得 $C_1 = \frac{1}{200}$, 故

$$y' = p = \frac{200}{200\mu t + 1}. \quad ①$$

两边同时积分, 得

$$y = \int \frac{200}{200\mu t + 1} dt = \frac{1}{\mu} \ln(200\mu t + 1) + C_2.$$

由 $y(0) = 0$, 得 $C_2 = 0$, 故

$$y = \frac{1}{\mu} \ln(200\mu t + 1). \quad ②$$

联立式 ① 和式 ② 消去 t , 得 $y = \frac{1}{\mu} \ln \frac{200}{y'}$. 再由 $y' = 80, y = 0.1$, 可得 $\mu = 10(\ln 5 - \ln 2)$, 故

$$t = \frac{3}{4\,000(\ln 5 - \ln 2)}.$$

注 牛顿第二定律 $F = ma$, 其中 a 表示加速度, m 表示质量.

$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, 利用复合函数求导法, 有

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy},$$

其中 y 表示位移, v 表示速度, t 表示时间.

由此题已知条件, 即子弹穿出木板时的速度为 80 m/s, 此题可列为一阶微分方程

$$mv \cdot \frac{dv}{dy} = -kv^2.$$

习题演练

一、选择题

(1) 设 $P(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则下列表达式中不能表示 $y' + P(x)y = 0$ 的通解的是().

A. $Ce^{-\int P(x)dx}$

B. $Ce^{-\int_0^x P(t)dt}$

C. $e^{-\int P(x)dx+C}$

D. $-Ce^{-\int P(x)dx}$

(2) 已知微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的两个不同特解为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$, 则该方程的通解可以表示为().

A. $y_1 + Cy_2$

B. $C_1y_1 + C_2y_2$

C. $C(y_2 - y_1)$

D. $y_1 + C(y_1 + y_2)$

(3) 设二阶常系数线性微分方程 $y'' + by' + y = 0$ 的每一个解 $y(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内都有界, 则实数 b 的取值范围为().

A. $b \geq 0$

B. $b \leq 0$

C. $b \leq 4$

D. $b \geq 4$

(4) 设 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2x$ 是三阶常系数齐次线性微分方程 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ 的两个解, 则().

A. $a = 2, b = 1, c = 0$

B. $a = 1, b = 0, c = 1$

C. $a = 1, b = 0, c = 0$

D. $a = -1, b = 0, c = 0$

(5) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为().

A. $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$

B. $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$

C. $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$

D. $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$

(6) 微分方程 $y'' + 2y' - 3y = e^{-x} + x$ 的特解形式为().

A. $axe^{-x} + bx + c$

B. $ae^{-x} + bx + c$

C. $ae^x + x(bx + c)$

D. $axe^{-x} + x(bx + c)$

二、填空题

(1) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解为_____.

(2) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足 $y(0) = 0$ 的特解为_____.

(3) 微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的一个特解为 $y = \cos 2x$, 则该方程满足 $y(0) = 2$ 的特解为_____.

(4) 若 $y_1 = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y_2 = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的两个解, 则 $Q(x) =$ _____.

(5) 设 $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^2e^{-x}$ 为某二阶常系数非齐次线性微分方程的通解, 则该方程为_____.

三、解答题

(1) 求方程 $xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$ 的通解.

(2) 求方程 $(1+y^2)dx = (\arctan y - x)dy$ 的通解.

(3) 求微分方程 $xy(1-xy') = x + yy'$ 满足 $y(1) = 2$ 的特解.

(4) (仅数学一、数学二要求) 求 $xy'' = y' \ln y'$ 满足 $y(1) = 0, y'(1) = e$ 的特解.

(5) (仅数学一、数学二要求) 求微分方程 $y'' = \frac{1+y'^2}{2y}$ 的通解.

(6) 求微分方程 $y'' + y' = 2x^2 + 1$ 的通解.

(7) 求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

(8) 设 $f(x)$ 满足 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$.

(9)(I) 设 $a(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是非负连续函数, 证明: 当且仅当 $\int_0^{+\infty} a(t)dt$ 发散时, 微分方程 $\frac{dx}{dt} + a(t)x = 0$ 的每一个解 $x(t)$ 都满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$;

(II) 设 $a > 0, f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续有界, 证明: 方程 $\frac{dx}{dt} + ax = f(t) (t \geq 0)$ 的所有解在 $[0, +\infty)$ 上有界.

(10) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(x) = \int_0^x f(1-t)dt + 1$, 求 $f(x)$.

(11) 设 $f(x) = x \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 连续, 求 $f(x)$.

(12) 利用变换 $y = \frac{u}{\cos x}$, 求方程 $y'' \cos x - 2y' \sin x + 3y \cos x = e^x$ 的通解.

(13) 已知 $y'' + (x + e^{2y})y'^3 = 0$.

(I) 若将 x 视为因变量, y 视为自变量, 化简已知方程;

(II) 求此方程的通解.

(14) (仅数学一、数学二要求) 以 yOz 坐标面上的平面曲线段 $y = f(z) (0 \leq z \leq h)$ 绕 z 轴旋转所构成的旋转曲面和 xOy 坐标面围成一个无盖容器, 已知它的底面面积为 $16\pi(\text{cm}^2)$, 如果以 $3(\text{cm}^3/\text{s})$ 的速率将水注入容器中, 水表面的面积则以 $\pi(\text{cm}^2/\text{s})$ 的速率增大, 求 $y = f(z)$.

(15) (仅数学一、数学二要求) 求微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' = 0$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的解.

(16) (仅数学一、数学二要求) 设函数 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 作曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两条直线与 x 轴所围三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积记为 S_2 , 且 $2S_1 - S_2 = 1$, 求曲线 $y = y(x)$.

(17) (仅数学一、数学二要求) 设 $y = y(x)$ 是向上凸的连续曲线, 其上任一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且此曲线上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 求该曲线的方程.

(18) (仅数学一要求) 求微分方程 $(x \cos y + \cos x) \frac{dy}{dx} - y \sin x + \sin y = 0$ 的通解.

(19) (仅数学一要求) 求微分方程 $y' = 6 \frac{y}{x} - xy^2$ 的通解.

(20) (仅数学一要求) 求微分方程 $x^2 y'' - xy' + y = 2x (x > 0)$ 的通解.

(21) 设 $y(x)$ 二阶可导, 且曲线 $l: y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于 $(0, 0)$, 记 α 为曲线在点 (x, y) 处切线的倾角, 若 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

(22) (仅数学一要求) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且它在 $[0, x] (x > 0)$ 上的平均值等于它在该区间端点处的几何平均值, 求 $f(x)$.

习题演练解答

一、选择题

(1) C.

解 因为

$$e^{-\int P(x)dx+C} = e^C \cdot e^{-\int P(x)dx},$$

且常数 e^C 只能取正值, 所以 $e^C \cdot e^{-\int P(x)dx}$ 不能包含通解中所有的解. 选项 C 正确.

注 由于方程 $y' + P(x)y = 0$ 的通解公式为 $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$, C 为任意常数, 故选项 A、D 可以表示通解.

通解公式中的 $\int P(x)dx$ 实际上是 $P(x)$ 的一个原函数(从公式推导中可以看出), 可以是任何一个原函数, 故将 $\int P(x)dx$ 改成 $\int_0^x P(t)dt$ 也是正确的, 所以选项 B 也可以表示通解.

(2)C.

解 由已知, $y_2 - y_1$ 是方程的一个非零解, 故该方程的通解为 $C(y_2 - y_1)$. 选项 C 正确.

对于选项 A, 当 $y_2 = 0$ 时, $y_1 + Cy_2 = y_1$ 不表示通解.

对于选项 B, 一阶微分方程的通解中不能含两个任意常数.

对于选项 D, 当 $y_2 = -y_1$ 时, $y_1 + C(y_1 + y_2) = y_1$ 只是一个特解.

(3)A.

解 若方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的任一个解 $y(x)$ 都有界, 则方程的特征根 $\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 的实数部分小于或者等于 0.

已知方程 $y'' + by' + y = 0$ 的特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$, 故当且仅当 $b \geq 0$ 时, 两个特征根 λ_1, λ_2 的实数部分都小于或者等于 0, 选项 A 正确.

(4)C.

解 由 $y_1 = e^{-x}$, 知 $\lambda_1 = -1$ 是该方程的一个特征根; 由 $y = 2x$, 知 $\lambda_2 = 0$ 是该方程的二重特征根, 故 $(\lambda + 1)\lambda^2 = 0$, 即 $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, 从而有 $a = 1, b = c = 0$. 选项 C 正确.

(5)C.

解 由已知, 特征方程 $r^2 - \lambda^2 = 0$ 的根为 $\pm \lambda$, 故非齐次项为 $e^{\lambda x}$ 与 $e^{-\lambda x}$ 的特解形式分别为 $x(ae^{\lambda x})$ 与 $x(be^{-\lambda x})$, 从而原微分方程的特解形式为 $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$. 选项 C 正确.

(6)B.

解 由非齐次线性微分方程解的叠加原理, 知原方程的特解为 $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$ 与 $y'' + 2y' - 3y = x$ 的特解之和. 又因为方程 $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$ 的特解形式为 ae^{-x} , $y'' + 2y' - 3y = x$ 的特解形式为 $bx + c$, 所以选项 B 正确.

二、填空题

(1) $y = Cxe^{-x}$ (C 为任意常数).

解 方程变形为 $\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx$ ($y \neq 0$), 等式两边同时积分, 得

$$\ln |y| = \ln |x| - x + C_1,$$

即 $y = Cxe^{-x}$ ($C = \pm e^{C_1}$).

当 $y \equiv 0$ 时, 其也满足微分方程, 故原方程的通解为 $y = Cxe^{-x}$ (C 为任意常数).

(2) $y = e^{-x} \sin x$.

解 通解为

$$y = e^{-\int dx} \left(\int e^{-x} \cos x e^{\int dx} dx + C \right) = e^{-x} (\sin x + C),$$

由 $y(0) = 0$, 得 $C = 0$, 故所求特解为 $y = e^{-x} \sin x$.

(3) $y = 2\cos 2x$.

解 将 $y = \cos 2x$ 代入原方程, 得 $P(x) = \frac{2\sin 2x}{\cos 2x}$, 解初值问题

$$\begin{cases} y' + \frac{2\sin 2x}{\cos 2x}y = 0, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

得 $y = 2\cos 2x$.

$$(4) 3x(1+x^2).$$

解 由线性微分方程解的结构与性质, 知 $y_1 - y_2$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的解, 故

$$(y_1 - y_2)' + P(x)(y_1 - y_2) = 0,$$

即

$$-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x - 2\sqrt{1+x^2} \cdot P(x) = 0,$$

$$\text{从而有 } P(x) = -\frac{x}{1+x^2}.$$

又由 $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ 是 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解, 可知

$$[(1+x^2)^2]' + P(x)(1+x^2)^2 = Q(x),$$

解得 $Q(x) = 3x(1+x^2)$.

$$(5) y'' + 2y' + y = 2e^{-x}.$$

解 由已知, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 是所求方程的特征根, 故该方程为

$$y'' + 2y' + y = f(x),$$

将 $x^2 e^{-x}$ 代入, 得 $f(x) = 2e^{-x}$, 所以该方程为 $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

三、解答题

(1) **解** 方程可改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 故

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2},$$

当 $u \neq 0$, 即 $y \neq 0$ 时, 分离变量, 得

$$\frac{1-u^2}{u^3} du = \frac{1}{x} dx,$$

积分, 得

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln |u| = \ln |x| + C_1,$$

即 $xu = Ce^{-\frac{1}{2u^2}}$, 将 $u = \frac{y}{x}$ 代入, 得 $y = Ce^{\frac{x^2}{2y^2}}$ ($C \neq 0$).

此外, $y = 0$ 也是原方程的解.

(2) **解** 方程变形为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\arctan y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2} \quad (\text{视 } x \text{ 为未知函数}),$$

解一阶线性微分方程, 得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{dy}{1+y^2}} \left(\int \frac{\arctan y}{1+y^2} \cdot e^{\int \frac{dy}{1+y^2}} dy + C \right) \\ &= \arctan y + Ce^{-\arctan y} - 1. \end{aligned}$$

(3) **解** 当 $y \neq 1$ 时, 方程变形为

$$\frac{y dy}{y-1} = \frac{x dx}{1+x^2},$$

积分,得

$$y + \ln |y - 1| = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_1,$$

可化为 $e^{y+\ln|y-1|} = e^{\ln(1+x^2)\frac{1}{2}} \cdot e^{C_1}$.

当 $y > 1$ 时, $e^y(y-1) = e^{C_1} \sqrt{1+x^2}$.

当 $y < 1$ 时, $e^y(y-1) = -e^{C_1} \sqrt{1+x^2}$.

记 $\pm e^{C_1} = C$, 由上面两式, 可得

$$e^y(y-1) = C \sqrt{1+x^2} \quad (C \neq 0).$$

当 $y = 1$ 时, 可得 $y = 1$ 是原方程的一个解.

综上所述, 方程的通解为

$$e^y(y-1) = C \sqrt{1+x^2} \quad (C \text{ 为任意常数}),$$

由 $y(1) = 2$, 得 $C = \frac{1}{\sqrt{2}}e^2$, 故所求特解为

$$e^y(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^2 \sqrt{1+x^2}.$$

(4) 解 方程不显含 y , 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$, 原方程化为

$$x \frac{dp}{dx} = p \ln p,$$

该方程为可分离变量方程, 解得 $p = e^{C_1 x}$.

由 $y'(1) = e$, 知 $C_1 \neq 0$, $p = e^{C_1 x}$ 两边同时积分, 得

$$y = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} + C_2.$$

由 $y'(1) = e$, 得 $e^{C_1} = e$, 再由 $y(1) = 0$, 得 $\frac{e^{C_1}}{C_1} + C_2 = 0$, 故 $C_1 = 1, C_2 = -e$, 从而所求特解为 $y = e^x - e$.

(5) 解 方程不显含 x , 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 故 $p \frac{dp}{dy} = \frac{1+p^2}{2y}$, 即

$$\frac{2p dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}.$$

积分, 得 $\ln(1+p^2) = \ln |y| + C$, 即

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C_1 y \quad (C_1 = \pm e^C),$$

解得 $\frac{dy}{\pm \sqrt{C_1 y - 1}} = dx$, 积分, 得

$$\pm \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2.$$

化简, 得

$$\frac{4}{C_1^2} (C_1 y - 1) = (x + C_2)^2.$$

(6) 解 $y'' + y' = 0$ 的特征方程为 $r^2 + r = 0$, 特征根为 $r_1 = 0, r_2 = -1$, 由 $2x^2 + 1 = (2x^2 + 1)e^{0 \cdot x}$, 知 $r_1 = 0$ 是单根, 令原方程的特解为

$$y^* = x e^{0 \cdot x} (ax^2 + bx + c),$$

代入原方程,得

$$3ax^2 + (2b + 6a)x + (c + 2b) = 2x^2 + 1.$$

比较两端同次幂系数,得

$$3a = 2, \quad 2b + 6a = 0, \quad c + 2b = 1,$$

解得 $a = \frac{2}{3}, b = -2, c = 5$, 故原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x.$$

(7) 解 $y'' + y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 得特征根 $r_1 = i, r_2 = -i$.

令 $y'' + y = x$ 的特解为 $y_1^* = ax + b$, 代入方程可得 $a = 1, b = 0$, 故 $y_1^* = x$.

令 $y'' + y = \cos x$ 的特解为 $y_2^* = Ax \cos x + Bx \sin x$, 代入方程, 可得 $A = 0, B = \frac{1}{2}$, 故 $y_2^* = \frac{1}{2}x \sin x$,

从而原方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

(8) 解 等式可变形为 $f(x) = 2 \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) d\left(\frac{t}{2}\right) + e^{2x}$, 即

$$f(x) = 2 \int_0^x f(x) dx + e^{2x}.$$

两边同时对 x 求导, 得 $f'(x) = 2f(x) + 2e^{2x}$, 即

$$f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x},$$

解得 $f(x) = e^{2x}(2x + C)$.

由已知等式, 可知 $f(0) = 1$, 代入上式, 可得 $C = 1$, 故 $f(x) = e^{2x}(1 + 2x)$.

(9) 证 (I) $\frac{dx}{dt} + a(t)x = 0$ 的通解可表示为 $x(t) = Ce^{-\int_0^t a(s) ds}$, 当且仅当 $\int_0^{+\infty} a(t) dt$ 发散时, $-\int_0^t a(s) ds \rightarrow -\infty (t \rightarrow +\infty)$, 故有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

(II) 该方程的通解为

$$x(t) = e^{-at} \left[C + \int_0^t e^{as} f(s) ds \right] \quad (t > 0),$$

满足 $x(0) = x_0$ 的解为

$$x_0(t) = e^{-at} \left[x_0 + \int_0^t e^{as} f(s) ds \right] \quad (t > 0).$$

当 $t \in [0, +\infty)$ 时, 由已知, 设 $|f(t)| \leq M (M \geq 0)$, 则可得

$$\begin{aligned} |x_0(t)| &\leq |x_0| + \left| \int_0^t e^{-a(t-s)} f(s) ds \right| \leq |x_0| + M \left| \int_0^t e^{-a(t-s)} ds \right| \\ &= |x_0| + \frac{Me^{-at}}{a} |e^{at} - 1| \leq |x_0| + \frac{M}{a}. \end{aligned}$$

(10) 解 已知等式两边同时对 x 求导, 得

$$f'(x) = f(1-x). \quad ①$$

式 ① 两边同时对 x 求导, 得

$$f''(x) = -f'(1-x). \quad ②$$

由式 ①, 可得

$$f'(1-x) = f[1-(1-x)] = f(x),$$

代入式 ②, 得 $f''(x) = -f(x)$.

又由已知条件, 可知 $f(0) = 1$, 再由式 ①, 知 $f'(0) = f(1)$. 解初值问题

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0, \\ f(0) = 1, f'(0) = f(1), \end{cases}$$

得通解为 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

由 $f(0) = 1$, 得 $C_1 = 1$.

又由 $f'(x) = -\sin x + C_2 \cos x$ 及 $f'(0) = f(1)$, 可得 $C_2 = \frac{\cos 1}{1 - \sin 1}$, 故

$$f(x) = \cos x + \frac{\cos 1}{1 - \sin 1} \cdot \sin x.$$

$$\begin{aligned} (11) \text{ 解 } y = f(x) &= x \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= x \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt, \end{aligned}$$

两边同时对 x 求导, 得

$$f'(x) = x \cos x + \sin x - \int_0^x f(t)dt.$$

两边再同时对 x 求导, 得 $f''(x) = -x \sin x + 2 \cos x - f(x)$, 即

$$f''(x) + f(x) = -x \sin x + 2 \cos x. \quad ①$$

由于对应齐次微分方程的特征根为 $r_1 = i, r_2 = -i$, 故通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

由式 ① 右端的表达式 $-x \sin x + 2 \cos x$, 可设特解为

$$y^* = x(ax+b)\cos x + x(cx+d)\sin x.$$

代入式 ①, 比较系数, 得 $a = \frac{1}{4}, b = 0, c = 0, d = \frac{3}{4}$, 故

$$y^* = \frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{3}{4}x \sin x.$$

从而式 ① 的通解为

$$y = f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{3}{4}x \sin x.$$

再由已知条件, 知 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 可得 $C_1 = C_2 = 0$, 故所求函数为

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{3}{4}x \sin x.$$

(12) 解 由 $y = \frac{u}{\cos x}$, 得 $u = y \cos x$, 故

$$u'(x) = y' \cos x - y \sin x, \quad u''(x) = y'' \cos x - 2y' \sin x - y \cos x,$$

从而原方程可化为 $u'' + 4u = e^x$, 解得

$$u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x,$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{1}{\cos x} \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x \right).$$

(13) 解 (I) 由 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, 可知

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{y'^3},$$

故 $y'' = -\frac{d^2 x}{dy^2} \cdot y'^3$. 代入原方程, 得 $y'^3 \left(-\frac{d^2 x}{dy^2} + x + e^{2y} \right) = 0$, 即

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} \left(-\frac{d^2x}{dy^2} + x + e^{2y}\right) = 0,$$

而 $\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} \neq 0$, 则原方程可化简为

$$\frac{d^2x}{dy^2} - x = e^{2y}. \quad (1)$$

(II) 式①对应的齐次微分方程的特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -1$. 令式①的特解为 $x^* = Ae^{2y}$, 代入式①, 得 $A = \frac{1}{3}$, 故所求方程的通解为 $x = C_1e^y + C_2e^{-y} + \frac{1}{3}e^{2y}$.

(14) 解 如图 9-2 所示. 设在时刻 t 时, 水面高度为 z , 则容器内水的容积为

$$\int_0^z \pi f^2(u) du = 3t.$$

此时水的表面积为 $\pi f^2(z) = 16\pi + \pi t$, 即 $f^2(z) = 16 + t$, 故

$$t = f^2(z) - 16.$$

式①变为

$$\pi \int_0^z f^2(u) du = 3f^2(z) - 48.$$

两边同时对 z 求导, 并化简, 得

$$f'(z) - \frac{\pi}{6}f(z) = 0.$$

由已知 $f(0) = 4$, 解此方程可得 $y = f(z) = 4e^{\frac{\pi}{6}z}$.

(15) 解 方程不显含 y , 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 于是原方程可化为

$$(1-x^2)p' - xp = 0.$$

当 $1-x^2 \neq 0$ 时, 方程变为

$$p' - \frac{x}{1-x^2}p = 0,$$

为一阶齐次线性微分方程, 解得 $p = C_1 e^{\int \frac{x}{1-x^2} dx}$.

考虑到初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 可取 $x \in (-1, 1)$, 积分为

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2),$$

故 $p = \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$. 由 $y'(0) = 1$, 得 $C_1 = 1$, 即 $\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 积分, 得

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_2.$$

再由 $y(0) = 0$, 得 $C_2 = 0$, 故所求特解为 $y = \arcsin x (-1 < x < 1)$.

注 $\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln |1-x^2| + C.$

(16) 解 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

它与 x 轴的交点为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$. 由 $y(0) = 1, y'(x) > 0$, 可知

$$y(x) > y(0) = 1 > 0 \quad (x > 0),$$

故

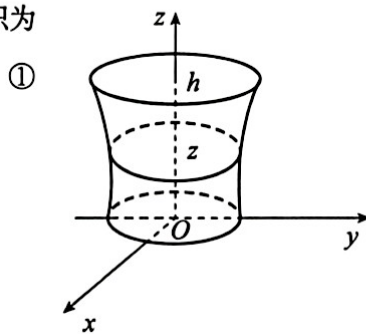


图 9-2

$$S_1 = \frac{1}{2} |y| \left| x - \left(x - \frac{y}{y'} \right) \right| = \frac{y^2}{2y'}, \quad S_2 = \int_0^x y(t) dt, \quad (1)$$

由 $2S_1 - S_2 = 1$, 得

$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t) dt = 1. \quad (2)$$

由此可知 $y'(0) = 1$, 式 (2) 两边同时对 x 求导, 并化简, 得 $yy'' = y'^2$, 令 $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 则方程可化为 $py \frac{dp}{dy} = p^2$.

由 $y' > 0$, 即 $p > 0$, 知 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, 积分, 得 $p = C_1 y$.

由 $y = 1, p = 1$, 得 $C_1 = 1$, 即 $\frac{dy}{dx} = y$, 故 $y = C_2 e^x$, 再由 $y(0) = 1$, 得 $C_2 = 1$, 故所求曲线为 $y = e^x$.

(17) 解 由已知, $y'' < 0$, 于是曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

化简得 $y'' = -(1+y'^2)$. 由已知, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

令 $y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$, 代入方程 $y'' = -(1+y'^2)$, 得 $\frac{dp}{1+p^2} = -dx$, 积分, 得

$$p = \tan(C_1 - x).$$

由 $y'(0) = 1$, 得 $C_1 = \frac{\pi}{4}$, 故

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4},$$

积分, 得 $y = \ln \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| + C_2$.

再由 $y(0) = 1$, 得 $C_2 = 1 + \frac{1}{2} \ln 2$, 故所求曲线为

$$y = \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 + \frac{1}{2} \ln 2, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}.$$

(18) 解 方程变形为

$$(\sin y - y \sin x) dx + (x \cos y + \cos x) dy = 0.$$

记 $P = \sin y - y \sin x$, $Q = x \cos y + \cos x$, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \sin x$, 故它为全微分方程. 由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = \sin y - y \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = x \cos y + \cos x,$$

积分, 得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int (\sin y - y \sin x) dx + \varphi(y) \\ &= x \sin y + y \cos x + \varphi(y). \end{aligned}$$

由

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cos y + \cos x + \varphi'(y) = x \cos y + \cos x,$$

得 $\varphi'(y) = 0$, 即 $\varphi(y) = C$, 故

$$u(x, y) = x \sin y + y \cos x + C,$$

从而原方程的通解为 $x \sin y + y \cos x = C$.

(19) 解 方程为 $n = 2$ 时的伯努利方程. 当 $y \neq 0$ 时, 令 $y^{-1} = z$, 则

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx},$$

代入原方程, 得 $\frac{dz}{dx} + \frac{6}{x}z = x$. 解得 $z = \frac{C}{x^6} + \frac{x^2}{8}$. 将 $z = \frac{1}{y}$ 代入上式, 则所求通解为 $\frac{1}{y} = \frac{C}{x^6} + \frac{x^2}{8}$.

此外, $y = 0$ 也是方程的解.

(20) 解 方程为二阶欧拉方程. 令 $x = e^t (x > 0)$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

即 $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$. 类似地, 有 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$, 即

$$\frac{x^2 d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt},$$

故原方程可化为

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = 2e^t. \quad (1)$$

对应齐次微分方程的特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 特征根为 $r_1 = r_2 = 1$, 令非齐次微分方程的特解为 $y^* = bt^2e^t$, 代入式 (1), 比较系数, 得 $b = 1$, 故式 (1) 的通解为

$$y = C_1e^t + C_2te^t + t^2e^t,$$

从而原方程的通解为 $y = C_1x + C_2x \ln x + x \ln^2 x$.

(21) 解 由 $y' = \tan \alpha$, 即 $\alpha = \arctan y'$, 可知 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}$. 又由于 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 故 $\frac{y''}{1+y'^2} = y'$, 即

$$y'' = y'(1+y'^2). \quad (1)$$

令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 代入式 (1), 得 $p' = p(1+p^2)$. 分离变量, 得

$$\frac{dp}{p(1+p^2)} = dx,$$

两边同时积分, 得

$$\ln \frac{p^2}{1+p^2} = 2x + \ln C_1. \quad (2)$$

由 $y'(0) = 1$, 知当 $x = 0$ 时, $p = 1$, 代入式 (2), 得 $C_1 = \frac{1}{2}$, 故

$$y' = p = \frac{\frac{e^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}e^{2x}}},$$

两边同时积分, 得

$$y = \int \frac{\frac{e^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}e^{2x}}} dx = \arcsin \frac{e^x}{\sqrt{2}} + C_2.$$

由 $y(0) = 0$ 得 $C_2 = -\frac{\pi}{4}$, 故 $y = \arcsin \frac{e^x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$.

(22) 解 依题意, 列方程为

$$\frac{1}{x-0} \int_0^x f(t) dt = \sqrt{f(0)f(x)} \quad (x > 0).$$

两边同时取极限,得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-0} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{f(0)f(x)},$$

即 $f(0) = |f(0)|$, 故 $f(0) \geq 0$.

若 $f(0) = 0$, 则方程化为 $\int_0^x f(t) dt = 0$ ($x > 0$), 两边同时对 x 求导, 得 $f(x) \equiv 0$.

若 $f(0) > 0$, 则 $\int_0^x f(t) dt = x \sqrt{f(0)f(x)}$, 两边同时对 x 求导, 得

$$f(x) = \sqrt{f(0)f(x)} + \frac{xf(0)f'(x)}{2\sqrt{f(0)f(x)}},$$

即

$$f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = \frac{2}{x\sqrt{f(0)}}[f(x)]^{\frac{3}{2}},$$

该方程为伯努利方程. 令 $f(x) = y$, 即

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{2}{x\sqrt{f(0)}} \cdot y^{\frac{3}{2}},$$

令 $y^{1-\frac{3}{2}} = y^{-\frac{1}{2}} = z$, 则方程可化为一阶线性微分方程

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x\sqrt{f(0)}},$$

解得 $z = Cx + \frac{1}{\sqrt{f(0)}}$, 即 $y = \left[Cx + \frac{1}{\sqrt{f(0)}}\right]^{-2}$, 故

$$f(x) = y = \frac{1}{\left[Cx + \frac{1}{\sqrt{f(0)}}\right]^2} = \frac{f(0)}{[C\sqrt{f(0)}x + 1]^2} \quad (x \geq 0, C \geq 0).$$

注 上式中, 常数 $C \geq 0$. 若 $C < 0$, 则总有 $x > 0$, 使得分母 $C\sqrt{f(0)}x + 1 = 0$. 这样 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上不连续. 从本例可见, 对于应用题, 需检验由微分方程得到的结果是否满足问题的要求, 否则结果中可能包含“增解”.

第十章 二重积分

考试要求

1. 理解二重积分的概念, 了解二重积分的性质及其中值定理.
2. 掌握二重积分的计算方法 (直角坐标、极坐标).
3. (仅数学一、数学三要求) 了解无界区域上简单的反常二重积分并会计算.

第一节 二重积分的概念与性质

内容与方法提要

一、二重积分的概念

1. 二重积分的定义

设 $z = f(x, y)$ 是定义在平面有界闭区域 D 上的有界函数, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中 $d = \max\{\Delta\sigma_i \text{ 的直径}\}$.

2. 二重积分的几何意义

设 $z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$, 则曲顶柱体的体积 $V = \iint_D f(x, y) dx dy$.

3. 二重积分的物理意义

设 $\rho(x, y)$ 表示 D 的面密度, 则平面薄片的质量 $m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$.

说明 若 $z = f(x, y)$ 在 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f\left(\frac{j}{m}, \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}.$$

例如 设积分 $I = \iint_D x^2 y^2 dx dy$, D 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. 将区域 D 用平行于坐标轴的直线划分为

为边长为 $\frac{1}{n}$ 的小正方形, (ξ_i, η_j) 取第 (i, j) 个小正方形的右上角, 用极限表示积分 I .

解 利用二重积分的定义. 依题设, 有

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \quad \Delta y_j = \frac{1}{n}, \quad \xi_i = \frac{i}{n}, \quad \eta_j = \frac{j}{n}.$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{j}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \cdot j^2}{n^6}. \end{aligned}$$

二、二重积分的性质

设 $f(x, y), g(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 则

- (1) $\iint_D [k_1 f(x, y) \pm k_2 g(x, y)] dx dy = k_1 \iint_D f(x, y) dx dy \pm k_2 \iint_D g(x, y) dx dy.$
- (2) $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$, 其中 D 由 D_1 和 D_2 组成.
- (3) 当 $f(x, y) = 1$ 时, $\iint_D f(x, y) dx dy = S$, 其中 S 表示 D 的面积.
- (4) 设 $f(x, y), g(x, y)$ 在 D 上连续, 且 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则
- $$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

二重积分的中值定理: 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则至少存在一点 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot S,$$

其中 S 表示 D 的面积.

第二节 二重积分的计算

内容与方法提要

一、直角坐标系下二重积分的计算

- (1) 若区域 $D: a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

- (2) 若区域 $D: c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

说明 在直角坐标系下, 将二重积分化为累次积分, 关键是确定其积分上、下限, 积分上限大于或等于积分下限.

例如 计算 $I = \iint_D xy^2 dx dy$, 其中 D 是由 y 轴, $y = 1, y = x^2 (x \geq 0)$ 所围成的闭区域.

解 积分区域 D 如图 10-1 所示.

- (1) 先对 x 积分, 后对 y 积分.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xy^2 dx = \int_0^1 y^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^3}{2} dy = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

- (2) 先对 y 积分, 后对 x 积分.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xy^2 dy = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} x (1 - x^6) dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

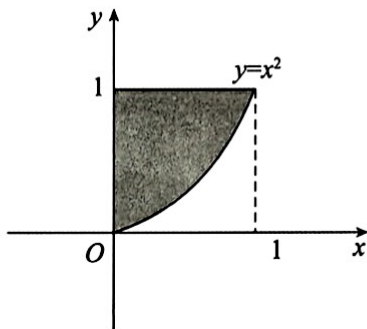


图 10-1

二、二重积分的换元法

$$\iint_D f(x, y) dx dy \xrightarrow[y = y(u, v)]{x = x(u, v)} \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J| du dv,$$

其中 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$

说明 对于二重积分的换元法, 考研大纲不要求. 但掌握换元法会给二重积分的计算带来方便.

例如 计算 $I = \iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由 $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x$ 围成的闭区域在第一象限的部分 (见图 10-2).

令 $u = xy, v = \frac{y}{x}$, 则闭区域 D 变为 uOv 平面中的闭区域 D' (见图 10-3), 且 $D': 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4$.

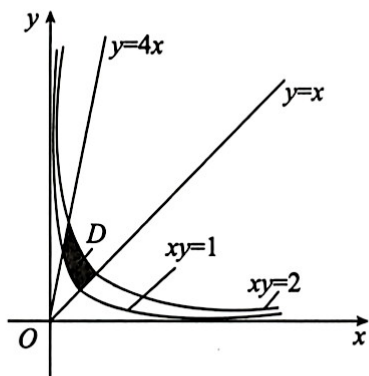


图 10-2

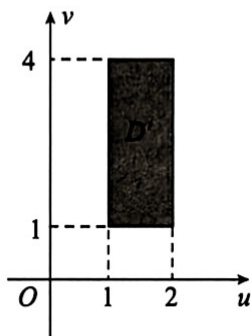


图 10-3

由 $u = xy, v = \frac{y}{x}$, 得 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$, 故

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

由换元法, 得

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{D'} u \cdot \frac{1}{2v} du dv = \int_1^2 u du \int_1^4 \frac{1}{2v} dv = \frac{3}{2} \ln 2.$$

三、极坐标系下二重积分的计算

$$\iint_D f(x, y) dx dy \xrightarrow[y = r \sin \theta]{x = r \cos \theta} \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

说明 极坐标 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$.

在极坐标系下, 确定积分限分为下面三种情形 (见图 10-4):

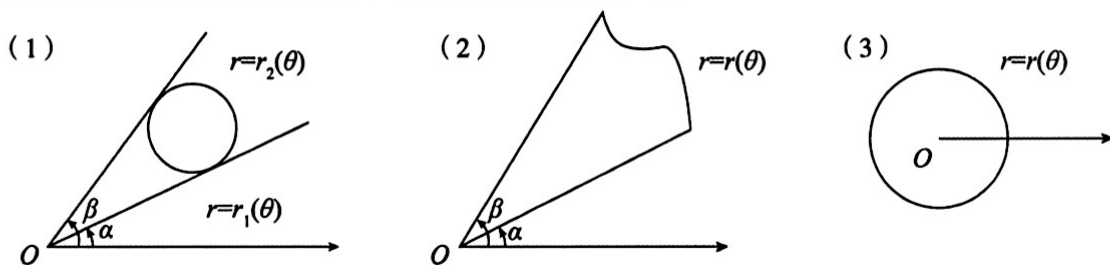


图 10-4

对于情形(1):

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_a^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr;$$

对于情形(2):

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_a^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr;$$

对于情形(3):

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

例如 计算 $I = \iint_D (x+2y) dx dy$, 其中 D 是由 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$ 所围成的闭区域在第一象限的部分.

解 积分区域如图 10-5 所示.

将 D 的边界方程化为极坐标方程, 得

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r=1,$$

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow r=2,$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6},$$

$$y=\sqrt{3}x \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3},$$

故

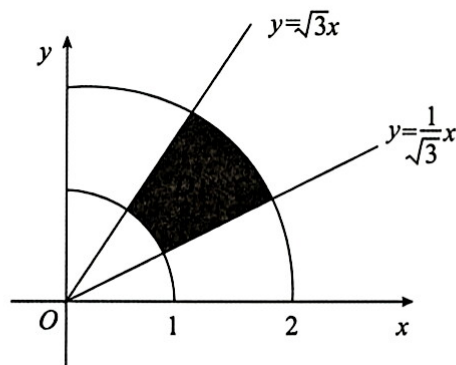


图 10-5

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+2y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^2 (r \cos \theta + 2r \sin \theta) r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \theta + 2 \sin \theta) d\theta \int_1^2 r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \theta + 2 \sin \theta) \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_1^2 d\theta \\ &= \frac{7}{3} (\sin \theta - 2 \cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{2} (\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

第三节 二重积分的对称性

内容与方法提要

1. 奇偶性

(1) 设 D 关于 x 轴对称, D_1 为 D 在 x 轴上方的部分, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

(2) 设 D 关于 y 轴对称, D_1 为 D 在 y 轴右侧的部分, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

2. 轮换对称性

设 D 关于直线 $y=x$ 对称, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy$, 故

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy.$$

说明 轮换对称性的证明:由二重积分的换元法,得

$$\iint_D f(x, y) dx dy \xrightarrow[y=x=1 \cdot x+0 \cdot y]{x=y=0 \cdot x+1 \cdot y} \iint_{D'} f(y, x) |J| dy dx = \iint_D f(y, x) dx dy,$$

其中 $J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $|J| = 1$. 由于 D 关于 $y = x$ 对称, 故 $D = D'$.

例如 计算 $I = \iint_D \frac{2e^{x^2} + 3e^{y^2}}{e^{x^2} + e^{y^2}} dx dy$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

关于直线 $y = x$ 对称, 如图 10-6 所示.

由轮换对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{2e^{x^2} + 3e^{y^2}}{e^{x^2} + e^{y^2}} + \frac{2e^{y^2} + 3e^{x^2}}{e^{y^2} + e^{x^2}} \right) dx dy \\ &= \frac{5}{2} \iint_D dx dy = \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

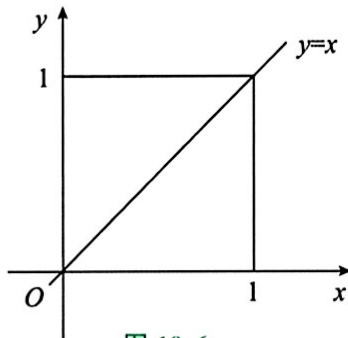


图 10-6

3. 函数对称性

设 D_1 与 D_2 关于直线 $y = x$ 对称, $f(x, y)$ 关于 $y = x$ 对称, 即对任意关于 $y = x$ 对称的两点 $(x_1, y_1) \in D_1$ 和 $(x_2, y_2) \in D_2$, 有 $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, 则

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

即

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_1+D_2} f(x, y) dx dy.$$

说明 若 $f(x, y) = f(y, x)$, 则称 $f(x, y)$ 关于 $y = x$ 对称.

例如 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy.$$

解 如图 10-7 所示,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} f(x) f(y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_1+D_2} f(x) f(y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 f(y) dy = \frac{1}{2} A^2. \end{aligned}$$

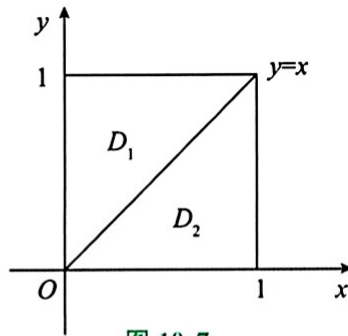


图 10-7

典型例题分析

题型一 交换积分顺序

例 1 计算 $I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$.

解 为计算方便, 先交换积分顺序. 由于积分区域 D (见图 10-8), 故

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx = -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cdot \cos \frac{\pi x}{2y} \Big|_y^{y^2} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_1^2 y \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi y}{2} \right) dy \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi y}{2} dy = \frac{4}{\pi^3} (2 + \pi). \end{aligned}$$

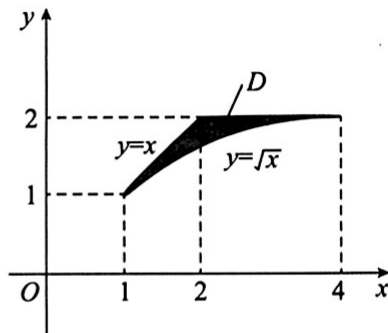


图 10-8

注 这里 $\int_1^2 y \cos \frac{\pi y}{2} dy$ 应用分部积分法进行计算.

例 2 计算 $I = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{2x} e^{-y^2} dy$.

解 如图 10-9 所示, 交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} dy \int_{\frac{y}{2}}^y e^{-y^2} dx = \int_0^{+\infty} \left(y - \frac{y}{2}\right) e^{-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} d(-y^2) \\ &= -\frac{1}{4} e^{-y^2} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{4} (0 - 1) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 3 积分 $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = (\quad)$.

A. $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

B. $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

C. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x, y) dx$

D. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx$

解 积分区域如图 10-10 中的阴影部分所示.

因为 $y = \sin x$ ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$) 的反函数为 $x = \pi - \arcsin y$, 所以

$$I = \int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx, \text{ 选项 B 正确.}$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x dt \int_{\sqrt[4]{t}}^x \sin \frac{t}{u} du}{1 - e^{-\frac{1}{8}x^8}}$.

分析 极限为 $\frac{0}{0}$ 型, 用洛必达法则. 但分子

$$\int_0^x dt \int_{\sqrt[4]{t}}^x \sin \frac{t}{u} du = \int_0^x \left(\int_{\sqrt[4]{t}}^x \sin \frac{t}{u} du \right) dt$$

括号内的积分上限含 x , 不能对 x 求导, 应先交换积分顺序 (见图 10-11).

解 由于

$$\begin{aligned} \int_0^x dt \int_{\sqrt[4]{t}}^x \sin \frac{t}{u} du &= \int_0^x du \int_0^u \sin \frac{t}{u} dt \\ &= \int_0^x \left[u \int_0^u \sin \frac{t}{u} d\left(\frac{t}{u}\right) \right] du = \int_0^x u \left(-\cos \frac{t}{u} \right) \Big|_0^u du \\ &= \int_0^x u (-\cos u^3 + 1) du = 2 \int_0^x u \sin^2 \frac{u^3}{2} du, \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \int_0^x u \sin^2 \frac{u^3}{2} du}{\frac{1}{8} x^8} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \sin^2 \frac{x^3}{2}}{x^7} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \left(\frac{x^3}{2}\right)^2}{x^7} = \frac{1}{2}.$$

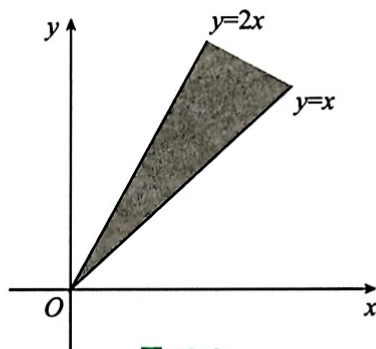


图 10-9

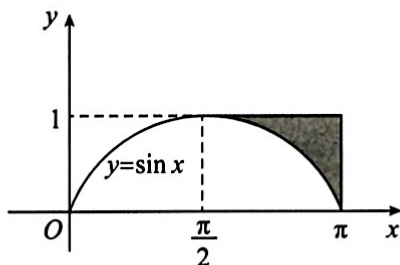


图 10-10

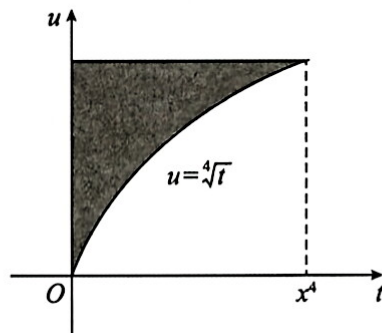


图 10-11

例 5 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} r f(r, \theta) dr$ ($a > 0$), 求交换积分顺序后的表达式.

解 在由 r, θ 构成的直角坐标系中画出积分区域(见图 10-12), 然后交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} r f(r, \theta) dr \\ &= \int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} r f(r, \theta) d\theta + \int_a^{\sqrt{2}a} dr \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\frac{\pi}{4}} r f(r, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

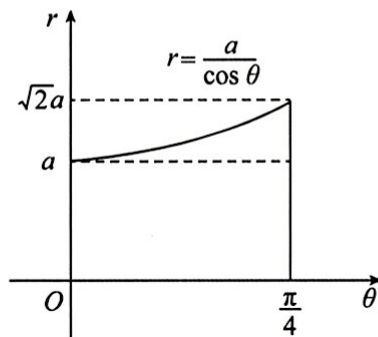


图 10-12

题型二 直角坐标系下计算与极坐标下计算相互转化

例 6 计算 $I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{e^2-x^2}} \ln(x^2+y^2) dy + \int_1^e dx \int_0^{\sqrt{e^2-x^2}} \ln(x^2+y^2) dy$.

分析 由于所给积分为直角坐标系下的累次积分, 但计算不方便, 故将直角坐标化为极坐标后再计算.

解 积分区域如图 10-13 所示,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^e r \cdot \ln r^2 dr = \frac{\pi}{2} \int_1^e r \ln r^2 dr = \frac{\pi}{4} \int_1^e \ln r^2 d(r^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(r^2 \ln r^2 \Big|_1^e - \int_1^e r^2 \cdot \frac{2r}{r^2} dr \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(2e^2 - \int_1^e 2r dr \right) = \frac{\pi}{4} (e^2 + 1). \end{aligned}$$

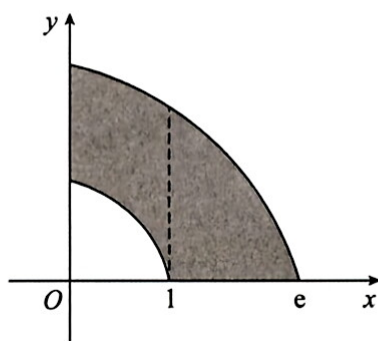


图 10-13

例 7 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 在直角坐标系下的累次积分为_____.

解 $\theta = 0$, 即 x 轴; $\theta = \frac{\pi}{4}$, 即 $y = x$ 与 x 轴的夹角. 将 $r = \sec \theta$ 代入 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = \tan \theta. \end{cases}$

又由 $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{y}{1}$, 知 $r = \sec \theta$ 在直角坐标系下为 $x = 1$, 故积分区域如图 10-14 所示, 从而在直角坐标系下,

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy \quad \text{或} \quad I = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

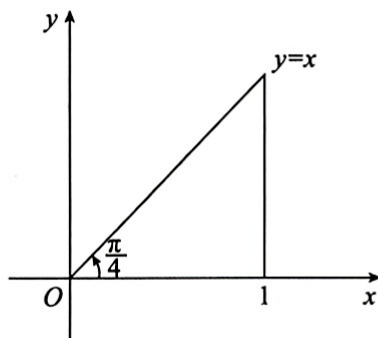


图 10-14

例 8 积分 $I = \int_{\arctan \frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}}^{\frac{2}{\cos \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = (\quad)$.

A. $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy$ B. $\int_1^2 dx \int_x^{\frac{1}{x}} f(x, y) dy$ C. $\int_{\frac{1}{2}}^2 dy \int_x^{\frac{1}{x}} f(x, y) dx$ D. $\int_{\frac{1}{2}}^2 dy \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dx$

解 $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = x$; $r = \frac{2}{\cos \theta} \Rightarrow x = 2$;

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \Rightarrow r = \frac{r}{\sqrt{r^2 \sin \theta \cos \theta}} \\ &\Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{yx}} \Rightarrow xy = 1. \end{aligned}$$

由于积分区域如图 10-15 所示, 故在直角坐标系下, 有

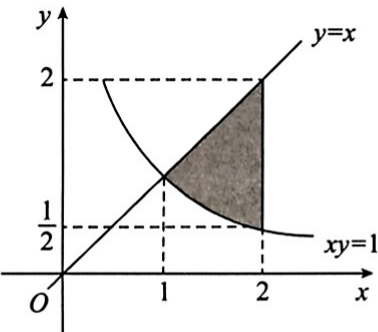


图 10-15

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy,$$

选项 A 正确.

例 9 计算

$$I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta,$$

其中 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

解 所给积分为极坐标表示形式, 计算不方便, 故先将其化为直角坐标表示形式. 依题设, 积分区域如图 10-16 所示, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D y \sqrt{1 - x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1 - x^2 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1 - x^2 + y^2} d(1 - x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 [1 - (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}] dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \stackrel{x = \sin t}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

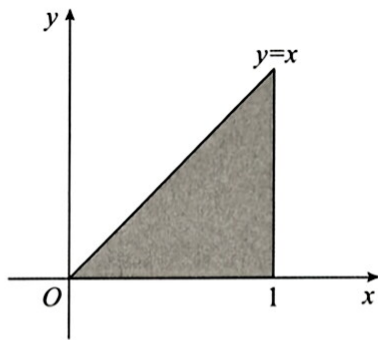


图 10-16

题型三 利用对称性计算二重积分

例 10 计算 $I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) dx dy$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的区域.

解 积分区域 D 如图 10-17 所示, 由于 D 关于 x 轴对称, 且函数 $f(x, y) = y$ 关于 y 是奇函数, 故 $\iint_D y dx dy = 0$.

记 $D_1: x^2 + y^2 \leq 4$, $D_2: (x+1)^2 + y^2 \leq 1$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy - \iint_{D_2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \cdot r dr - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r \cdot r dr \\ &= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

注 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 的极坐标方程为 $r = -2\cos \theta$.

例 11 计算 $I = \iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy$, 其中 D 是由 $y = x^3$, $y = 1$, $x = -1$ 所围成的闭区域.

解 积分区域如图 10-18 所示. 利用奇偶性, 作辅助曲线 $y = -x^3$, 将 D 分成 D_1, D_2, D_3, D_4 四部分, 则

$$I = \iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy$$

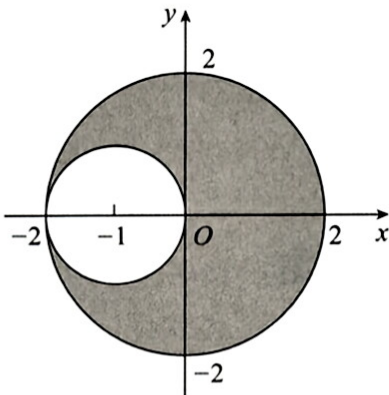


图 10-17

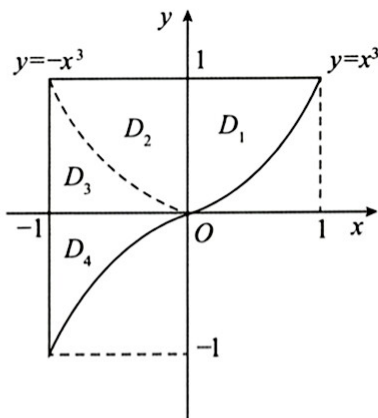


图 10-18

$$= \iint_D x \, dx \, dy + \iint_D xyf(x^2+y^2) \, dx \, dy.$$

又由于

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \iint_{D_1+D_2} x \, dx \, dy + \iint_{D_3+D_4} x \, dx \, dy \\ &= 0 + \int_{-1}^0 dx \int_{x^3}^{-x^3} x \, dy = \int_{-1}^0 (-x^4 - x^4) dx \\ &= -\frac{2}{5} x^5 \Big|_{-1}^0 = -\frac{2}{5}, \\ \iint_D xyf(x^2+y^2) \, dx \, dy &= \iint_{D_1+D_2} xyf(x^2+y^2) \, dx \, dy + \iint_{D_3+D_4} xyf(x^2+y^2) \, dx \, dy \\ &= 0 + 0 = 0 \quad [xyf(x^2+y^2) \text{ 关于 } x, y \text{ 都是奇函数}], \end{aligned}$$

$$\text{故 } I = -\frac{2}{5}.$$

例12 设 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $I = \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx \, dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 积分区域 D 如图 10-19 所示, 由于直接用极坐标计算不方便, 故由轮换对称性, 可知

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D (x^2 + y^2) dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r \, dr \\ &= \frac{\pi R^4}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned}$$

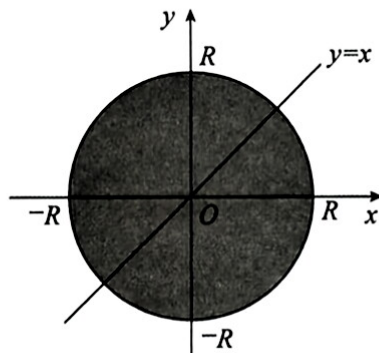


图 10-19

例13 设 $D_k = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 为位于第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) \, dx \, dy \quad (k=1, 2, 3, 4)$, 则().

- A. $I_1 > 0$ B. $I_2 > 0$
C. $I_3 > 0$ D. $I_4 > 0$

解 积分区域 $D_k (k=1, 2, 3, 4)$ 如图 10-20 所示. 由已知, 在 D_2 上, $y-x \geq 0$, 且不恒为 0, 故

$$I_2 = \iint_{D_2} (y-x) \, dx \, dy > 0,$$

选项 B 正确.

注 由于 D_1, D_3 都关于直线 $y=x$ 对称, 故根据轮换对称性, 有

$$I_1 = \frac{1}{2} \iint_{D_1} [(y-x) + (x-y)] \, dx \, dy = 0,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \iint_{D_3} [(y-x) + (x-y)] \, dx \, dy = 0.$$

由于在 D_4 上, $y-x \leq 0$ 且不恒为 0, 故 $I_4 < 0$.

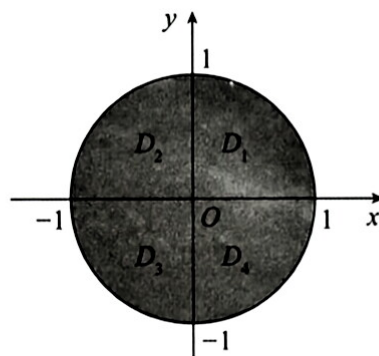


图 10-20

例14 设 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$, 计算 $I = \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x+y} \, dx \, dy$.

解 积分区域 D 如图 10-21 所示. 考虑到 D 关于 $y = x$ 对称, 由轮换对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} + \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr = -\frac{3}{4} \\ &\quad \left(\text{这里} \int_1^2 r \sin \pi r dr \text{ 用分部积分法计算} \right). \end{aligned}$$

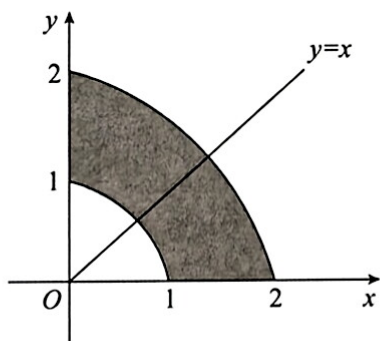


图 10-21

注 ① 当积分区域 D 关于 $y = x$ 对称时, 若被积函数较复杂, 则可以利用轮换对称性将被积函数化简, 再计算二重积分.

② 此题也可以直接用极坐标进行计算.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \frac{r \cos \theta \sin(\pi r)}{r \cos \theta + r \sin \theta} \cdot r dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \int_1^2 r \sin(\pi r) dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^2 r \sin(\pi r) dr = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

③ 若被积函数为多项相加, 则可以“整体”用轮换对称性, 也可以“分开”用转换对称性.

例如 计算 $I = \iint_D e^{x^2+y^2} (\sin^2 x + \cos^2 y) dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

解 由于积分区域 D 如图 10-22 所示, 且关于 $y = x$ 对称, 故

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2} \sin^2 x dx dy + \iint_D e^{x^2+y^2} \cos^2 y dx dy.$$

又因为 $\iint_D e^{x^2+y^2} \sin^2 x dx dy = \iint_D e^{y^2+x^2} \sin^2 y dx dy$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{x^2+y^2} \sin^2 y dx dy + \iint_D e^{x^2+y^2} \cos^2 y dx dy \\ &= \iint_D e^{x^2+y^2} (\sin^2 y + \cos^2 y) dx dy \\ &= \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{r^2} \cdot r dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 e^{r^2} d(r^2) = \pi e^{r^2} \Big|_0^1 = \pi(e-1). \end{aligned}$$

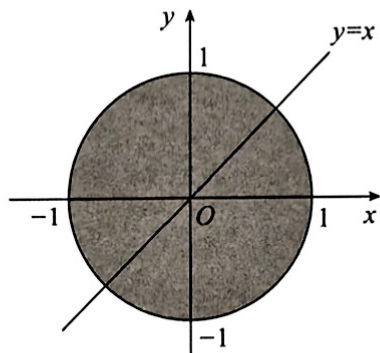


图 10-22

在此题中, 对整个被积函数用轮换对称性也是一样的. 但在特殊情形下, 只能“分开”用轮换对称性.

例如 证明: $\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy \geq 2\pi^2$, 其中 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.

证 由于积分区域 D 如图 10-23 所示, 且关于 $y = x$ 对称, 故

$$I = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy = \iint_D e^{\sin y} dx dy + \iint_D e^{-\sin x} dx dy.$$

又由于 $\iint_D e^{\sin y} dx dy \stackrel{\text{轮换对称性}}{=} \iint_D e^{\sin x} dx dy$, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{\sin x} dx dy + \iint_D e^{-\sin x} dx dy \\ &= \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx dy \geq \iint_D 2 dx dy = 2\pi^2 \\ &\quad \left(\text{这里} e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geq 2 \sqrt{e^{\sin x} \cdot e^{-\sin x}} = 2 \right). \end{aligned}$$

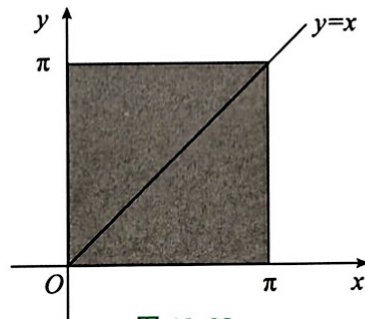


图 10-23

题型四 分区域积分

分区域积分的问题常有以下分类:

- (1) 分段函数;
- (2) 带绝对值符号的函数;
- (3) $\max\{f(x, y), g(x, y)\}, \min\{f(x, y), g(x, y)\}$;
- (4) 取整函数;
- (5) 符号函数;
- (6) 含参数的讨论.

例 15 设 $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2, \end{cases}$ 计算二重积分 $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中

$D: |x| + |y| \leq 2$.

解 积分区域 D 如图 10-24 所示, 由于被积函数 $f(x, y)$ 为分段函数, 故将 D 分为

$$D_1: |x| + |y| \leq 1, \quad D_2: 1 < |x| + |y| \leq 2.$$

在 D_1 上, $f(x, y) = x^2 = x^2 \cdot y^0$.

在 D_2 上, $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f(x, y)$ 关于 x, y 都为偶函数.

记 D_1, D_2 在第一象限的部分分别为 D'_1, D'_2 , 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) dx dy = 4 \iint_{D'_1} x^2 dx dy + 4 \iint_{D'_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= 4 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} x^2 dx + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^{\frac{2}{\sin \theta + \cos \theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr \\ &= \frac{1}{3} + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

注

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta &\stackrel{\tan \frac{\theta}{2} = t}{=} \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2t - t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 \frac{d(t-1)}{(\sqrt{2})^2 - (t-1)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + t - 1}{\sqrt{2} - t + 1} \right| \bigg|_0^1 = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

例 16 计算 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 1| dx dy$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

解 积分区域 D 如图 10-25 所示. 由于 $x^2 + y^2 = 1$ 将 D 分成 D_1, D_2 两部分, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2 + y^2 - 1) dy \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

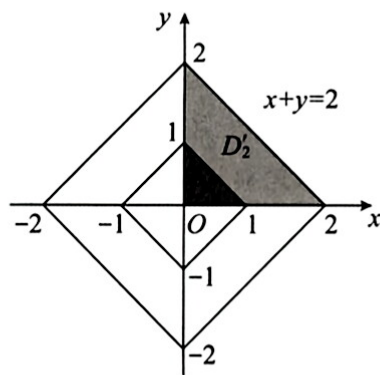


图 10-24

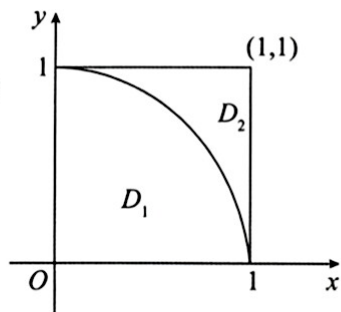


图 10-25

注

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2 + y^2 - 1) dy \\
 &= \int_0^1 \left[(x^2 - 1)y + \frac{1}{3}y^3 \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx \\
 &= \int_0^1 \left[\left(x^2 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx \\
 &\stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} - \cos^2 t + \frac{2}{3} \cos^3 t \right) \cos t dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

例 17 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$. $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数, 计算

$$I = \iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy.$$

解 积分区域 D 如图 10-26 所示. 记

$$D_1: x^2 + y^2 < 1, \quad x \geq 0, y \geq 0;$$

$$D_2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, \quad x \geq 0, y \geq 0,$$

则

$$[1 + x^2 + y^2] = 1, \quad (x, y) \in D_1,$$

$$[1 + x^2 + y^2] = 2, \quad (x, y) \in D_2.$$

故

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 2xy dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot r dr + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot r dr \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

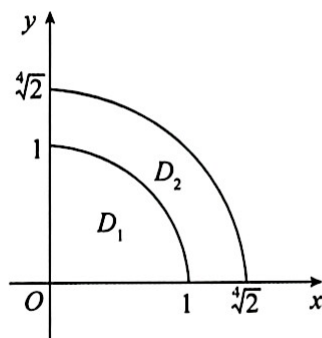


图 10-26

例 18 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$, 计算 $I = \iint_D \operatorname{sgn}(x+y) e^{x^2+y^2} dx dy$.

解 积分区域 D 如图 10-27 所示.

$$\operatorname{sgn}(x+y) = \begin{cases} -1, & x+y < 0, \\ 0, & x+y = 0, \\ 1, & x+y > 0. \end{cases}$$

为计算方便, 作辅助线 $y = x, y = -x$, 将 D 分为

D_1, D_2, D_3 .

在 D_1 上, $\operatorname{sgn}(x+y) = -1$.

在 D_2 上, $\operatorname{sgn}(x+y) = 1$.

在 D_3 上, $\operatorname{sgn}(x+y) = 1$, 故

$$I = -\iint_{D_1} e^{x^2+y^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{x^2+y^2} dx dy + \iint_{D_3} e^{x^2+y^2} dx dy.$$

由于 D_1 与 D_3 关于 y 轴对称, 且在其上被积函数相同, 故

$$\iint_{D_1} e^{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_3} e^{x^2+y^2} dx dy,$$

从而有

$$I = \iint_{D_2} e^{x^2+y^2} dx dy = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 e^{r^2} \cdot r dr = \frac{\pi}{4} (e - 1).$$

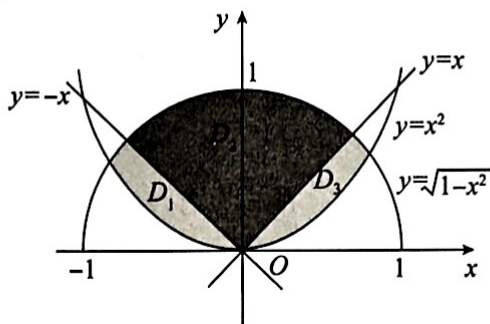


图 10-27

例 19 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算

$$I = \iint_D \max\{\sqrt{2x-x^2}, 1-y\} dx dy.$$

解 当 $\sqrt{2x-x^2} = 1-y$ 时, 有 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 将 D 分成 D_1 与 D_2 , 如图 10-28 所示, 于是

$$\max\{\sqrt{2x-x^2}, 1-y\} = \begin{cases} 1-y, & (x, y) \in D_1, \\ \sqrt{2x-x^2}, & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

$$I = \iint_{D_1} (1-y) dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{2x-x^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} (1-y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{2y-y^2}} (1-y) dx \\ &= \int_0^1 (1-y)(1-\sqrt{2y-y^2}) dy \\ &= \int_0^1 (1-y) dy - \int_0^1 (1-y) \sqrt{2y-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 2(1-y) \sqrt{2y-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2y-y^2} d(2y-y^2) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2y-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \\ \iint_{D_2} \sqrt{2x-x^2} dx dy &= \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^1 \sqrt{2x-x^2} dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} [1 - (1-\sqrt{2x-x^2})] dx \\ &= \int_0^1 (2x-x^2) dx = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

故 $I = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$.

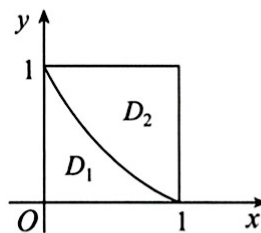


图 10-28

例 20 设 $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $D_t: 0 \leq x+y \leq t$, $G_t = D \cap D_t$, 求 $F(t) = \iint_{G_t} \cos(x+y) dx dy$.

解 D_t 中含参数 t , 对 t 进行讨论 (见图 10-29).

(1) 当 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t dy \int_0^{t-y} \cos(x+y) dx \\ &= \int_0^t (\sin t - \sin y) dy = t \sin t + \cos t - 1. \end{aligned}$$

(2) 当 $\frac{\pi}{2} < t \leq \pi$ 时,

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{t-\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dx + \int_{t-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{t-y} \cos(x+y) dx \\ &= \int_0^{t-\frac{\pi}{2}} (\cos y - \sin y) dy + \int_{t-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \sin y) dy \\ &= -\cos t - 1 + (\pi - t) \sin t. \end{aligned}$$

(3) 当 $t > \pi$ 时,

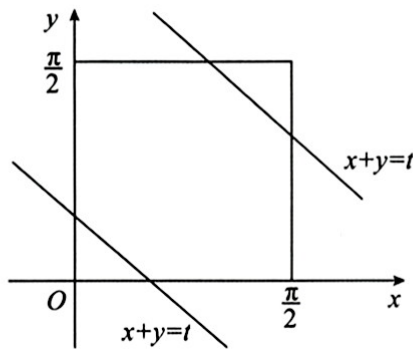


图 10-29

$$F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y - \sin y) dy = 0.$$

题型五 二重积分的综合题

例21 设 D 为由摆线的第一拱 $L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$ 与 x 轴围成的区域, 计算 $I = \iint_D y^2 dx dy$.

解 积分区域 D 如图 10-30 所示. 记

$$\begin{cases} x = x(t) = a(t - \sin t), \\ y = y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于 $x'(t) = a(1 - \cos t) > 0$, 故 $x = x(t)$ 单调, 从而存在反函数 $t = t(x)$, 使得 D 在直角坐标系下可表示为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2\pi a, 0 \leq y \leq y[t(x)]\}.$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y[t(x)]} y^2 dy = \int_0^{2\pi a} \frac{1}{3} y^3[t(x)] dx \\ &\stackrel{x = a(t - \sin t)}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} y^3(t) \cdot a(1 - \cos t) dt \\ &= \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 dt = \frac{16a^4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2} dt \\ &\stackrel{\frac{t}{2} = u}{=} \frac{32a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u du = \frac{32a^4}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du \\ &= \frac{32}{3} a^4 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi a^4}{12}. \end{aligned}$$

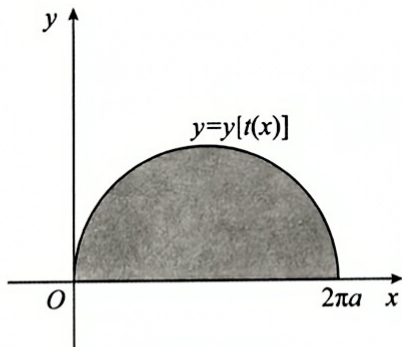


图 10-30

例22 设 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_D \left[x e^{x^2+y^2} + f\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}\right) \right] dx dy,$$

其中 $D: x^2 + y^2 \leq 4t^2$, 求 $f(t)$ 的表达式.

解 积分区域 D 如图 10-31 所示. 由于 D 关于 y 轴对称, 且 $x e^{x^2+y^2}$ 关于 x 是奇函数, 故 $\iint_D x e^{x^2+y^2} dx dy = 0$, 从而

$$\begin{aligned} \iint_D \left[x e^{x^2+y^2} + f\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}\right) \right] dx dy &= \iint_D f\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2} r\right) r dr = 2\pi \int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2} r\right) r dr, \end{aligned}$$

于是有

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + 2\pi \int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2} r\right) r dr,$$

两端同时对 t 求导, 得 $\begin{cases} f'(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2} + 8\pi t f(t), \\ f(0) = 1, \end{cases}$ 解得

$$f(t) = e^{\int 8\pi t e^{4\pi t^2} dt} \left(\int 8\pi t e^{4\pi t^2} e^{-\int 8\pi t e^{4\pi t^2} dt} dt + C \right) = e^{4\pi t^2} (4\pi t^2 + C),$$

由 $f(0) = 1$, 得 $C = 1$, 故 $f(t) = e^{4\pi t^2} (4\pi t^2 + 1)$.

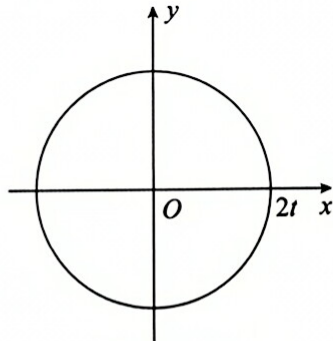


图 10-31

例23 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0\}$, $f(x, y)$ 在 D 上连续, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) du dv,$$

求 $f(x, y)$ 的表达式.

解 积分区域 D 如图 10-32 所示. 注意到 $\iint_D f(u, v) du dv$ 是一个常数, 且

$$\iint_D f(u, v) du dv = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

记 $\iint_D f(x, y) dx dy = A$ (常数), 则在已知等式两边同时求二重积分, 有

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \frac{8}{\pi} \iint_D A dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-r^2} \cdot r dr - \frac{8}{\pi} A \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

解得

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-r^2} \cdot r dr = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9},$$

故

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \\ &= \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{4}{3\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

例24 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 且

$$f(1, y) = 0, \quad f(x, 1) = 0, \quad \iint_D f(x, y) dx dy = A,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算 $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$.

分析 积分区域如图 10-33 所示. 被积函数含有 $f''_{xy}(x, y)$, 先化 I 为累次积分, 再利用分部积分法将其“偏导数”去掉.

解 由已知 $f(1, y) = f(x, 1) = 0$, 得

$$f'_y(1, y) = 0, \quad f'_x(x, 1) = 0,$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x dx \int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 y d[f'_x(x, y)] \\ &= \int_0^1 x \left[y f'_x(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x, y) dy \right] dx \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^1 x f'_x(x, y) dy \xrightarrow[\text{积分顺序}]{\text{交换}} - \int_0^1 dy \int_0^1 x f'_x(x, y) dx \\ &= - \int_0^1 \left[x f(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy = A. \end{aligned}$$

例25 设 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, $f(u)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 证明:

$$\iint_D f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

证 将二重积分化为累次积分, 得

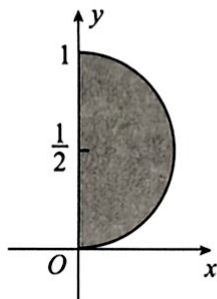


图 10-32

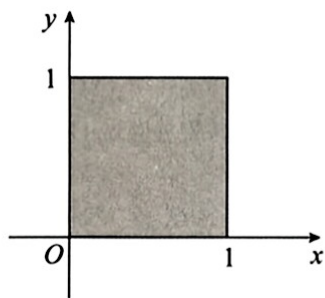


图 10-33

$$\begin{aligned}
 & \iint_D f(x+y) dx dy \\
 &= \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{1+x} f(x+y) dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x+y) dy \\
 & \xrightarrow{x+y=u} \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^{1+2x} f(u) du + \int_0^1 dx \int_{2x-1}^1 f(u) du \\
 & \xrightarrow[\text{积分顺序}]{\text{交换}} \int_{-1}^1 du \int_{\frac{u-1}{2}}^{\frac{u+1}{2}} f(u) dx = \int_{-1}^1 f(u) du.
 \end{aligned}$$

第四节 二重积分的应用 (仅数学一要求)

内容与方法提要

一、几何应用

1. 平面区域的面积

$$A = \iint_D dx dy.$$

2. 曲顶柱体的体积

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad f(x, y) \geqslant 0.$$

二、物理应用

设平面薄片 D 的面密度为 $\rho(x, y)$.

1. 质量

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

2. 质心坐标

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}.$$

3. 转动惯量

$$(1) D \text{ 对 } x \text{ 轴的转动惯量: } I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy.$$

$$(2) D \text{ 对 } y \text{ 轴的转动惯量: } I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

$$(3) D \text{ 对原点的转动惯量: } I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy.$$

典型例题分析

例 1 求由抛物面 $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围立体的体积.

解 所求立体如图 10-34 所示, 则

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (10 - 3x^2 - 3y^2 - 4) dx dy \\
 &= \iint_D (6 - 3x^2 - 3y^2) dx dy
 \end{aligned}$$

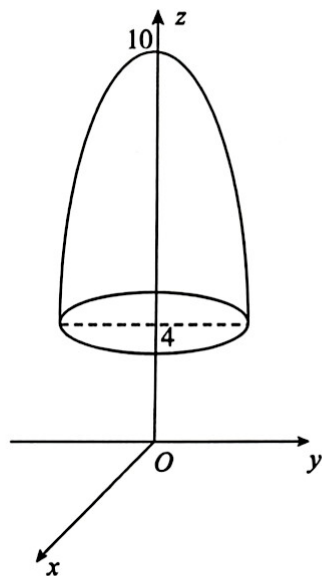


图 10-34

$$\text{极坐标} \quad 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)r dr = 6\pi.$$

例 2 求位于两圆 $r = 2\sin\theta$ 与 $r = 4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的质心坐标.

解 如图 10-35 所示,依题设,可设面密度为常数 ρ ,则由对称性,知 $\bar{x} = 0$,故

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\rho \iint_D y dx dy}{\rho \iint_D dx dy} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}, \\ \iint_D dx dy &= \pi \times 2^2 - \pi \times 1^2 = 3\pi, \\ \iint_D y dx dy &= \int_0^\pi d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r \sin\theta \cdot r dr = 7\pi, \end{aligned}$$

从而所求质心坐标为 $(0, \frac{7}{3})$.

例 3 求均匀半圆薄片

$$D = \{(x, y) \mid y = \sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a\}$$

对 x 轴的转动惯量(设面密度为 μ).

解 如图 10-36 所示.

$$I_x = \iint_D \mu y^2 dx dy = \mu \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2 \sin^2\theta \cdot r dr = \frac{\pi \mu a^4}{8}.$$

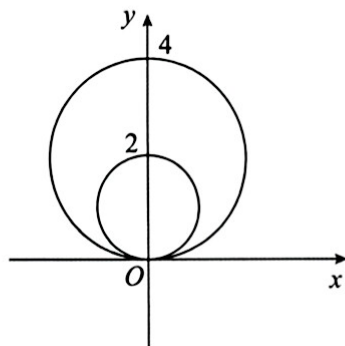


图 10-35

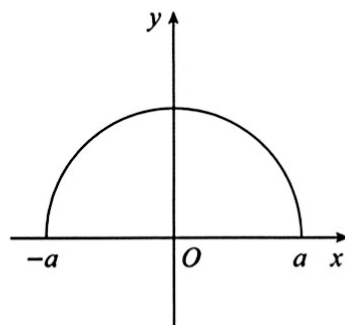


图 10-36

习题演练

一、选择题

(1) 设

$$I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy, \quad I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则().

A. $I_3 > I_2 > I_1$

B. $I_1 > I_2 > I_3$

C. $I_2 > I_1 > I_3$

D. $I_3 > I_1 > I_2$

(2) 设 D 是由第一象限中的曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域, $f(x, y)$

在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy = ()$.

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(3) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = ()$.

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

(4) 设 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx = (\quad)$.

A. $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy$

B. $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy$

C. $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$

D. $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$

(5) 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 D 是由 $y = 0, y = x^2$ 及 $x = 1$ 所围成的平面区域, 则 $f(x, y) = (\quad)$.

A. $xy + \frac{1}{6}$

B. $xy + \frac{1}{8}$

C. $xy + \frac{1}{12}$

D. $xy + \frac{1}{16}$

二、填空题

(1) 设 $f(x)$ 连续, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 在 D 上连续, a, b 为常数, 则 $I = \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 D 由 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $I = \iint_D (xy^5 - 1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $f(x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ D 为全平面, 则 $I = \iint_D f(y)f(x-y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(1) 求 $I = \iint_D xy dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

(2) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2ax, x^2 + y^2 \geq ax\}, a > 0$, 求 $I = \iint_D (x+y)^2 dx dy$.

(3) 设 $D = \{(x, y) \mid 2x \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq x \leq 2\}$, 求 $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$.

(4) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, 求 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy$.

(5) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 求 $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

(6) 设 D 由心形线 $r = a(1 + \cos \theta), a > 0$ 围成, 求 $I = \iint_D (x^2 + y^2 + 2xy) dx dy$.

(7) 设 $D = \{(x, y) \mid x + y \leq \frac{\pi}{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, 求 $I = \iint_D |\sin(x-y)| dx dy$.

(8) 设 $f(x)$ 连续, $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x^2+y^2) dx dy (t > 0)$, 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2F(t)}{t^4}$.

(9) 计算 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi} (\theta^2 - 1) e^{r^2} dr$.

(10) 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$, 求 $I = \iint_D [x+y] dx dy$, 其中 $[x+y]$ 表示不超过 $x+y$ 的最大整数.

(11) 设平面区域 D 由 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算 $I = \iint_D (x+2y) dx dy$.

(12)(仅数学一要求) 求两个圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的体积.

习题演练解答

一、选择题

(1) A.

解 由已知, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, 故

$$\frac{\pi}{2} > 1 \geq \sqrt{x^2 + y^2} \geq x^2 + y^2 \geq (x^2 + y^2)^2 \geq 0.$$

由 $\cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调减少, 可知

$$0 < \cos \sqrt{x^2 + y^2} \leq \cos(x^2 + y^2) \leq \cos(x^2 + y^2)^2,$$

故

$$\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy < \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy < \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 dx dy.$$

选项 A 正确.

(2) B.

解 $2xy = 1, 4xy = 1$ 的极坐标方程分别为

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}.$$

$y = x, y = \sqrt{3}x$ 的极坐标方程分别为 $\theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{3}$, 故

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

选项 B 正确.

(3) C.

解 如图 10-37 所示, 原式 $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.

选项 C 正确.

(4) C.

解 如图 10-38 所示, 原积分区域为两部分, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4 - y\},$$

$$D_1 + D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4 - y\},$$

故原式 $= \int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$. 选项 C 正确.

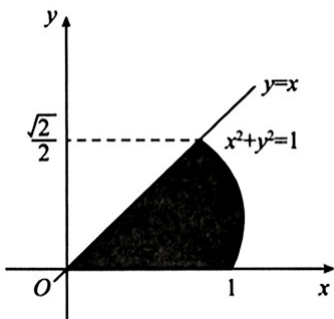


图 10-37

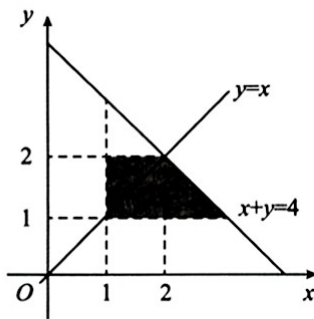


图 10-38

(5)B.

解 区域 D 如图 10-39 所示. 令 $\iint_D f(x, y) dx dy = A$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D xy dx dy + A \iint_D dx dy,$$

即

$$A = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy + A \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy,$$

解得 $A = \frac{1}{8}$, 故 $f(x, y) = xy + \frac{1}{8}$, 选项 B 正确.

二、填空题

(1) $f(2)$.**解** 交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t \left[\int_1^x f(x) dy \right] dx \\ &= \int_1^t f(x)(x-1) dx, \end{aligned}$$

故 $F'(t) = f(t)(t-1)$, 于是 $F'(2) = f(2)$.(2) $\frac{e-1}{2}$.**解** 原积分区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$, 交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 dx \int_0^x \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dy = \int_0^1 \left(e^{x^2} - \int_0^x e^{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \left(x \int_0^x e^{y^2} dy \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{x^2} \cdot x dx \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} dy + \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

(3) $\frac{(a+b)\pi}{2}$.**解** 由轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{a \sqrt{f(y)} + b \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a \sqrt{f(x)} + b \sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a \sqrt{f(y)} + b \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] dx dy \\ &= \frac{a+b}{2} \iint_D dx dy = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \frac{(a+b)\pi}{2}. \end{aligned}$$

(4) $-\pi$.**解** 如图 10-40 所示, 作辅助线 $y = -\sin x$. D_1 与 D_2 关于 y 轴对称, D_3 与 D_4 关于 x 轴对称, 被积函数 xy^5 关于 x, y 均是奇函数, 故 $\iint_D xy^5 dx dy = 0$, 从而有

$$\begin{aligned} I &= - \iint_D dx dy = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 dy \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = -\pi. \end{aligned}$$

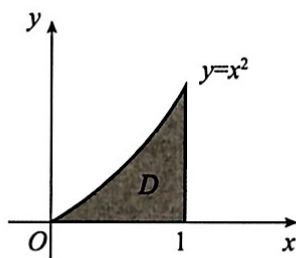


图 10-39

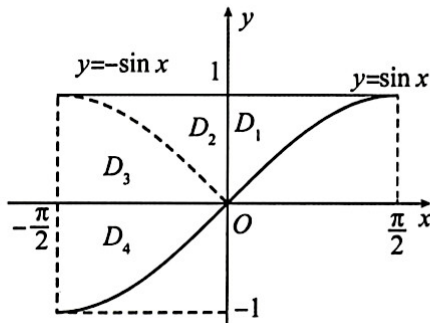


图 10-40

注 本题也可以直接计算,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (xy^5 - 1) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 (xy^5 - 1) dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{6} xy^6 \Big|_{\sin x}^1 - (1 - \sin x) \right] dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{6} x - \frac{1}{6} x \sin^6 x - 1 + \sin x \right) dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = -\pi. \end{aligned}$$

(5) a^2 .

解 由已知,有

$$f(x, y) = \begin{cases} a, & y \leq x \leq 1+y, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} a, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

如图 10-41 所示,由于

$$D_1 = \{(x, y) \mid y \leq x \leq 1+y, 0 \leq y \leq 1\},$$

且在 D_1 的外部 $f(y) = 0, f(x-y) = 0$, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(y)f(x-y) dx dy = \iint_{D_1} f(y)f(x-y) dx dy \\ &= a^2 \iint_{D_1} dx dy = a^2. \end{aligned}$$

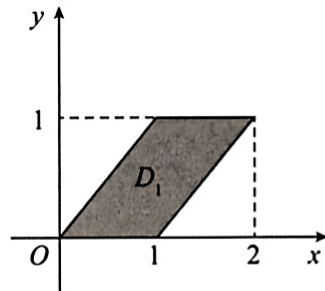


图 10-41

三、解答题

(1) **解** 积分区域 D 如图 10-42 所示.

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 2x, \end{cases}$ 解得 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(yx^2 \Big|_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y [1 - y^2 - (1 - \sqrt{1-y^2})^2] dy \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}y \right) dy \\ &= \left[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}y^2 \right] \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{48}. \end{aligned}$$

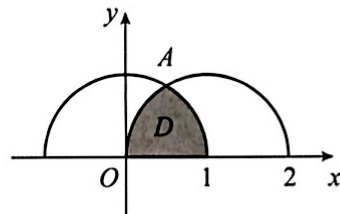


图 10-42

(2) **解** 积分区域 D 如图 10-43 所示, 由于 D 关于 x 轴对称, 故

$$\iint_D 2xy dx dy = 0, \text{ 从而有}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2 + 2xy) dx dy \\ &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^{2a \cos \theta} r^3 dr \\ &= \frac{15}{2} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta \\ &= \frac{15}{2} a^4 \left(\frac{3}{8} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{45}{32} \pi a^4. \end{aligned}$$

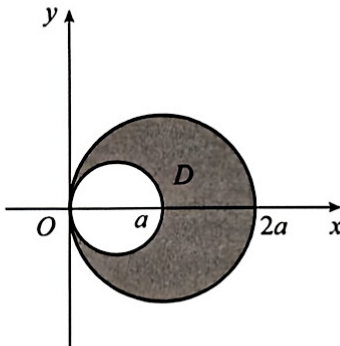


图 10-43

(3) 解 积分区域 D 如图 10-44 所示.

$x^2 + y^2 = 2x$ 与 $x = 2$ 的极坐标方程分别为

$$r = 2\cos\theta, \quad r = 2\sec\theta,$$

$y = x$ 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 故

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{2\sec\theta} \frac{1}{r} \cdot r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec\theta - \cos\theta) d\theta$$

$$= 2(\ln|\sec\theta + \tan\theta| - \sin\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}.$$

(4) 解 由于 $x^2 + y^2 = 4$ 将 D 分为 D_1 与 D_2 , 如图 10-45 所示, 故

$$\begin{aligned} I &= -\iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 4) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 4) dx dy \\ &= -\iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 4) dx dy + \iint_{D-D_1} (x^2 + y^2 - 4) dx dy \\ &= \iint_D (x^2 + y^2 - 4) dx dy - 2\iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 4) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (r^2 - 4)r dr - 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r^2 - 4)r dr \\ &= \frac{9}{2}\pi + 16\pi = \frac{41\pi}{2}. \end{aligned}$$

(5) 解 如图 10-46 所示, 由于 D 关于 x 轴对称, 且 $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 是偶函数,

数, $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 是奇函数, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy + \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= 2\iint_{D_1} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2} + 0 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi \ln 2}{2}, \end{aligned}$$

其中 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(6) 解 如图 10-47 所示, 由于 D 关于 x 轴对称, 且 $2xy$ 关于 y 是奇函数, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 2\int_0^\pi d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cdot r dr \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1 + \cos\theta)^4 d\theta = 16a^4 \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)^4 d\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 16a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t dt = \frac{35\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

(7) 解 如图 10-48 所示, $y = x$ 将 D 分成 D_1 与 D_2 .

在 D_1 上, $0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2}$; 在 D_2 上, $-\frac{\pi}{2} \leq x - y \leq 0$, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \sin(x-y) dx dy - \iint_{D_2} \sin(x-y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x-y) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x-y) dy \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x-y) \Big|_y^{\frac{\pi}{2}-y} dy - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x-y) \Big|_x^{\frac{\pi}{2}-x} dx \end{aligned}$$

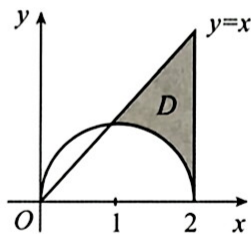


图 10-44

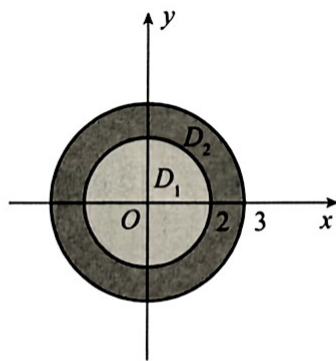


图 10-45

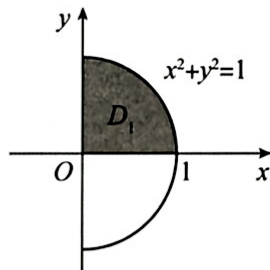


图 10-46

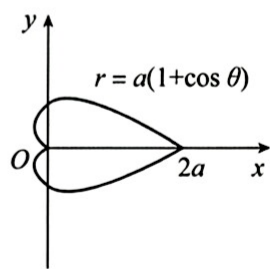


图 10-47

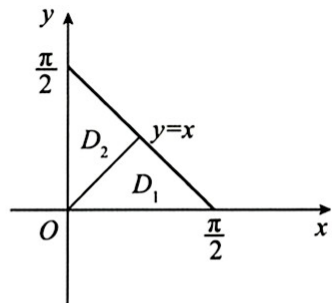


图 10-48

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2y) dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2x) dx \\
 &= 2 \left(y + \frac{1}{2} \cos 2y \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

(8) 解 由于

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r f(r^2) dr = 2\pi \int_0^t r f(r^2) dr,$$

故

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2F(t)}{t^4} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} 4\pi \frac{\int_0^t r f(r^2) dr}{t^4} = \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2)}{t^2} \\
 &= \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2) - f(0)}{t^2} = \pi f'(0) = \pi.
 \end{aligned}$$

(9) 解 如图 10-49 所示, 交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\pi dr \int_0^{2r} (\theta^2 - 1) e^{\theta^2} d\theta = \int_0^\pi e^{\theta^2} \left(\frac{1}{3} \theta^3 - \theta \right) \Big|_0^{2r} dr \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^\pi r^3 e^{\theta^2} dr - 2 \int_0^\pi r e^{\theta^2} dr \xrightarrow{r^2 = t} \frac{4}{3} \int_0^{\pi^2} t e^t dt - \int_0^{\pi^2} e^t dt \\
 &= \left[\frac{4}{3} e^t (t - 1) - e^t \right] \Big|_0^{\pi^2} = \frac{1}{3} e^{\pi^2} (4\pi^2 - 7) + \frac{7}{3}.
 \end{aligned}$$

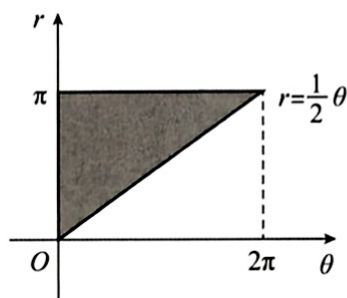


图 10-49

(10) 解 直线 $x + y = i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 将 D 分为 D_k ($k = 1, 2, 3, 4$), 如图 10-50 所示, 则 $[x + y] = k - 1$ ($k = 1, 2, 3, 4$), 故

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} 0 dx dy + \iint_{D_2} 1 dx dy + \iint_{D_3} 2 dx dy + \iint_{D_4} 3 dx dy \\
 &= \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 6.
 \end{aligned}$$

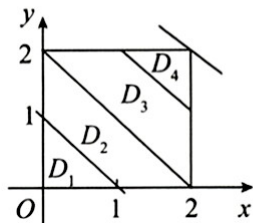


图 10-50

(11) 解 如图 10-51 所示, 设曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 的直角坐标方程为

$y = y[t(x)]$, 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^{y[t(x)]} (x + 2y) dy = \int_0^{2\pi} \{x \cdot y[t(x)] + y^2[t(x)]\} dx \\
 &\xrightarrow{\substack{x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t}} \int_0^{2\pi} [(t - \sin t)(1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2](1 - \cos t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt + \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (t - 2t \cos t + t \cos^2 t) dt + 5\pi = 3\pi^2 + 5\pi.
 \end{aligned}$$

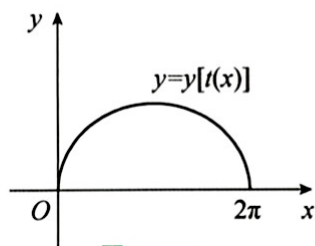


图 10-51

(12) 解 如图 10-52 所示, 由对称性, 得

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \\
 &= 8 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(y \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) dx \\
 &= 8 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} R^3.
 \end{aligned}$$

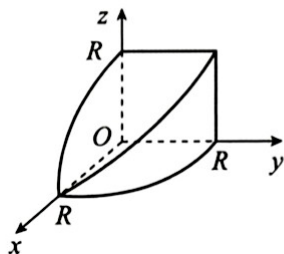


图 10-52

第十一章 空间解析几何(仅数学一要求)

考试要求

1. 理解空间直角坐标系, 理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积), 了解两个向量垂直、平行的条件.
3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式, 掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.
4. 掌握平面方程和直线方程及其求法.
5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角, 并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.
6. 会求点到直线以及点到平面的距离.
7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.
8. 了解常用二次曲面的方程及其图形, 会求简单的柱面和旋转曲面的方程.
9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影, 并会求该投影曲线的方程.

第一节 向量代数

内容与方法提要

一、向量的概念

1. 向量的定义

既有大小又有方向的量称为向量, 常记作 $\boldsymbol{a}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度(模) 记作 $|\boldsymbol{a}|$, 模为 1 的向量称为单位向量, 记作 $\boldsymbol{a}^0$, 此记号表示与 $\boldsymbol{a} (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$ 同向的单位向量.

2. 向量的表达形式

$$(1) \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}.$$

$$(2) |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

$$(3) \boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right).$$

(4) 以 $P_1(a_1, b_1, c_1)$ 为起点、 $P_2(a_2, b_2, c_2)$ 为终点的向量为

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1).$$

(5) 方向余弦: 设非零向量 $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$, 则 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

其中 α 为 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向的夹角, β 为 $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴正向的夹角, γ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴正向的夹角, 称 α, β, γ 为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

说明 ① $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

② $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为单位向量.

3. 向量的投影

向量 $\boldsymbol{a}$ 在数轴 u 上的投影为 $\text{Prj}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos(\widehat{u, \boldsymbol{a}})$, 如图 11-1 所示.

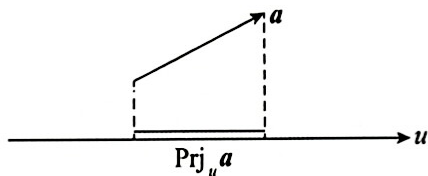


图 11-1

二、向量的运算

设向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

1. 向量的加法

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, 几何描述如图 11-2 所示.

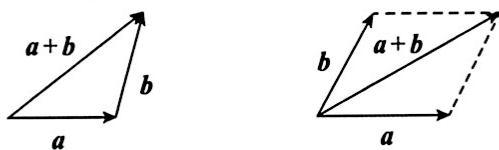


图 11-2

2. 向量的减法

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$, 几何描述如图 11-3 所示.

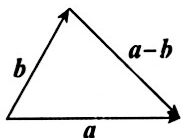


图 11-3

3. 数 乘

$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

4. 向量的数量积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

5. 向量的向量积

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 表示与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 同时垂直的向量, 符合右手坐标系, 其长度为

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

计算公式: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$

说明 ① $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

② 如图 11-4 所示, 设以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为边构成的三角形面积为 S , 则

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2} |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

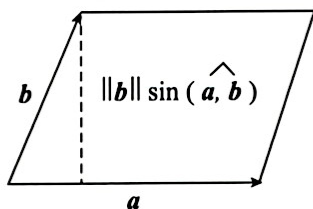


图 11-4

6. 混合积

(1) 定义: 设 a, b, c 为三个向量, 则称 $(a \times b) \cdot c$ 为混合积, 记作 (a, b, c) , 混合积是一个数.

(2) 几何意义: 当 a, b, c 不共面时, 混合积的绝对值 $|(a, b, c)|$ 表示以 a, b, c 为棱的平行六面体的体积 V .

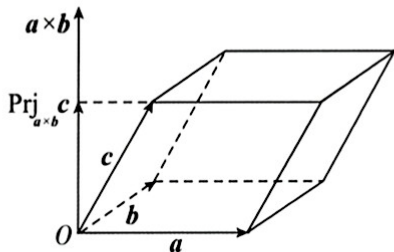


图 11-5

如图 11-5 所示, 平行六面体的底面积为 $|a \times b|$, 高为 $|\text{Prj}_{a \times b} c|$, 若记 $u = a \times b$, 则

$$\begin{aligned} V &= |a \times b| \cdot |\text{Prj}_u c| \\ &= |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos(\widehat{u, c}) \\ &= |(a \times b) \cdot c| = |(a, b, c)|. \end{aligned}$$

(3) 计算公式: 设 $c = (c_1, c_2, c_3)$, 则混合积

$$(a, b, c) = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

说明 向量 a, b, c 共面 $\Leftrightarrow$ 混合积 $(a, b, c) = 0$.

第二节 平面方程与直线方程

内容与方法提要

一、平面方程

1. 点法式方程

设 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in$ 平面 π , 非零向量 $n = (A, B, C) \perp \pi$ (称 n 为平面 π 的法向量), 则平面 π 的方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

2. 一般式方程

设 $n = (A, B, C)$ 为平面 π 的法向量, 则平面 π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$.

3. 截距式方程

设平面 π 与 x, y, z 三个坐标轴的交点分别为 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$, 其中 a, b, c 是不为 0 的常数,

则 π 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

4. 三点式方程

设 $P_1(a_1, a_2, a_3), P_2(b_1, b_2, b_3), P_3(c_1, c_2, c_3)$ 为不在一条直线上的三点, 则过这三点的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ x - b_1 & y - b_2 & z - b_3 \\ x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

说明 设 $P(x, y, z)$ 为平面 π 上的任一点, 则 $\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PP_2}, \overrightarrow{PP_3}$ 三个向量共面, 其混合积 $(\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_2}) \cdot \overrightarrow{PP_3} = 0$, 可得三点式平面方程.

5. 平面族方程

通过直线 $l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 的平面族方程为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中平面 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 不在平面族方程内.

二、直线方程

1. 对称式方程

设 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L, s = (m, n, p) // L (s \neq 0)$, 则直线 L 的方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

其中 $s = (m, n, p)$ 称为直线 L 的方向向量.

2. 一般式方程

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

3. 参数式方程

$$L: \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

其中 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L, s = (m, n, p) // L$.

4. 两点式方程

设直线 L 上的两点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则直线 L 的方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

三、直线、平面的位置关系

设直线 L_1 与直线 L_2 的方向向量分别为 $s_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和 $s_2 = (m_2, n_2, p_2)$, 平面 π_1 与平面 π_2 的法向量分别为 $n_1 = (A_1, B_1, C_1), n_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

(1) 直线 $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow s_1 \cdot s_2 = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

(2) 直线 $L_1 // L_2 \Leftrightarrow s_1 // s_2 \Leftrightarrow s_1 \times s_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

(3) 直线 L_1 与 L_2 的夹角 $\theta = \arccos \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1| \cdot |s_2|}$.

(4) 平面 $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

(5) 平面 $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow n_1 // n_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

(6) 平面 π_1 与平面 π_2 的夹角 $\theta = \arccos \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|}$.

说明 直线与直线的位置关系实际上是其方向向量之间的位置关系, 平面与平面的位置关系是其法向量之间的位置关系.

(7) 直线与平面的位置关系: 设 L 为直线, 其方向向量为 s, π 为平面, 其法向量为 n .

① $L \perp \pi \Leftrightarrow s // n$.

② $L // \pi \Leftrightarrow s \perp n$.

③ 直线 L 与平面 π 的夹角 $\theta = \arcsin \frac{|s \cdot n|}{|s| \cdot |n|}$.

四、距 离

1. 点到平面的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$, 平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, 则 P_0 到平面 π 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2. 点到直线的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 直线 $L: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$, 则点 P_0 到直线 L 的距离为

$$d = \frac{|\mathbf{s} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\mathbf{s}|},$$

其中 $P_1(x_1, y_1, z_1) \in L, \mathbf{s} = (m, n, p)$.

说明 如图 11-6 所示,

$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{P_1P_0}| \sin \theta \\ &= \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}| |\mathbf{s}| \sin \theta}{|\mathbf{s}|} \\ &= \frac{|\mathbf{s} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\mathbf{s}|}. \end{aligned}$$

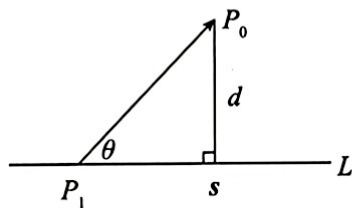


图 11-6

第三节 曲面方程

内容与方法提要

一、柱 面

(1) $S: f(x, y) = 0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面.

(2) $S: f(y, z) = 0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面.

(3) $S: f(x, z) = 0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面.

说明 $f(x, y) = 0$ 在平面直角坐标系中表示曲线, 在空间直角坐标系中表示柱面.

例如 $x^2 + y^2 = 1$ 表示以 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线、母线平行于 z 轴的圆柱面.

(4) 投影柱面与投影曲线: 设空间曲线 $L: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$ 若从方程组中消去 z 得 $H(x, y) = 0$, 则

称 $H(x, y) = 0$ 表示过曲线 L 且平行于 z 轴的投影柱面方程, $\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 表示曲线 L 在 xOy 面上的投影曲线.

二、旋转曲面

1. 坐标面上的曲线绕坐标轴旋转一周所得的曲面

设曲线 $L: \begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$ 则曲线 L 绕 z 轴旋转一周所得的曲面方程为

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

曲线 L 绕 y 轴旋转一周所得的曲面方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

2. 空间直线 L 绕坐标轴旋转一周所得的曲面

设直线 $L: \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$, L 绕 z 轴旋转一周所得曲面记为 S , 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是直线 L 上

的任意一点, P 是 P_0 绕 z 轴转动得到的点. 设 P 的坐标为 (x, y, z) , 则 P_0 到 z 轴与 P 到 z 轴的距离相等, 即 $|P_0A| = |PA|$, 如图 11-7 所示,

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

令 $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} = t$, 化为参数式方程

$$L: \begin{cases} x = a + mt, \\ y = b + nt, \\ z = c + pt. \end{cases}$$

又由于 P_0 在直线 L 上, 所以

$$\begin{cases} x_0 = a + mt, \\ y_0 = b + nt, \\ z_0 = c + pt = z, \end{cases}$$

故 $t = \frac{z-c}{p}$, 得

$$\begin{cases} x_0 = a + mt = a + m \cdot \frac{z-c}{p}, \\ y_0 = b + nt = b + n \cdot \frac{z-c}{p}, \end{cases}$$

代入式 ①, 得曲面方程为

$$x^2 + y^2 = \left(a + m \cdot \frac{z-c}{p}\right)^2 + \left(b + n \cdot \frac{z-c}{p}\right)^2.$$

三、常用二次曲面

1. 球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (R > 0).$$

2. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

当 $a = b$ 时, 椭球面方程变为

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

可以看作 yOz 面上的椭圆 $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面, 也称为旋转椭球面.

3. 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4. 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

5. 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

当 $a^2 = b^2$ 时, 又称为旋转抛物面.

6. 双曲抛物面 (马鞍面)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz.$$

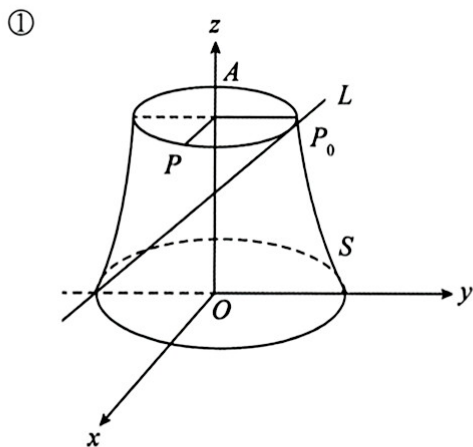


图 11-7

典型例题分析

题型一 向量的运算

例 1 设 $a = (2, 1, -2)$, $b = (0, 1, -1)$, 求 $a \cdot b, \text{Prj}_a b, (\widehat{a, b})$.

解

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2 \times 0 + 1 \times 1 + (-2) \times (-1) = 3, \\ |a| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3, \\ |b| &= \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \\ \cos(\widehat{a, b}) &= \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{Prj}_a b = |b| \cos(\widehat{a, b}) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

例 2 设 $a = (2, 5, 7)$, $b = (1, 2, 4)$, 求同时垂直于 a, b 的单位向量.

解 同时垂直于 a, b 的向量为 $a \times b$, 则

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6i - j - k, \\ |a \times b| &= \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{38}, \end{aligned}$$

故所求单位向量为

$$\left(\frac{6}{\sqrt{38}}, -\frac{1}{\sqrt{38}}, -\frac{1}{\sqrt{38}} \right), \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}} \right).$$

例 3 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(1, 1, 2), B(2, 0, -1), C(2, 1, 2)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

解 因为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|, \\ \overrightarrow{AB} &= (1, -1, -3), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, 0), \\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3j + k, \end{aligned}$$

所以

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

题型二 平面方程与直线方程

例 4 求过点 $(1, -1, 2)$, 且平行于向量 $a = (1, -2, 1), b = (2, 0, -1)$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i + 3j + 4k,$$

由点法式, 得平面方程为

$$2(x-1) + 3(y+1) + 4(z-2) = 0,$$

即 $2x + 3y + 4z - 7 = 0$.

例 5 求过原点且与两条直线 $L_1: \begin{cases} x = 1, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t, \end{cases} L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行的平面方程.

解 由已知, 设 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 s_1, s_2 , 则 $s_1 \times s_2$ 是所求平面的一个法向量, 且

$$s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -i + j - k,$$

又由于平面过点 $(0, 0, 0)$, 故所求平面方程为 $-x + y - z = 0$.

例 6 设直线 L 的一般式方程为 $\begin{cases} x - 2y - 3z + 6 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \end{cases}$ 将其化为直线的对称式方程和参数式方程.

解 方程组中两个方程所表示的平面的法向量分别为

$$n_1 = (1, -2, -3), \quad n_2 = (1, 1, 1),$$

易知 L 的方向向量 s 同时垂直于 n_1 和 n_2 , 取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - 4j + 3k.$$

在直线 L 上任取一点, 如令 $z = 5$, 代入方程组, 得

$$\begin{cases} x - 2y = 9, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = -3. \end{cases}$ 于是 $P_0(3, -3, 5)$ 为直线 L 上的一点, 故所求直线的对称式方程为

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-5}{3},$$

参数式方程为

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -3 - 4t, \\ z = 5 + 3t. \end{cases}$$

例 7 求过点 $P_0(-1, 0, 4)$ 且平行于平面 $\pi: 3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线 $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线 L 的方程.

解 设所求直线 L 的方向向量为 $s = (m, n, p)$, 已知直线 L_1 的方向向量为 $s_1 = (3, 1, 2)$, $P_1(-1, 3, 0)$ 为 L_1 上的一点, P_0 为 L 上的一点, $\overrightarrow{P_0P_1} = (0, 3, -4)$, 由于 L 与 L_1 相交, 所以向量 $s, s_1, \overrightarrow{P_0P_1}$ 共面, 故混合积为 0, 即

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

得

$$10m - 12n - 9p = 0. \quad ①$$

又由于直线 L 与平面 π 平行, 故 s 与 π 的法向量 $n_1 = (3, -4, 1)$ 垂直, 即

$$s \cdot n_1 = 3m - 4n + p = 0. \quad ②$$

联立式 ① 和式 ②, 得

$$\frac{m}{48} = \frac{n}{37} = \frac{p}{4},$$

故所求直线 L 的方程为

$$\frac{x+1}{48} = \frac{y}{37} = \frac{z-4}{4}.$$

例 8 求过原点和直线 $L: \begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ 2x-y+3z+2=0 \end{cases}$ 的平面方程.

分析 利用平面族方程.

解 过直线 L 的平面族方程为

$$x+2y+z-1+\lambda(2x-y+3z+2)=0, \quad ①$$

将点 $(0,0,0)$ 代入式 ①, 得

$$-1+2\lambda=0,$$

即 $\lambda = \frac{1}{2}$, 代入式 ①, 得

$$2x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z = 0,$$

故所求平面方程为

$$4x + 3y + 5z = 0.$$

题型三 旋转曲面

例 9 求曲线 $\begin{cases} z = 2x^2 + 3y^2, \\ z = 12 - x^2 - 3y^2 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影柱面方程与投影曲线方程.

解 由 $\begin{cases} z = 2x^2 + 3y^2, \\ z = 12 - x^2 - 3y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得投影柱面方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

它在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

例 10 求曲线 $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面方程.

解 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是给定曲线上的一点, 当曲线转动时, 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 转到点 $P(x, y, z)$, 则 $z = z_0$, 点 P 到 z 轴的距离与点 P_0 到 z 轴的距离相等, 即

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |x_0|,$$

所以

$$x_0 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z_0 = z,$$

从而所求旋转曲面方程为

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4.$$

例 11 求直线 $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面方程.

解 直线 L 的参数式方程为 $\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = 1 + 2t, \end{cases}$ 当其上任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 转至点 $P(x, y, z)$ 时, 有

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = x^2 + y^2 = 1 + t^2, \\ z_0 = z = 2t + 1. \end{cases}$$

消去 t , 得到曲面上任一点的坐标满足的关系式为

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 = 1.$$

例12 求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所得的曲面方程.

解 应用平面族方程求出经过 L 且与 π 垂直的平面. 将直线 L 的方程改写为一般式方程, 即

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$$

设经过 L 的平面族方程为

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0,$$

即

$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

又由于它与平面 π 垂直, 故有

$$1-(\lambda-1)+2\lambda=0,$$

解得 $\lambda=-2$, 所以经过 L 且垂直于 π 的平面方程为

$$x-3y-2z+1=0,$$

从而 L_0 的方程为

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0, \end{cases}$$

化为参数式方程, 即

$$\begin{cases} x=2y, \\ y=y, \\ z=-\frac{1}{2}(y-1) \end{cases} \quad (\text{视 } y \text{ 为参数}),$$

于是 L_0 绕 y 轴旋转一周所得的曲面方程为

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2,$$

即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

习题演练

一、选择题

(1) 设 $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{2}$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=2$, 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|=(\quad)$.

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

(2) 设 $\mathbf{a}=(1,1,0)$, $\mathbf{b}=(1,0,1)$, 则以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为斜边的平行四边形的面积为 $(\quad)$.

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

(3) 设向量 $\mathbf{a}=(1,2,1)$, $\mathbf{b}=(-1,0,2)$, $\mathbf{c}=(0,k,-3)$ 共面, 则 $k=(\quad)$.

- A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

(4) 在曲线 $L: \begin{cases} x=t, \\ y=-t^2, \\ z=t^3 \end{cases}$ 的所有切线中与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线有 $(\quad)$ 条.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

- (1) 设 a, b 为非零向量, 且 $(a+3b) \perp (7a-5b), (a-4b) \perp (7a-2b)$, 则 a 与 b 的夹角 $(\hat{a}, \hat{b}) =$ _____.
- (2) 过原点及 $P(1, -3, 2)$ 且与平面 $4x - y + 2z = 5$ 垂直的平面方程为 _____.
- (3) 过点 $P(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程为 _____.
- (4) 曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2(z-x) = 0, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 在 xOy 坐标面上的投影曲线方程为 _____.
- (5) 直线 $L_1: x-1 = \frac{y-5}{2} = z+6$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角 $\varphi =$ _____.
- (6) 点 $P_0(1, -1, 0)$ 到直线 $L: \begin{cases} 2y-3z=3, \\ x=y \end{cases}$ 的距离 $d =$ _____.
- (7) 曲线 $L: \begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为 _____.
- (8) 椭圆抛物面 $y^2 + z^2 = x$ 与平面 $x + 2y - z = 0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程分别为 _____.

三、解答题

- (1) 求一直线, 它经过 $P_0(2, -1, 3)$, 且与直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ 相交, 又平行于平面 $\pi: 3x - 2y + z + 5 = 0$.
- (2) 求与两直线 $L_1: x+2 = 3-y = z+1, L_2: \frac{x+4}{2} = y = \frac{z-4}{3}$ 同时垂直相交的直线方程.
- (3) 求过点 $P(2, 0, -3)$ 且与直线 $L: \begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.
- (4) 求下列平面 π 的方程:
- (I) 平面 π 过点 $(1, 8, 2)$, 且过直线 $L: \begin{cases} x+y-z-2=0, \\ 3x+y-z-5=0; \end{cases}$
- (II) 平面 π 与点 $P(1, 2, 1)$ 的距离为 1, 且过直线 $L: \begin{cases} 3x-2y+2=0, \\ x-2y-z+6=0. \end{cases}$
- (5) 设柱面的母线平行于直线 $x=y=z$, 而准线为直线 $L: \begin{cases} x+y-z=1, \\ x-y+z=0, \end{cases}$ 求该柱面方程.
- (6) 求直线 $L: \begin{cases} x=1, \\ y=z \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面方程.
- (7) 求顶点在原点, 且准线为 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z=c \quad (c \neq 0) \end{cases}$ 的锥面方程.

习题演练解答

一、选择题

(1) A.

解

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \varphi = 2\sqrt{2} \sin \varphi,$$

又

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

于是 $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, 选项 A 正确.

(2) B.

解 以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为斜边的平行四边形的面积为 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1),$$

故面积 $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$, 选项 B 正确.

(3) D.

解 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 混合积 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, 即 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & k & -3 \end{vmatrix} = 0$, 解得 $k = -2$, 选项 D 正确.

(4) B.

解 曲线 L 上任一点 t 的切线的方向向量为 $\mathbf{s} = (1, -2t, 3t^2)$. 由已知, 有

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = (1, -2t, 3t^2) \cdot (1, 2, 1) = 0,$$

即 $3t^2 - 4t + 1 = 0$, 解得 $t = 1, t = \frac{1}{3}$, 故与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线有 2 条, 选项 B 正确.

二、填空题

(1) $\frac{\pi}{3}$.

解 由已知, 得

$$\begin{cases} (\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 0, \\ (\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) \cdot (7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 7\mathbf{a}^2 + 16\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 15\mathbf{b}^2 = 0, & \text{①} \\ 7\mathbf{a}^2 - 30\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 8\mathbf{b}^2 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由式 ① - 式 ②, 得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}^2}{2}$, 由式 ① $\times 8$ + 式 ② $\times 15$, 得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}^2}{2}$, 故 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 于是

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\frac{\mathbf{a}^2}{2}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{a}|} = \frac{1}{2},$$

所以 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

(2) $4x - 6y - 11z = 0$.

解 设所求平面方程为 π .

由已知, $\overrightarrow{OP} = (1, -3, 2)$ 与平面 π 平行, 而 π 与已知平面 $4x - 3y + 2z = 5$ 垂直, 故 $(4, -1, 2)$ 与平面 π 平行, 于是 π 的法向量

$$\mathbf{n} = (1, -3, 2) \times (4, -1, 2) = (-4, 6, 11),$$

故所求平面 π 的方程为

$$-4(x - 0) + 6(y - 0) + 11(z - 0) = 0,$$

即 $4x - 6y - 11z = 0$.

(3) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

解 在直线 L 上找一点 Q , 使得 $\overrightarrow{PQ} \perp L$, 则 PQ 为所求直线. 由已知, L 的方向向量 $\mathbf{s} = (3, 2, -1)$,

L 的参数式方程为 $\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -t, \end{cases}$ Q 点的坐标为 $(-1 + 3t, 1 + 2t, -t)$, 故 $\overrightarrow{PQ} = (3t - 3, 2t, -t - 3)$.

要使 $\overrightarrow{PQ} \perp L$, 即 $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{s} = 0$, 故

$$(3t - 3, 2t, -t - 3) \cdot (3, 2, -1) = 0,$$

即 $14t - 6 = 0$, 得 $t = \frac{3}{7}$, 所以 Q 点的坐标为 $(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$, 故 $\overrightarrow{PQ} = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$, 所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

$$(4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ z = 0. \end{cases}$$

解 将曲线 L 的方程消去 z , 得 $x^2 + y^2 = 2y$, 故投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$(5) \arccos \frac{1}{6}.$$

解 L_1 的方向向量 $\mathbf{s}_1 = (1, 2, 1)$, L_2 的方向向量为

$$\mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

故所求夹角 φ 满足

$$\cos \varphi = \frac{|(-1) \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{6},$$

所以 $\varphi = \arccos \frac{1}{6}$.

注 两条异面直线的夹角只能是锐角或直角.

$$(6) \frac{\sqrt{341}}{11}.$$

解 将 L 的方程化为参数式方程 $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 3t, \\ z = 2t - 1, \end{cases}$ 过点 $P_0(1, -1, 0)$ 且垂直于 L 的平面 π 的方程为

$$3(x - 1) + 3(y + 1) + 2z = 0,$$

即 $3x + 3y + 2z = 0$.

下面求出直线 L 与平面 π 的交点, 将 L 的参数式方程代入平面方程, 有

$$3(3t) + 3(3t) + 2(2t - 1) = 0,$$

解得 $t = \frac{1}{11}$.

直线与平面 π 的交点为 $P_1(\frac{3}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{9}{11})$, 故

$$d = |\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{\left(\frac{3}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{11} + 1\right)^2 + \left(-\frac{9}{11} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{341}}{11}.$$

$$(7) x^2 - (y^2 + z^2) = 2.$$

解 根据旋转曲面的性质, 可得旋转曲面方程为 $x^2 - (y^2 + z^2) = 2$.

$$(8) \begin{cases} x^2 + 5y^2 + 4xy = x, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5z^2 + x^2 - 2xz = 4x, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = z - 2y, \\ x = 0. \end{cases}$$

解 截线为 $\begin{cases} y^2 + z^2 = x, \\ x + 2y - z = 0, \end{cases}$ 将方程组分别消去 z, y, x 后, 得

$$y^2 + (x + 2y)^2 = x, \quad \frac{1}{4}(z - x)^2 + z^2 = x, \quad y^2 + z^2 = z - 2y,$$

故截线在 xOy 面、 xOz 面、 yOz 面上的投影方程分别为

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 4xy = x, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5z^2 + x^2 - 2xz = 4x, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = z - 2y, \\ x = 0. \end{cases}$$

三、解答题

(1) **解** 在 L_1 上找一点 $x = 1 + 2t, y = -t, z = -2 + t$, 使其与点 P_0 的连线垂直于平面 π 的法线, 得

$$3(1 + 2t - 2) - 2(-t + 1) + (-2 + t - 3) = 0,$$

解得 $t = \frac{10}{9}$. 两点连线为所求直线, 即

$$\frac{x - 2}{11} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 3}{-35}.$$

(2) **解** 所求直线的方向向量为

$$s = (1, -1, 1) \times (2, 1, 3) = (-4, -1, 3).$$

取 L_1 与 L_2 上两点的连线, 使其平行于 $s = (-4, -1, 3)$. 将 L_1 与 L_2 写成参数式方程的形式, 有

$$x_1 = -2 + t, \quad y_1 = 3 - t, \quad z_1 = -1 + t,$$

$$x_2 = -4 + 2u, \quad y_2 = u, \quad z_2 = 4 + 3u.$$

由

$$\frac{x_1 - x_2}{-4} = \frac{y_1 - y_2}{1} = \frac{z_1 - z_2}{3},$$

解得 $t = 2, u = 0$, 所求直线应为两点 $(0, 1, 1)$ 与 $(-4, 0, 4)$ 的连线, 即

$$\frac{x}{-4} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{3}.$$

(3) **解** 直线 L 的方向向量为

$$s = (1, -2, 4) \times (3, 5, -2) = (-16, 14, 11),$$

故所求平面的法向量为 $n = (-16, 14, 11)$, 所以平面方程为

$$-16(x - 2) + 14(y - 0) + 11(z + 3) = 0.$$

(4) **解** (I) 由平面束方程, π 的方程为

$$(x + y - z - 2) + \lambda(3x + y - z - 5) = 0.$$

将点 $(1, 8, 2)$ 代入式 ①, 得 $\lambda = -\frac{5}{4}$, 故 π 的方程为

$$11x + y - z - 17 = 0.$$

(II) 由平面束方程, π 的方程为

$$(3x - 2y + 2) + \lambda(x - 2y - z + 6) = 0,$$

即

$$(3 + \lambda)x - (2 + 2\lambda)y - \lambda z + (2 + 6\lambda) = 0.$$

又由已知, 有

$$d = \frac{|(3 + \lambda) - 2(2 + 2\lambda) - \lambda + (2 + 6\lambda)|}{\sqrt{(3 + \lambda)^2 + (2 + 2\lambda)^2 + \lambda^2}} = 1,$$

即

$$|2\lambda + 1| = \sqrt{6\lambda^2 + 14\lambda + 13},$$

故 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, 解得 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = -3$, 所求平面 π 的方程为

$$x + 2y + 2z - 10 = 0 \quad \text{或} \quad 4y + 3z - 16 = 0.$$

(5) 解 柱面可看成由经过准线上的每一个点作平行于母线的直线所构成.

在准线上任取一点 (x_0, y_0, z_0) , 则其满足

$$\begin{cases} x_0 + y_0 - z_0 = 1, \\ x_0 - y_0 + z_0 = 0. \end{cases}$$

作平行于母线的直线, 设直线上点的坐标为 (x, y, z) , 则方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = y_0 - \frac{1}{2} + t. \end{cases}$$

(6) 解 设所求曲面为 S , 任取 $P(x, y, z) \in S$. P 所在圆与直线 L 的交点为 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, 该圆的圆心为 $R(0, 0, z)$, 故

$$|PR| = |P_0R|,$$

即

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

又由于 $P_0 \in L$, 所以 $x_0 = 1, y_0 = z_0 = z$, 故所求曲面方程为 $x^2 + y^2 = 1 + z^2$.

(7) 解 如图 11-8 所示, 设 $M(x, y, z)$ 为锥面上的任意一点, 过原点 O 与 M 的直线与 $z = c$ 交于点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则有

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

由于 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{OM_1}$ 共线, 故

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{c},$$

即 $x_1 = \frac{cx}{z}, y_1 = \frac{cy}{z}$, 代入式 (1), 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

它表示一个椭圆锥面, 特别地, 当 $a = b$ 时, 它表示圆锥面.

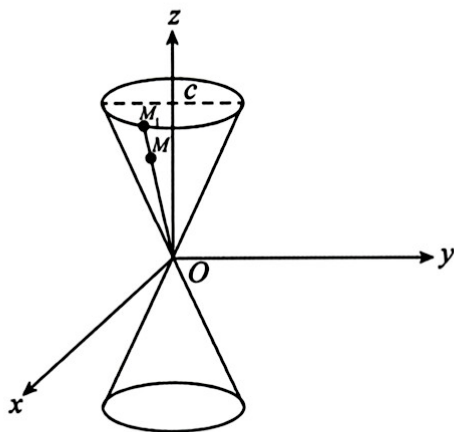


图 11-8

第十二章 无穷级数 (仅数学一、数学三要求)

考试要求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念, 掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.
2. 掌握几何级数与 p 级数收敛与发散的条件.
3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法和根值判别法, 会用积分判别法.
4. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法.
5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.
6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.
7. 理解幂级数收敛半径的概念, 并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.
8. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质 (和函数的连续性、逐项求导和逐项积分), 会求一些幂级数在收敛区间内的和函数, 并会由此求出某些数项级数的和.
9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.
10. 掌握 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林展开式, 会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.
11. (仅数学一要求) 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理, 会将定义在 $[-l, l]$ 上的函数展开为傅里叶级数, 会将定义在 $[0, l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数, 会写出傅里叶级数的和函数的表达式.

第一节 常数项级数

内容与方法提要

一、常数项级数的基本概念

1. 定义

$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 称为常数项级数, 其中 $\{u_n\}$ 为数列.

2. 收敛与发散

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 时, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S ; 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在时, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛于 1.

二、常数项级数的性质

(1) 设常数 $k \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 有相同的敛散性, 且若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = kS.$$

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_1 \pm S_2.$$

说明 ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 都发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} + (-1)^n]$ 收敛于 0.

(3) 在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的敛散性.

(4) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对级数的项任意加括号后所构成的级数仍收敛.

说明 ① 加括号后的级数收敛, 原级数不一定收敛.

例如, $(-1+1) + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots$ 收敛, 但原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散.

② 任意加括号时, 不能改变原级数的项的顺序.

(5) 级数收敛的必要条件: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

说明 ① 事实上, 设 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

但若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛. 如调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 虽然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

② 收敛的必要条件常用来判别级数发散, 即若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散.

三、两个常用级数

1. 等比级数(或几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0) \begin{cases} \text{收敛于 } \frac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{发散}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

说明 因为 $S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1, \end{cases}$ 所以

① 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, 等比级数收敛;

② 当 $|q| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 等比级数发散;

③ 当 $q = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$, 等比级数发散;

④ 当 $q = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 等比级数发散.

2. p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1, \\ \text{发散}, & 0 < p \leq 1. \end{cases}$$

四、正项级数的敛散性判别

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $u_n \geq 0$, 则称该级数为正项级数.

1. 收敛的充分必要条件

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

说明 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加, 当 $\{S_n\}$ 有上界时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2. 比较法

已知 $u_n \leq kv_n (k > 0)$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

3. 比较法的极限形式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \begin{cases} 0 < l < +\infty, & \text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 同时收敛或同时发散,} \\ l = 0, & \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛,} \\ l = +\infty, & \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散.} \end{cases}$$

说明 ① 比较法的关键是找一个好的比较对象, 等比级数与 p 级数是常用的比较对象. 如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, 由于 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 故所给级数发散.

② 比较法的极限形式的关键是“找同阶无穷小或等价无穷小”.

例如 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 由于

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad (n \rightarrow \infty),$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛, 故原级数收敛.

4. 比值法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \begin{cases} l < 1, & \text{收敛,} \\ l > 1(+\infty), & \text{发散,} \\ l = 1, & \text{不确定.} \end{cases}$$

说明 ① 当 $l < 1$ 时, 取 $\epsilon > 0$, 使得 $l + \epsilon = r < 1$, 由数列极限的定义, 知存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \epsilon = r < 1$, 即 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$, 故

$$u_{N+1} < ru_N, u_{N+2} < r^2 u_N, \dots, u_{N+k} < r^k u_N, \dots$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_N$ 收敛 (等比级数), 由比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

当 $l > 1$ 时, 取 $\varepsilon > 0$, 使得 $l - \varepsilon = r > 1$, 则存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon = r > 1$, 即

$u_{n+1} > u_n$, 故当 $n \geq N$ 时, $\{u_n\}$ 单调增加, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $l = 1$ 时, 如对于 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$), 总有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, 但当 $p > 1$ 时, 该级数收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, 该级数发散.

② 当 $l = 1$ 时, 用比较法或定义判别.

5. 根值法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l, \begin{cases} l < 1, & \text{收敛,} \\ l > 1(+\infty), & \text{发散,} \\ l = 1, & \text{不确定.} \end{cases}$$

说明 ① 比值法、根值法实际上是与等比级数做比较(从比值法的证明过程中可以看出), 当 $l = 1$ 时, 不能确定其敛散性, 说明以等比级数作为比较对象不能判别级数的敛散性, 即以等比级数作为“尺”粗了, 或者说“精度不够”.

② 根值法的应用范围比比值法更广.

例如 判别 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 的敛散性.

解 用根值法. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{-n-(-1)^n}{n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1,$$

故原级数收敛. 用比值法. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{1-2 \cdot (-1)^n}} = \begin{cases} 2, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{8}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在, 因此用比值法无法判别其敛散性.

6. 积分判别法

设非负函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 的敛散性相同.

例如 讨论 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 取 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ($p > 0$), 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少且非负. 由于

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^{+\infty},$$

所以当 $p > 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

积分判别法常用于判别含对数的级数的敛散性.

例如 判别 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ ($p > 0$) 的敛散性.

解 取 $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$, $x \in [2, +\infty)$, 则 $f(x)$ 单调减少且非负.

$$\text{由于} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} +\infty (\text{发散}), & p \leq 1, \\ \frac{1}{(p-1)\ln^{p-1} 2} (\text{收敛}), & p > 1, \end{cases} \text{故} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \begin{cases} \text{发散}, & p \leq 1, \\ \text{收敛}, & p > 1. \end{cases}$$

③ 比较法、比值法、根值法的条件是判别级数收敛的充分非必要条件, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

五、交错级数

形如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n (u_n > 0)$ 的级数称为交错级数.

莱布尼茨定理: $\begin{cases} \{u_n\} \text{ 单调减少,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \text{ 收敛.}$

说明 ① 莱布尼茨定理的条件是判别级数收敛的充分非必要条件, 即若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛 $\nRightarrow$ 数列 $\{u_n\}$ 单调减少.

② 判别 $\{u_n\}$ 的单调性时, 可以利用函数的导数进行判断.

例如 判别 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

解 令 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 则

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0, \quad x > e^2,$$

故 $\left\{ \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \right\}$ 从 $n \geq 9$ 开始单调减少.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

由莱布尼茨定理, 知原级数收敛.

$$\textcircled{3} \begin{cases} \{u_n\} \text{ 单调减少,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0) \text{ 发散} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a > 0.$$

事实上, 由 $\{u_n\}$ 单调减少且 $u_n > 0$ (有下界), 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \geq 0$, 若 $a = 0$, 由莱布尼茨定理, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 矛盾, 故 $a > 0$.

六、任意项级数

1. 绝对收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

2. 条件收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

3. 绝对收敛的性质

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

说明 ① 由于 $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$, 而 $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$, 所以由条件, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 均收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 一般不能判定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散(可能条件收敛), 如果用比值法或根值法根据 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$ 判别出 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则可直接得到 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散, 这是因为此时可推得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0$, 由级数收敛的必要条件, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解

$$\left| (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right| = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

用根值法, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1,$$

所以原级数不绝对收敛, 并且可直接得到原级数发散(不用判别条件收敛).

典型例题分析

题型一 正项级数的敛散性

例 1 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}};$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^a} (a > 0);$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n - 3^n}.$

解 (1) 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 用比较法的极限形式. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n \sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

(2) 由于

$$2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \sim 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \pi \quad (n \rightarrow \infty),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \pi$ 收敛(等比级数), 由比较法的极限形式, 知原级数收敛.

(3) 用比较法的极限形式.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^a} &= \frac{2}{n^a (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{2}{n^{a+\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}} \right)} \\ &\sim \frac{2}{n^{a+\frac{1}{2}} \cdot 2} = \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

当 $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 收敛; 当 $0 < \alpha + \frac{1}{2} \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 发散. 故当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 原级数收敛; 当 $0 <$

$\alpha \leq \frac{1}{2}$ 时, 原级数发散.

(4) 用比值法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3^n}{5^{n+1} - 3^{n+1}} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{5 - 3\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{4}{5} < 1,$$

故原级数收敛.

注 正项级数的敛散性判别的思路:

- ① 先看 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 是否为 0.
- ② 考虑比值法或比较法.
- ③ 一般证明题多用比较法.

题型二 交错级数的敛散性

例 2 判别下列交错级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

分析 对于交错级数的敛散性, 常用莱布尼茨定理判别, 若不满足该定理的条件, 则需用其他方法.

解 (1) 设 $a_n = \frac{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)}$, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

可知原级数发散.

(2) 记 $a_n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, 由

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 4n + 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} < 1,$$

可知 $a_{n+1} < a_n$, 即 $\{a_n\}$ 单调减少. 又由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

由莱布尼茨定理, 知原级数收敛.

(3) 记 $a_n = \frac{\ln n}{n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, x > e$, 即 $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ 从第 3 项开始单调减少, 所以原级数收敛.

题型三 绝对收敛与条件收敛的判别

例 3 判别下列级数的敛散性, 若收敛, 则判别是绝对收敛还是条件收敛.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin \frac{n\pi}{3}}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}.$$

分析 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 先讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的敛散性, 若收敛, 则原级数绝对收敛; 若发散, 则进而判别是否为条件收敛.

解 (1) 该级数是任意项级数, 易见 $\left| \frac{n^3 \sin \frac{n\pi}{3}}{2^n} \right| \leq \frac{n^3}{2^n}$. 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$, 用比值法, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ 收敛. 再由比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^3 \sin \frac{n\pi}{3}}{2^n} \right|$ 收敛, 所以原级数绝对收敛.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 为交错级数, 由于 $\left| \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \right| = \frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$, 所以原级数不绝对收敛, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{\ln n}{n}} = 0.$$

令 $f(x) = x - \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0 (x > 1)$, 故 $f(x)$ 单调增加, $\frac{1}{f(x)}$ 单调减少, 由此可知, $\frac{1}{n - \ln n} = \frac{1}{f(n)}$ 单调减少, 根据莱布尼茨定理, 知原级数条件收敛.

题型四 常数项级数的综合题

例 4 下列级数中, 发散的是().

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n - n} & \text{B. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right) \\ \text{C. } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} & \text{D. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \end{array}$$

解 对于选项 A, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n - n}$ 是正项级数. 由于

$$\frac{4}{2^n - n} = \frac{4}{2^n \left(1 - \frac{n}{2^n} \right)} \sim \frac{4}{2^n} \quad (n \rightarrow \infty),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$ 收敛, 由比较法的极限形式, 知原级数收敛.

对于选项 B, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$ 为正项级数, 利用泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

由比较法的极限形式, 可知原级数收敛.

对于选项 C,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n},$$

由莱布尼茨定理, 知 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ 收敛. 由 $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 所以原级数发散, 故选项 C 正确.

对于选项 D, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

根据比值法, 知原级数收敛.

例 5 设常数 $a > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \cos \frac{a}{n} + \frac{1}{n} \right)$ ().

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 收敛性与 a 有关

解

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \cos \frac{a}{n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \cos \frac{a}{n} \right), \end{aligned}$$

由莱布尼茨定理, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛, 又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 不绝对收敛, 故

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 条件收敛.

由于

$$\left| (-1)^{n-1} \left(1 - \cos \frac{a}{n} \right) \right| = 1 - \cos \frac{a}{n} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2}{2n^2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{2n^2} = \frac{a^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \cos \frac{a}{n} \right)$ 绝对收敛, 由此可知原级数条件收敛, 选项 B 正确.

注 这里利用了如下结论:

设有交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$), $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n$ ($v_n > 0$).

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (u_n + v_n)$ 条件收敛.

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (u_n + v_n)$ 条件收敛.

证 由 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 而

$$|(-1)^{n-1} (u_n + v_n)| = |u_n + v_n| > |u_n|,$$

由比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (u_n + v_n)$ 不绝对收敛.

又由于两个级数均条件收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (u_n + v_n)$ 收敛,且条件收敛.

同理可证结论 ②.

例 6 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ (k 为常数) ().

- A. 绝对收敛 B. 条件收敛
C. 发散 D. 收敛性与 k 有关

解 所给级数为任意项级数, 由于

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k) \right| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 选项 A 正确.

注 此题也可利用下列结论:

① $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$ 收敛.

证 级数的前 n 项和为

$$\begin{aligned} S_n &= (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_n - u_{n+1}) \\ &= u_1 - u_{n+1}. \end{aligned}$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 - u_{n+1})$ 存在, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$ 收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 - u_{n+1})$ 存在, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在.

在本题中, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ 显然收敛 (因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, 极限存在).

结论 ① 在考试中常用,应引起重视.

② 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $a \leq f(x) \leq b$, 且 $|f'(x)| \leq k < 1$, 任取 $u_0 \in (a, b)$, 令 $u_n = f(u_{n-1})$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 绝对收敛.

证 由于

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= |f(u_n) - f(u_{n-1})| = |f'(\xi_1)| \cdot |u_n - u_{n-1}| \\ &\leq k |u_n - u_{n-1}| \leq k^2 |u_{n-1} - u_{n-2}| \leq \dots \leq k^n |u_1 - u_0|, \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} k^n |u_1 - u_0|$ 收敛, 由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 绝对收敛.

事实上,由结论①还可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 必存在.

例 7 下列级数中, 发散的是().

A. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{\pi}{2n}$

$$\text{B. } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$C. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$D. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

解 选项 B 正确.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 是交错级数, 但不满足 $a_{n+1} \leq a_n$, 故不能用莱布尼茨定理. 由

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n [\sqrt{n} - (-1)^n]}{n-1} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1},$$

故该级数可表示为一个条件收敛级数与一个发散的调和级数之差, 因此该级数发散.

选项 A 是交错级数, 利用莱布尼茨定理, 知该级数收敛.

选项 C 是绝对收敛级数, 从而该级数收敛.

选项 D 是交错级数, 不满足 $a_{n+1} \leq a_n$, 不能用莱布尼茨定理, 需用下面定义求解.

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

是单调减少数列, 且

$$S_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

可知 $\{S_{2n}\}$ 有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$. 又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 所以该级数收敛.

题型五 数项级数的证明题

例 8 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$ 的值;

(2) 证明: 对任意的常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \end{aligned}$$

(2) 由于

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx \stackrel{\tan x = t}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

所以

$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}.$$

由 p 级数的收敛性及比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

注 数项级数的敛散性的证明题常用比较法.

例 9 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 得 $f(0) = 0, f'(0) = 0$. 用泰勒公式将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开, 得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 又由于 $f''(x)$ 连续, 故 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有界, 即存在 $M \geq 0$, 使得 $|f''(x)| \leq M$, 于是

$$|f(x)| = \frac{1}{2} |f''(\xi)| x^2 \leq \frac{M}{2} x^2.$$

令 $x = \frac{1}{n}$ (n 充分大), 则 $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

例 10 设 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(1) **证** 由于 $\cos a_n - \cos b_n = a_n$, 且 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < a_n < b_n$ $\left[y = \cos x \right.$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $\left. \right]$. 又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(2) **证法 1** 用比较法. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{b_n}}{\frac{a_n}{b_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos b_n}{b_n^2} \cdot \frac{a_n}{1 - \cos b_n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1 - \cos b_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n + 1 - \cos a_n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

证法 2

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n} \\ &= -\frac{2 \sin \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right) \sin \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right)}{b_n} \sim \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

又因为 $0 \leq \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n} \leq \frac{b_n}{2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

例11 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$, 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$, 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

证 (1) 由已知及拉格朗日中值定理, 得

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \\ &< \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2^2} |x_{n-1} - x_{n-2}| < \dots \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1| \quad (\xi \text{ 介于 } x_{n-1} \text{ 与 } x_n \text{ 之间}). \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1|$ 收敛, 由比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ 绝对收敛.

(2) 由(1), 知 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 故其部分和的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_1$$

存在, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A = f(A)$, 又由于

$$f(A) - f(0) = f'(\xi_1)A \quad (\xi_1 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } A \text{ 之间}),$$

故 $A - 1 = f'(\xi_1)A$, 即 $A = \frac{1}{1 - f'(\xi_1)}$, 由已知, 有 $0 < f'(\xi_1) < \frac{1}{2}$, 故 $0 < A < 2$.

例12 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) (n = 1, 2, \dots)$, 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

分析 应用单调有界准则证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 用(1)的结果证明(2).

证 (1) 由 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ 及 $a_1 = 2$, 知 $a_n > 0$, 再由 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 知

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}} = 1,$$

即 $\{a_n\}$ 有下界. 又由于

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - a_n \right) = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leq 0,$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 记为 a , 则 $a \geq 1$, 对 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ 两边同时取极限, 可得 $a = 1$.

(2) 由(1), 知 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界 1, 从而

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{a_{n+1}} (a_n - a_{n+1}) \leq a_n - a_{n+1}.$$

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 的部分和

$$S_n = a_1 - a_{n+1} \rightarrow a_1 - a \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛, 由比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

注 (2) 也可用比值法证明.

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n^2 + 1} \geq 0. \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_{n+1}^2 + 1} \cdot \frac{a_n^2 + 1}{a_n^2 - 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 1}{a_{n+1}^2 + 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n^2 - 1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)^2 - 1}{a_n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - 1 + \frac{1 - a_n^2}{a_n^2}}{4(a_n^2 - 1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - 1}{4a_n^2} = 0 < 1,
 \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

题型六 抽象级数的敛散性判别

判别抽象级数的敛散性常用如下结论:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) \text{ 收敛} \nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{ 收敛}.$$

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, 但

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) \text{ 发散}.$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) \text{ 发散}.$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0) \text{ 发散}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n (v_n \geq 0) \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ 发散}.$$

说明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 的前 n 项和为 S_n , $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的前 n 项和分别为 S'_n 和 S''_n , 则

$$\begin{aligned}
 S_n &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) \\
 &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\
 &= S'_n + S''_n.
 \end{aligned}$$

由于 $\{S'_n\}, \{S''_n\}$ 单调增加, 由条件 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散, 故 $S'_n \rightarrow +\infty, S''_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 于是当

$n \rightarrow \infty$ 时, $S_n \rightarrow +\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) \text{ 收敛}.$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) \text{ 收敛且 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}.$$

说明 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 且

$$S_{2n} = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{2n-1} + u_{2n}),$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$. 又由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = S,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(7) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 都收敛.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 中一个发散, 一个收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(9) 正项级数的比较法、比值法、根值法定理的条件是充分非必要条件.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛.

说明 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n v_n|}{|v_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0,$$

及比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.

这里由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 至少有一个发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散.

说明 ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 均发散 (否则矛盾), 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散 [见结论(4)].

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛或发散, $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散.

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 均收敛.

(13) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 收敛.

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 即交错级数收敛 $\Rightarrow$ 加括号后的级数收敛.

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 均收敛.

说明 ① 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 从而当 n 充分大时, 有 $|u_n| < 1$ (有界), 由于 $u_n \geq 0$, 故 $u_n < 1$,

所以 $u_n^2 \leq u_n$, 由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 (缺正项级数条件).

② 由 $\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 均收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$ 收敛, 则根据比较法,

知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛.

③ 由 $\frac{\sqrt{u_n}}{n} = \sqrt{u_n \cdot \frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2} \right)$ 和比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ 收敛.

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 均收敛.

说明 由 $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$ 及比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

再由 $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_nv_n$, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛, 故结论成立.

$$(17) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \sum_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1} \text{ 收敛}.$$

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 但

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right]^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}} \end{aligned}$$

均发散.

$$(18) \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} \text{ 绝对收敛}.$$

说明 由

$$\left| \frac{u_n}{n} \right| = \left| u_n \cdot \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(u_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

及比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

例 13 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则().

A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛

D. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 知存在 $M \geq 0$, 使得当 n 充分大时, 有 $|a_n| \leq M$, 故 $a_n^2 b_n^2 \leq M^2 b_n^2$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收

敛, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$, 故当 n 充分大时, $|b_n| < 1$, 所以 $b_n^2 < |b_n|$. 由比较法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛,

选项 C 正确.

取 $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 可排除选项 A.

取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 可排除选项 B 和选项 D.

例 14 设有下列命题:

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$ 收敛;

③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

以上命题中, 正确的是().

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①④

解 ① 错误. 级数加括号后收敛 $\nRightarrow$ 级数去括号后收敛.

② 正确. 改变有限项, 级数的敛散性不变.

③ 正确. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 > 0$ 和极限的保号性, 知当 n 充分大时, $\{u_n\}$ 同号. 当 $u_n > 0$ 时, 根据比值法, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; 当 $u_n < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-u_n)$ 发散.④ 错误. 取 $u_n = \frac{1}{n}, v_n = -\frac{1}{n}$ 知命题 ④ 错误.

综上所述, 选项 B 正确.

第二节 幂级数

内容与方法提要

一、幂级数的概念

1. 幂级数的定义

 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 称为幂级数.对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, 令 $x - x_0 = t$, 则幂级数可化为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的形式.

2. 和函数

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $S_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ 称为前 n 项和函数.若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) (x \in I)$, 则称 $S(x)$ 为和函数, 称区间 I 为收敛域.**说明** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 0$ 处一定收敛.

二、幂级数的收敛半径与收敛域

1. 阿贝尔定理

对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若其在 $x = x_0 \neq 0$ 处收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, 幂级数绝对收敛; 若其在 $x = x_0 \neq 0$ 处发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时, 幂级数发散.**说明** 由阿贝尔定理, 知存在 $R \geq 0$, 当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

2. 收敛半径的计算公式

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$), 则

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ \pm \infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

说明 ① 用比值法证明.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = \rho \cdot |x|.$$

当 $\rho \neq 0$ 时, 若 $|x| < \frac{1}{\rho}$, 则级数收敛; 若 $|x| > \frac{1}{\rho}$, 则级数发散, 所以 $R = \frac{1}{\rho}$.

当 $\rho = 0$ 时, $\rho|x| < 1$ 对任意 x 均成立, 所以 $R = +\infty$.

当 $\rho = +\infty$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 只在 $x = 0$ 处收敛, 所以 $R = 0$.

② 利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 求收敛半径时, 要求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不缺项. 若缺项, 则用推导公式的比值法, 即当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \rho(x) < 1 \text{ 时收敛, 解不等式 } \rho(x) < 1, \text{ 可得收敛区间.}$$

③ 公式的条件是充分非必要条件.

④ 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛, 则 x_0 是收敛区间的端点.

由阿贝尔定理, 知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间内部绝对收敛, 在收敛区间以外发散, 所以当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛时, x_0 只能是收敛区间的端点, 从而收敛半径 $R = |x_0|$.

例如 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x = -2$ 处条件收敛, 求其收敛区间.

解 令 $x+1 = t$, 则当 $x = -2$ 时, $t = -1$, 故 $t = -1$ 是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 收敛区间的端点, 于是当 $t \in (-1, 1)$

时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 收敛. 又由 $-1 < x+1 < 1$, 得 $-2 < x < 0$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 0)$.

三、幂级数的运算

1. 代数运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2 .

(1) 加、减法运算:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n.$$

设 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 的收敛半径为 R , 则

当 $R_1 \neq R_2$ 时, $R = \min\{R_1, R_2\}$;

当 $R_1 = R_2$ 时, $R \geq \min\{R_1, R_2\}$,

且在 $(-R, R)$ 内级数绝对收敛.

说明 ① 当 $R_1 = R_2$ 时, R 不一定取得 $\min\{R_1, R_2\}$.

例如 设 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2^n)x^n, \sum_{n=0}^{\infty} (1-2^n)x^n$, 可求得

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^n}{1+2^{n+1}} = \frac{1}{2}, \quad R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1-2^n}{1-2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2},$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty} [(1+2^n)x^n + (1-2^n)x^n] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径 $R = 1$, 即

$$R > \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

② 利用加、减法运算性质可求幂级数的收敛半径.

例如 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{2^n} \right) x^n$ 的收敛域为_____.

解 对于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} x^n, \frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{(n+1) \ln(n+1)} = 1$.

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散.

当 $x = -1$ 时, 由莱布尼茨定理, 知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ 收敛, 所以其收敛域为 $[-1, 1)$.

对于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x^n, R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2$.

当 $x = 2$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} 1$ 发散.

当 $x = -2$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n$ 发散, 所以其收敛域为 $(-2, 2)$.

综上所述, 原级数的收敛域为 $[-1, 1)$.

(2) 乘法运算:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内绝对收敛, 且 $R = \min\{R_1, R_2\}$.

2. 分析运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 收敛域为 I , 和函数为 $S(x)$, 则

(1) $S(x)$ 在 I 上连续.

(2) 逐项可导:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R),$$

且收敛半径不变, 收敛域不扩大.

(3) 逐项可积:

$$\begin{aligned} \int_0^x S(x) dx &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-R, R), \end{aligned}$$

且收敛半径不变, 收敛域不缩小.

说明 对于逐项求导、逐项积分后所得的幂级数, 其收敛半径不变, 但在端点处的敛散性可能改变, 故收敛域可能改变.

例如, 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, 收敛半径 $R = 1$, 收敛域为 $(-1, 1)$, 但逐项积分, 得

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

积分后的级数在 $x = -1$ 处为交错级数, 且收敛, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛域为 $[-1, 1)$.

四、求幂级数的和函数(重点)

求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$, 其方法是将 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 通过恒等变形(如逐项求导、逐项积分), 转化为已知和函数的幂级数.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n &= \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= e^x, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} &= \cos x, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} &= \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1].\end{aligned}$$

五、将函数 $f(x)$ 展开为幂级数

1. 定 理

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有任意阶导数, 则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

其中 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $R_n(x)$ 为余项, 且展开式是唯一的.

2. 将 $f(x)$ 展开为幂级数的方法

(1) 直接法. 求出 $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \dots$, 则当 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 时, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots.$$

(2) 间接法. 利用如下常用函数的幂级数展开式:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1, \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1].\end{aligned}$$

说明 常用恒等变形、求导、求积分将 $f(x)$ 转化为上述常用函数.

典型例题分析

例 1 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

解 先求收敛半径 R ,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

当 $x = \pm 1$ 时, 级数收敛, 故原级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, 则 $xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 两边同时求导, 得

$$\begin{aligned} [xS(x)]' &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right]' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1, \end{aligned}$$

两边同时求导, 得

$$[xS(x)]'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

积分, 得

$$\int_0^x [xS(x)]'' dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx,$$

即 $[xS(x)]' - 0 = -\ln(1-x)$. 积分, 得

$$\int_0^x [xS(x)]' dx = -\int_0^x \ln(1-x) dx,$$

即

$$xS(x) - 0 = (1-x)\ln(1-x) + x,$$

所以当 $x \neq 0$ 时, 有 $S(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$, 且 $S(x)$ 在 $x = -1$ 处右连续, 在 $x = 1$ 处左连续, 故

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & x \neq 0, x \in [-1, 1), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

例 2 求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数.

解 因为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, 且当 $x = \pm 1$ 时, 级数发散, 所以级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 记 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$\int_0^x S_1(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

即

$$\int_0^x S_1(x) dx = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

两边同时求导, 得

$$S_1(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

所以

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

注 求和函数时也可以采用如下方法:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \\ &= x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

例 3 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

解 因为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, 且当 $x = \pm 1$ 时, 级数显然发散, 所以级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (nx^n)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right)' = \left(x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right)'. \end{aligned}$$

令 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

故

$$S(x) = \left[x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 6.$$

例 4 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

解 先求收敛半径, 由于级数缺项, 令 $x^2 = t$, 则原级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} t^n$.

该级数的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, 即 $|t| = |x^2| < 1$, 故 $x \in (-1, 1)$. 又由于当 $x = \pm 1$ 时, 级数发散, 所以原级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

用恒等变形, 将原级数拆成两个幂级数的和, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2}{2n + 1} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (x^{2n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' \\ &= \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

当 $x \neq 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 又由于

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$

积分, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

当 $x = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = 2$, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

又由于当 $x = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = 3$, 所以

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

例 5 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] x^{2n}$ 的收敛区间及和函数 $S(x)$.

分析 先求收敛半径. 由于级数缺项, 故用比值法.

解 记 $u_n(x) = (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] x^{2n}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |x|^2 < 1$, 得 $|x| < 1$, 所以原级数的收敛区间为 $(-1, 1)$.

原级数可化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)},$$

其中

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

令 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n(2n-1)}$, 则

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$S_1''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

由于 $S_1(0) = 0, S_1'(0) = 0$, 所以

$$S_1'(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x, \quad x \in (-1, 1),$$

$$S_1(x) = \int_0^x \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

故

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x^2}{1+x^2} + 2S_1(x) \\ &= \frac{x^2}{1+x^2} + 2x \arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

例 6 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n! 2^n} x^n$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

解 因为收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty$, 所以收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n! 2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n \\ &\stackrel{\frac{x}{2} = t}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} t^n \\ &= e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^t + t^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= e^t + t^2 e^t + t e^t = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \right), \quad x \in (-\infty, +\infty).
 \end{aligned}$$

例 7 (1) 将 $f(x) = \sin x$ 展开为 x 的幂级数;

(2) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

解 (1) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty).$

(2) 由于级数缺项, 故用比值法求收敛半径.

记 $u_n(x) = (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = 0$, 知收敛半径为 $+\infty$, 故所求级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

令 $S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2(n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, 则

$$\begin{aligned}
 S_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \right]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \right]' \\
 &= \left[x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]' = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x,
 \end{aligned}$$

所以

$$S(x) = \frac{1}{2} S_1(x) = \frac{1}{2} (\sin x + x \cos x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例 8 设级数为 $2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, 求:

(1) 级数的收敛域;

(2) 级数的和函数满足的二阶常系数线性微分方程;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

解 (1) 由于级数缺项, 故用比值法.

令 $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0,$$

所以级数的收敛半径为 $+\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 令 $y(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 2 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$, 则

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,
 \end{aligned}$$

所以有 $y'' - y = -1$.

(3) 特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 特征根为 $r = \pm 1$, 齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, 特解为 $y^* =$

$x^0 \cdot A$, 将其代入方程得 $A = 1$, 所以原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 1.$$

由 $y(0) = 2, y'(0) = 0$, 可得 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. 从而

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

令 $x = 1$, 得

$$\frac{e + e^{-1}}{2} + 1 = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e + e^{-1}}{2} - 1.$$

例 9 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 满足当 $n > 1$ 时, $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$, 且 $a_0 = 4, a_1 = 1$, 求级数的和函数 $S(x)$.

解 令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \quad ①$$

又由于

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}, \quad ②$$

注意到 $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$, 所以式 ① - 式 ②, 得

$$S''(x) - S(x) = 0.$$

解此微分方程, 得其通解为 $S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, 由 $S(0) = a_0 = 4, S'(0) = a_1 = 1$, 得

$$C_1 = \frac{5}{2}, C_2 = \frac{3}{2}, \text{ 故 } S(x) = \frac{5}{2} e^x + \frac{3}{2} e^{-x}.$$

例 10 设 $a_0 = 1, a_1 = 0, (n+1)a_{n+1} = na_n + a_{n-1} (n = 1, 2, \dots), S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 求:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, 并计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径;

(2) $S(x)$ 满足的一阶微分方程, 并求和函数 $S(x)$.

解 (1) 由已知递推关系 $(n+1)a_{n+1} = na_n + a_{n-1}$, 得

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= -\frac{1}{n+1}(a_n - a_{n-1}) \\ &= -\frac{1}{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)(a_{n-1} - a_{n-2}) = \cdots \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(a_1 - a_0) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

故

$$a_{n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!},$$

$$\text{即 } a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = e^{-x}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1}$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{e^{-1}}{e^{-1}} = 1$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 1$.

(2) 由 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 有 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, 则

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n,$$

将 $na_n = (n+1)a_{n+1} - a_{n-1}$ 代入, 得

$$\begin{aligned} xS'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \\ &= -a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= S'(x) - xS(x), \end{aligned}$$

即 $(1-x)S'(x) = xS(x)$, 变形为 $\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{x}{1-x}$, 积分得

$$\ln |S(x)| = \int \frac{x}{1-x} dx = -x - \ln(1-x) + C,$$

由 $x=0, S(0)=1$ 得 $C=0$, 考虑到 $S(0)=1>0$, 故 $\ln S(x) = -x - \ln(1-x)$, 即

$$S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

例11 将 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 用间接法.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n, \end{aligned}$$

由 $|x| < 1, \left|\frac{x}{2}\right| < 1$ 得收敛区间为 $(-1, 1)$.

例12 将 $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数.

解

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1-x-2x^2) = \ln[(1-2x)(1+x)] \\ &= \ln(1+x) + \ln(1-2x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2x)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[1 + (-2)^{n+1}]}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛区间为 $(-1, 1]$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2x)^{n+1}}{n+1}$ 的收敛区间为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 故收敛区间为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

例13 将 $f(x) = \frac{x-1}{4-x}$ 在 $x_0 = 1$ 处展开成幂级数, 并求 $f^{(n)}(1)$.

解 $f(x) = (x-1) \cdot \frac{1}{4-x}$, 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-x} &= \frac{1}{3-(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)^2}{3^2} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{3^n} + \cdots \right], \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{x-1}{4-x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{3^n}, \quad |x-1| < 3.$$

再由 $f(x)$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的系数 $a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$, 所以

$$f^{(n)}(1) = n! a_n = \frac{n!}{3^n}.$$

例14 设 $f(x)$ 的麦克劳林级数为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$, 且 $g(x) = \frac{xf(x)}{1+x}$, 将 $g(x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 由 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n = \frac{x}{1+x}$, $|x| < 1$, 得

$$g(x) = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{(1+x)^2}.$$

又由于

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n, \quad |x| < 1,$$

两边同时求导, 得

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1},$$

故

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{xf(x)}{1+x} = \frac{x^2}{(1+x)^2} = x^2 f'(x) \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n+1}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

例15 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解 由 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1, 1)$, 故

$$\begin{aligned} \arctan x - \arctan 0 &= \int_0^x (\arctan x)' dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

于是当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x^2}{x} \arctan x = \left(\frac{1}{x} + x \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}. \end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} &= 1 + \frac{-1}{3} x^2 + \cdots, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} &= x^2 + \frac{-1}{3} x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{1-4n^2} x^{2n},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2} [f(1) - 1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

第三节 傅里叶级数(仅数学一要求)

内容与方法提要

一、周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

a_0, a_n, b_n 称为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

二、收敛定理(周期为 2π)

若 $f(x)$ 在一个周期 $[-\pi, \pi]$ 上满足:

- (1) $f(x)$ 连续或只有有限个第一类间断点;
- (2) $f(x)$ 只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点,} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \text{ 为间断点,} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

三、定义在 $[0, \pi]$ (或 $[-\pi, 0]$) 上的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

1. 余弦级数

若对 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 则 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2. 正弦级数

若对 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 则 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

说明 设 $f(x)$ 定义在 $[0, \pi]$ 上.

$$\textcircled{1} \text{ 奇延拓: } F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ 偶延拓: } F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

四、周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

五、收敛定理 (周期为 $2l$)

若 $f(x)$ 在一个周期 $[-l, l]$ 上满足:

(1) $f(x)$ 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) $f(x)$ 只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点,} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \text{ 为间断点,} \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}, & x = \pm l. \end{cases}$$

六、定义在 $[0, l]$ (或 $[-l, 0]$) 上的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

1. 余弦级数

若对 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 则 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上展开成余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2. 正弦级数

若对 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 则 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上展开成正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

典型例题分析

例 1 将函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上满足收敛定理的条件, 作周期延拓, 使得 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数, 则

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) dx + \int_0^{\pi} x dx \right] = \pi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 为偶函数, 知 $f(x) \sin nx$ 为奇函数, 则

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上连续, 故根据收敛定理, 得

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \cdot \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi).$$

例 2 设 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$), 将 $f(x)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

解 由已知 $2l = 2$, 得 $l = 1$. 又由于 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 可展开成余弦级数.

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^1 (2+x) dx = 5, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 (2+x) \cos n\pi x dx \\ &= \frac{4}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx \\ &= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

又由于 $f(x)$ 是连续函数, 根据收敛定理, 得

$$2 + |x| = \frac{5}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi x, \quad x \in [-1, 1],$$

令 $x = 0$, 得 $2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, 从而

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

又由于

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \end{aligned}$$

移项, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

例 3 将 $f(x) = x + 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 作奇延拓, 再作周期延拓, 则

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots), \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + 1) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(x + 1) \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (\pi + 1)(-1)^n] \quad (n = 1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

故

$$x + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1 - (\pi + 1)(-1)^n] \sin nx \quad (0 < x < \pi).$$

作偶延拓, 再作周期延拓, 则

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \quad (n = 1, 2, \cdots), \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + 1) \, dx = \pi + 2, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + 1) \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(x + 1) \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \quad (n = 1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

故

$$x + 1 = \frac{\pi}{2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

注 此例说明 $f(x)$ 的傅里叶级数不唯一.

例 4 以 2π 为周期的函数 $f(x) = \begin{cases} x + 3, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 - x, & -\pi < x < 0, \end{cases}$ 设 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数, 则 $S(0) = \underline{\hspace{2cm}}, S(\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}, S(-\pi) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 用收敛定理, 即检查 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的连续点还是间断点.

由于 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 所以 $S(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$

由于 $x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的连续点, 所以 $S(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + 3.$

由于 $x = -\pi$ 为端点, 所以 $S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{1+\pi+3+\pi}{2} = 2 + \pi.$

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \quad (-\infty < x < +\infty),$ 其中

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx \quad (n=0,1,2,\cdots), \text{ 则 } S\left(-\frac{5}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}, S\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}, S(99) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 依题设, $l=1, 2l=2$, $f(x)$ 应作偶延拓, 故

$$S\left(-\frac{5}{2}\right) = S\left(-\frac{5}{2} + 2\right) = S\left(-\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$S\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

$$S(99) = S(99 - 2 \times 50) = S(-1) = S(1) = 0.$$

习题演练

一、选择题

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 必发散

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 必发散

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 中至少有一个收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n + v_n|$ 收敛

(3) 下列说法中正确的是().

A. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

B. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛

C. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n \geq \frac{1}{n}$

D. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛

(4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中, 必收敛的是().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n} - u_{2n-1})$

(5) 设 $u_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, v_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$, 则下列四个级数:

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n;$

② $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|;$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n;$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

的收敛关系是().

- A. 若 ① 收敛, 则 ③ 和 ④ 都收敛
B. 若 ② 收敛, 则 ①③④ 都收敛
C. 若 ③ 和 ④ 发散, 则 ① 和 ② 都发散
D. ①②③④ 的收敛性无确定的关系

(6) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]$ ($k > 0$, 且为常数) ().

- A. 绝对收敛
B. 条件收敛
C. 发散
D. 收敛性与 k 的取值有关

(7) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{k}{\sqrt{n}} \right)^2$ ($k \neq 0$, 且为常数) ().

- A. 发散
B. 绝对收敛
C. 条件收敛
D. 收敛性与 k 的取值有关

(8) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0$) 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r$, 则 ().

- A. $r \leq 1$
B. $r \geq 1$
C. $r < 1$
D. $r > 1$

(9) 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ().

- A. 发散
B. 绝对收敛
C. 条件收敛
D. 敛散性不确定

(10) (仅数学一要求) 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数在

$x = \pi$ 处收敛于 ().

- A. π^2
B. $\frac{\pi^2}{2}$
C. $1 + \pi^2$
D. $\frac{1}{2}(1 + \pi^2)$

二、填空题

(1) 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ 收敛, 则 $k =$ _____.

(2) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 _____.

三、解答题

(1) 判断下列级数的敛散性:

$$(I) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n};$$

$$(II) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} (a > 0);$$

$$(III) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n};$$

$$(IV) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x} dx.$$

(2) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right)$ 的敛散性.

(3) 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛还是绝对收敛.

(4) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ 是条件收敛还是绝对收敛.

(5) 设 $u_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = l$, 证明:

(I) 当 $l > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(II) 当 $l < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(6) 设 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 发散, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

(7) 设 $u_n > 0, v_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 且 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, 证明:

(I) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(II) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(8) 求下列幂级数的收敛域:

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^n$;

(II) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-2)^n$;

(III) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^n x^n$;

(IV) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(9) 求下列级数的收敛域:

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n \cdot 4^n}$;

(II) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{4^n}$.

(10) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ 的收敛域及和函数.

(11) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{[4(n-1)]!}$ 的收敛域及和函数.

(12) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

(13) 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的值.

(14) 将 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开为 x 的幂级数.

(15) 将 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(16) (仅数学一要求) 设 $f(x)$ 以 4 为周期, $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 2, \end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数.

(17) (仅数学一要求) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, $f(x) = x^2, x \in (0, 2\pi]$.

(I) 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数;

(II) 证明: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

(18) 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, 证明: $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(19) 设 $a_0 = 3, a_1 = 5$, 且 $na_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - (n-1)a_{n-1} (n > 1)$, 证明: 当 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛,

并求其和函数.

习题演练解答

一、选择题

(1) C.

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 都发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 必发散. 选项 C 正确.

(2) B.

解 根据级数的运算性质: 收敛 + 收敛 $\Rightarrow$ 收敛, 收敛 + 发散 $\Rightarrow$ 发散, 发散 + 发散 $\Rightarrow$ 可能收敛, 也可能发散. 选项 B 正确.

(3) D.

解 对于选项 D, 由于 $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛, 故根据比较审敛法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n),$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛. 选项 D 正确.

对于选项 A, 缺少正项级数条件, 故结论不一定成立.

对于选项 B, 显然结论不一定成立.

对于选项 C, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 但 $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$.

(4) C.

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛. 选项 C 正确.

(5) B.

解 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且

$$0 \leq u_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \leq |a_n|,$$

$$0 \leq v_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \leq |a_n|.$$

由比较审敛法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛. 选项 B 正确.

(6) C.

解 显然, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛. 又由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{k}{n} = k,$$

根据正项级数的比较审敛法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ 发散, 所以原级数发散. 选项 C 正确.

(7) B.

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left| (-1)^n \left(1 - \cos \frac{k}{\sqrt{n}}\right)^2 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(2 \sin^2 \frac{k}{2\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{k^4}{4}$$

及比较审敛法,知原级数绝对收敛. 选项 B 正确.

(8) A.

解 正项级数的比值法,其条件是充分非必要的,即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不一定存在,若存在,也未必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. 选项 A 正确.

(9) B.

解 令 $x-1=t$, 当 $x=-1$ 时, $t=-2$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t=-2$ 处条件收敛, 所以 $t=-2$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 收敛区间的端点, 即 $t \in (-2, 2)$, 故 $-2 < x-1 < 2$, 得 $-1 < x < 3$.

当 $x=2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 选项 B 正确.

(10) B.

解 根据收敛定理, 有 $S(\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi-0) + f(\pi+0)] = \frac{\pi^2}{2}$. 选项 B 正确.

二、填空题

(1) -1.

解 利用泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{k}{n} + \frac{k}{2n^2} + \frac{k}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1+k}{n} + \frac{k}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{k}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

由已知级数收敛, 知 $1+k=0$, 故 $k=-1$.

(2) $\frac{1}{e}$.

解 用公式. 设 $a_n = \frac{e^n - (-1)^n}{n^2}$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{e^n - (-1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{e^{n+1} \left[1 - \left(\frac{-1}{e}\right)^{n+1}\right]}{e^n \left[1 - \left(\frac{-1}{e}\right)^n\right]} = e, \end{aligned}$$

故收敛半径为 $\frac{1}{e}$.

三、解答题

(1) **解** (I) 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot \sqrt[n]{n}}{n^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} = 1,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. 由级数收敛的必要条件, 知原级数发散.

(II) 用比值法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}.$$

当 $a < e$ 时, 原级数收敛; 当 $a > e$ 时, 原级数发散; 当 $a = e$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, 比值法失效.

由 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$, 知 $u_{n+1} > u_n$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 所以级数发散.

注 数列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 单调增加且趋于 e .

(Ⅲ) 用根值法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\ln n}{n} \cdot \ln n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n},$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = 0$, 故原级数收敛.

$$(Ⅳ) \quad 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} x dx = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

根据比较审敛法, 原级数收敛.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 解} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{16}\right) \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}\right)^2, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 由比较审敛法, 知原级数收敛.

(3) **解** 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty,$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 又由比较审敛法, 知级数不绝对收敛.

由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

令 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 则

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0 \quad (x > e^2),$$

即 $\left\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}$, 当 $n \geq 9$ 时单调减少, 由莱布尼茨定理, 知级数条件收敛.

(4) 解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln n}{\frac{1}{n}} = +\infty,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 又由比较审敛法, 知原级数不绝对收敛.

由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n = 0,$$

令 $f(x) = x^{\frac{1}{x}} - 1$, 则

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x} \ln x} - 1\right)' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 单调减少, 从而 $\left\{n^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$, 当 $n \geq 3$ 时单调减少. 由莱布尼茨定理, 知级数条件收敛.

(5) 证 (I) 当 $l > 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = l$ 及极限的定义, 取 $\epsilon = \frac{l-1}{2}$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} - l \right| < \frac{l-1}{2},$$

即根据换底公式, 有 $\log_n \frac{1}{u_n} > \frac{l+1}{2}$, 故 $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{\frac{l+1}{2}}}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{l+1}{2}}}$ 收敛 (因为 $\frac{l+1}{2} > 1$), 由比较审敛

法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(II) 当 $l < 1$ 时, 同理, 取 $\epsilon = \frac{1-l}{2}$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} - l \right| < \frac{1-l}{2},$$

故 $\log_n \frac{1}{u_n} < \frac{l+1}{2}$, 即 $u_n > \frac{1}{n^{\frac{l+1}{2}}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{l+1}{2}}}$ 发散 (因为 $\frac{l+1}{2} < 1$), 由比较审敛法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(6) 证 由 $\{a_n\}$ 单调减少, $a_n > 0$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a \geq 0$, 又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 所以 $a > 0$, 且 $a_n \geq a > 0$, 故

$$\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{1+a}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛 (等比级数), 由比较审敛法, 知原级数收敛.

(7) 证 (I) 由 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, 知 $0 \leq \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$, 所以 $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ 单调减少且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ 存在. 记

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = a$, 则 $a \geq 0$.

当 $a > 0$ 时, 由比较审敛法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

当 $a = 0$ 时, 由比较审敛法, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(II) 当 $a > 0$ 时, 由比较审敛法, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

当 $a = 0$ 时, 同理, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(8) 解 (I) 令 $a_n = (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n}}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{3^n} = 3,$$

所以收敛半径 $R = \frac{1}{3}$.

当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛; 当 $x = -\frac{1}{3}$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

发散. 故收敛域为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

(II) 令 $a_n = \frac{1}{n^2}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

所以收敛半径 $R = 1$.

当 $|x-2| < 1$ 时, 得 $x \in (1, 3)$.

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛; 当 $x = 3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 故收敛域为 $[1, 3]$.

(III) 令 $a_n = (-1)^n n^n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty,$$

故收敛半径 $R = 0$, 所以幂级数仅在 $x = 0$ 处收敛.

(IV) 令 $a_n = \frac{1}{n!}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(9) 解 (I) 由于级数缺项, 故用比值法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)-1}}{(n+1)4^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 4^n}{x^{2n-1}} \right| = \frac{x^2}{4},$$

当 $\left| \frac{x^2}{4} \right| < 1$ 时, 得 $|x| < 2$.

当 $x = 2$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n \cdot 4^n}$. 用比较法,由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 4^n}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n \cdot 4^n}$ 发散.

当 $x = -2$ 时,同理,可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n-1}}{n \cdot 4^n}$ 发散. 所以收敛域为 $(-2, 2)$.

(II) 由于级数缺项,故用比值法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)^2}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{x^{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{4}.$$

当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{4} = 0 < 1$, 故级数收敛.

当 $|x| = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{4} = \frac{1}{4} < 1$, 故级数收敛. 收敛域为 $[-1, 1]$.

(10) 解 由于级数不缺项,故用公式.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = 1,$$

故 $R = 1$.

当 $x = \pm 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 \cdot (\pm 1)^n$ 发散(一般项不趋于 0), 所以收敛域为 $(-1, 1)$.

令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^x S(x) dx &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

两边同时求导,得

$$S(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad -1 < x < 1.$$

(11) 解 由于级数缺项,故用比值法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{4(n+1)-4}}{[4(n+1-1)]!} \cdot \frac{[4(n-1)]!}{x^{4n-4}} \right| = 0,$$

故收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{[4(n-1)]!}$, 则 $S^{(4)}(x) = S(x)$, 且

$$S(0) = 1, \quad S'(0) = S''(0) = S'''(0) = 0.$$

解四阶常系数齐次线性微分方程,得

$$S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

由初始条件,得

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{4}, \quad C_3 = \frac{1}{2}, \quad C_4 = 0,$$

故

$$S(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2} \cos x.$$

(12) 解 由于级数缺项, 故用比值法.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)+2}}{(n+1+1)[2(n+1)+1]} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{x^{2n+2}} \right|$$

$$= |x|^2.$$

当 $|x|^2 < 1$ 时, 即 $|x| < 1$.

当 $x = \pm 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ 收敛. 故收敛域为 $[-1, 1]$.

令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$, 则

$$S'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad S''(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{2}{1-x^2},$$

故

$$S'(x) = S'(0) + \int_0^x S''(x) dx = \int_0^x \frac{2}{1-x^2} dx = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$\begin{aligned} S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \ln \frac{1+x}{1-x} dx \\ &= x \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_0^x - \int_0^x x d\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= x \ln \frac{1+x}{1-x} - \int_0^x \frac{2x}{1-x^2} dx \\ &= x \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2). \end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = 2 \ln 2, \end{aligned}$$

故和函数

$$S(x) = \begin{cases} x \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2), & -1 < x < 1, \\ 2 \ln 2, & x = \pm 1. \end{cases}$$

(13) 解 构造幂级数, 令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$, 则

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n},$$

$$[xS(x)]' = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n^2-1} \right)' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

又由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, 得 $[xS(x)]' = -x \ln(1-x)$, 故

$$\begin{aligned} xS(x) &= 0 \cdot S(0) + \int_0^x [-x \ln(1-x)] dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \ln(1-x) d(x^2) \\ &= -\frac{1}{2} \left[x^2 \ln(1-x) - x - \frac{1}{2} x^2 - \ln(1-x) \right], \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} \\ &= -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

(14) 解 令

$$f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{(2-x)(1+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{1+x},$$

可得 $A = \frac{2}{3}, B = -\frac{1}{3}$, 即有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2-x} - \frac{1}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \right] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n} \right] x^n, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

(15) 解
$$f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

由于 $f(0) = \frac{\pi}{4}$, 故

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n} \right] dt \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

又由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛且 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处连续, 故

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \end{aligned}$$

又由于 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(16) 解

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 0 dx + \int_0^2 1 dx \right) = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

故

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin \frac{n\pi x}{2} = \begin{cases} f(x), & x \in (-2, 0) \cup (0, 2), \\ \frac{1}{2}, & x = -2, 0. \end{cases}$$

(17) (I) 解

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x \cos nx}{n^2} - \frac{2 \sin nx}{n^3} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2 \cos nx}{n} - \frac{2x \sin nx}{n^2} - \frac{2 \cos nx}{n^3} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{4\pi}{n} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

故

$$\frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 2\pi, \\ 2\pi^2, & x = 0, 2\pi. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

(II) 证 在式 ① 中, 令 $x = 0$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \left(2\pi^2 - \frac{4}{3} \pi^2 \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

注 傅里叶系数根据 $f(x)$ 的周期改为 $[0, 2\pi]$ 上的积分.(18) 证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$, 所以 $f(1-x)$ 的定义域为 $[0, 2]$. 令

$$F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x),$$

其定义域为 $(0, 1)$. 由于

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' dx \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\frac{1}{x} \ln(1-x), \end{aligned}$$

$$f'(1-x) = \frac{1}{x-1} \ln x,$$

$$[\ln x \ln(1-x)]' = \frac{1}{x} \ln(1-x) - \frac{1}{1-x} \ln x,$$

所以

$$F'(x) = f'(x) - f'(1-x) + [\ln x \ln(1-x)]' = 0, \quad x \in (0, 1),$$

故 $F(x) \equiv C, x \in (0, 1)$. 又由于

$$C = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = f(1) + f(0) + \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln[1 + (x-1)] \ln(1-x)$$

$$= f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

于是

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad x \in (0, 1).$$

注 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

(19) **证** 由已知, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{3} - n \right) a_n$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{3} - n \right) a_n}{a_n} \right| \cdot |x| = |x| < 1,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛.

令 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ &= 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} a_n - n a_n \right) x^n \\ &= 5 + \frac{2}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= 5 + \frac{2}{3} y(x) - \frac{2}{3} \times 3 - x y'(x) = 3 + \frac{2}{3} y(x) - x y'(x), \end{aligned}$$

故 $(x+1)y'(x) - \frac{2}{3}y(x) = 3$ 为一阶线性方程, 即

$$y' - \frac{2}{3(x+1)}y = \frac{3}{x+1}.$$

该方程的通解为

$$y = C(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{2}.$$

由 $y(0) = a_0 = 3$, 得 $C = \frac{15}{2}$, 故

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{15}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{2}.$$

第十三章 三重积分及第一型曲线、曲面积分

(仅数学一要求)

考试要求

1. 理解三重积分的概念.
2. 会计算三重积分 (直角坐标、柱面坐标、球面坐标).
3. 理解第一型曲线积分、第一型曲面积分的概念.
4. 掌握第一型曲线积分、第一型曲面积分的计算方法.
5. 会用三重积分、第一型曲线积分、第一型曲面积分求体积、弧长、曲面面积、质量、质心、形心、转动惯量、引力、功等.

第一节 三重积分

内容与方法提要

一、三重积分的概念与性质

1. 三重积分的定义

设 $f(x, y, z)$ 是定义在有界闭区域 V 上的有界函数, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

其中 $d = \max\{\Delta V_i \text{ 的直径}\}$.

2. 三重积分的物理含义

设 $\rho(x, y, z)$ 表示几何形体 V 的密度, 则 V 的质量为

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dV.$$

3. 三重积分的性质

(1) $\iiint_V dV = V$ (V 表示积分区域的体积).

(2) $\iiint_V [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] dV = k_1 \iiint_V f(x, y, z) dV + k_2 \iiint_V g(x, y, z) dV.$

(3) 积分中值定理: 设 $f(x, y, z)$ 在区域 V 上连续, 则存在 $(\xi, \eta, \zeta) \in V$, 使得

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot V.$$

4. 奇偶对称性

(1) 设 V 关于 yOz 面对称, V_1 是 V 位于 yOz 面前侧的部分, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \begin{cases} 2 \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV, & f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

(2) 设 V 关于 xOy 面对称, V_1 是 V 位于 xOy 面以上的部分, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \begin{cases} 2 \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

(3) 设 V 关于 xOz 面对称, V_1 是 V 位于 xOz 面右侧的部分, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \begin{cases} 2 \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV, & f(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

(4) 设 V 关于三个坐标面都对称, V_1 是 V 位于第一卦限的部分, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \begin{cases} 8 \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV, & f(x, y, z) \text{ 关于 } x, y, z \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } x, y, z \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

5. 转换对称性

(1) 设 V 关于直线 $x = y = z$ 对称, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(y, z, x) dV = \iiint_V f(z, x, y) dV,$$

故

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \frac{1}{3} \iiint_V [f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)] dV.$$

(2) 设 V 关于平面 $x = y$ 对称, 则 $\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(y, x, z) dV$.

(3) 设 V 关于平面 $x = z$ 对称, 则 $\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(z, y, x) dV$.

(4) 设 V 关于平面 $y = z$ 对称, 则 $\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, z, y) dV$.

二、三重积分在直角坐标系下的计算

1. 投影法(先一后二)

设 V 在 xOy 面上的投影为 D_{xy} , 对 $(x, y) \in D_{xy}$, 有 $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$. 如图 13-1 所示, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

2. 切片法(先二后一)

设 V 在 z 轴上的投影为 $[c, d]$, 对 $\forall z \in [c, d]$, 作水平切片区域 D_z , 如图 13-2 所示, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_c^d \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz.$$

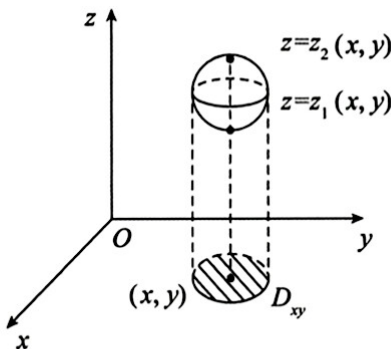


图 13-1

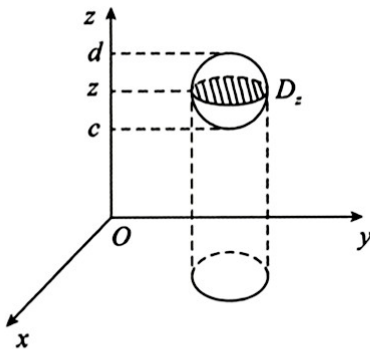


图 13-2

说明 ① 先一后二. 若 $f(x, y, z)$ 表示 V 的密度, 则 $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ 表示 (x, y) 处细棒的质量,

再对这些细棒求二重积分, 则表示 V 的质量, 即

$$m = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

② 先二后一. 若 $f(x, y, z)$ 表示 V 的密度, 则 $\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$ 表示切片 D_z 的质量, 再对这些切片求定积分, 则表示 V 的质量, 即

$$m = \int_c^d \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz.$$

③ 一般 $f(x, y, z)$ 中不含 x, y 时, 采用“先二后一”计算较方便.

④ 采用“先一后二”计算二重积分“ $\iint_{D_{xy}}$ ”时, 根据 D_{xy} 的形状, 选择用直角坐标或极坐标.

例如 计算三重积分 $I = \iiint_V z dV$, 其中 V 是由 $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 围成的空间闭区域.

解法1 先一后二.

如图 13-3 所示, 将 V 投影到 xOy 面上, 记为 D_{xy} , 再将 D_{xy} 投影到 x 轴上得 $[0, 1]$, 故

$$I = \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^{1-x-y} z dz \right) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \frac{1}{24}.$$

解法2 先二后一.

将 V 投影到 z 轴上, 对 $z \in [0, 1]$ 作切片 D_z , 得 D_z 的面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\iint_{D_z} z dx dy \right) dz = \int_0^1 \left(z \iint_{D_z} dx dy \right) dz \\ &= \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2}(1-z)^2 dz = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

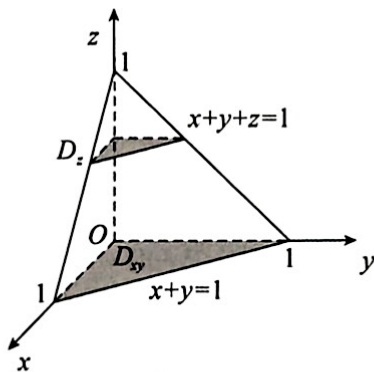


图 13-3

三、三重积分的一般换元法

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \xrightarrow{\substack{x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w)}} \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw,$$

$$\text{其中 } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

说明 对于三重积分的一般换元法, 考研大纲不作要求, 但了解了此内容对解释与理解后面的柱面坐标法、球面坐标法很有帮助.

四、柱面坐标法

柱面坐标是由半平面、水平面、圆柱面三种曲面确定的空间中任一点 (x, y, z) 的坐标. 确定这三种曲面, 需要三个参数 θ, r, z , 且

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

由于参数 θ 与 r 可以在 xOy 面上确定, 故用柱面坐标法计算三重积分时, 先将积分区域 V 投影到 xOy 面上, 再确定 z 的积分限. 一般地, 设

$$V = \{(\theta, r, z) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \varphi_1(r, \theta) \leq z \leq \varphi_2(r, \theta)\},$$

则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr \int_{\varphi_1(r, \theta)}^{\varphi_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz.$$

柱面坐标可以看成三重积分换元法, 其中

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

例如 计算 $I = \iiint_V z dV$, 其中 V 是由 $z = x^2 + y^2, z = 4$ 所围成的闭区域.

解 积分区域 V 如图 13-4 所示.

将 V 投影到 xOy 面上, 得 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4$, 故
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2.$

在 D_{xy} 上任取一点 (x, y) , 从下往上作平行于 z 轴的直线, z 从曲面 $z = x^2 + y^2$ 穿到平面 $z = 4$, 故

$$I = \iiint_V z dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_{r^2}^4 z dz = \frac{64\pi}{3}.$$

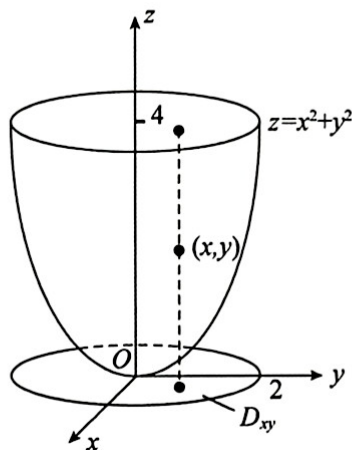


图 13-4

五、球面坐标法

球面坐标可以看成是由球面、锥面、半平面交于一点, 从而确定空间中任一点 (x, y, z) 的坐标, 如图 13-5 所示.

确定这三种曲面, 需要 θ, φ, r 三个参数. θ 表示半平面转过的角度, φ 表示圆锥体的半顶角, r 表示球的半径.

由 θ, φ, r 的含义, 知在球面坐标下计算三重积分时, 确定积分限应为“转” $\rightarrow \theta$, “穿” $\rightarrow r$ (从原点穿出).

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi, \end{cases} \text{ 可以看成三重积分的换元法, 由}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \varphi,$$

得 $|J| = r^2 \sin \varphi$, 故

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

例如 计算 $I = \iiint_V z dV$, 其中 V 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的闭区域.

解 如图 13-6 所示,

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1,$$

故

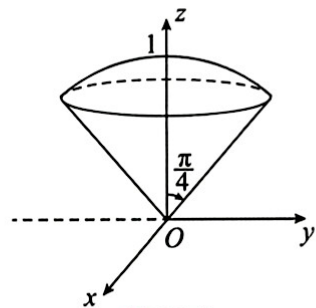


图 13-6

$$I = \iiint_V z dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{8}.$$

六、三重积分的应用

1. 体 积

$$V = \iiint_V dV.$$

2. 质心坐标

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \cdot \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y \cdot \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z \cdot \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV},$$

其中 $\rho(x, y, z)$ 表示 V 的密度.

3. 转动惯量

设几何形体 V 的密度为 $\rho(x, y, z)$, 则转动惯量为

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \\ I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \\ I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV, \\ I_O &= \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

典型例题分析

例 1 设 V 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所围成的空间区域, 求

$$I = \iiint_V (x + 2y + 3z) dV.$$

解 如图 13-7 所示. 由于 V 关于直线 $x = y = z$ 对称, 故由轮换对称性, 得

$$\iiint_V x dV = \iiint_V z dV, \quad \iiint_V 2y dV = \iiint_V 2z dV,$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x + 2y + 3z) dV = 6 \iiint_V z dV \\ &= 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz \\ &= 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy \\ &= \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

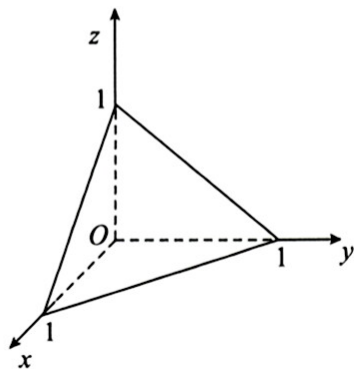


图 13-7

例 2 设 $V_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0; V_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则正确的是().

A. $\iiint_{V_1} x dV = 4 \iiint_{V_2} x dV$

B. $\iiint_{V_1} y dV = 4 \iiint_{V_2} y dV$

C. $\iiint_{V_1} z dV = 4 \iiint_{V_2} z dV$

D. $\iiint_{V_1} xyz dV = 4 \iiint_{V_2} xyz dV$

解 对于选项 A, $\iiint_{V_1} x dV = 0$ (关于 x 是奇函数), $4 \iiint_{V_2} x dV > 0$.

对于选项 B, $\iiint_{V_1} y dV = 0$ (关于 y 是奇函数), $4 \iiint_{V_2} y dV > 0$.

对于选项 C, 因为

$$\iiint_{V_1} z dV = 4 \iiint_{V_2} z dV = 4 \iiint_{V_2} x dV,$$

且 $z = zx^0y^0$ 关于 x, y 是偶函数, 所以 $\iiint_{V_1} z dV = 4 \iiint_{V_2} z dV$.

又由于 V_2 关于 $x = y = z$ 对称, 故由轮换对称性, 得 $4 \iiint_{V_2} z dV = 4 \iiint_{V_2} x dV$, 选项 C 正确.

对于选项 D, $\iiint_{V_1} xyz dV = 0$ (关于 x, y 都是奇函数), $4 \iiint_{V_2} xyz dV > 0$.

例 3 计算 $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dV$, 其中 V 是由 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的曲面与 $z = 2$ 和 $z = 8$ 所围成的空间区域.

解法 1 依题设, 旋转曲面方程为 $x^2 + y^2 = 2z$, 积分区域 V 如图 13-8 所示. 用柱面坐标法, 分 $D = D_1 + D_2$, 其中

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 2, \\ 2 \leq z \leq 8, \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 2 \leq r \leq 4, \\ \frac{r^2}{2} \leq z \leq 8. \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \cdot r dr \int_2^8 dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 r^2 \cdot r dr \cdot \int_{\frac{r^2}{2}}^8 dz \\ &= 48\pi + 288\pi = 336\pi. \end{aligned}$$

解法 2 先二后一.

$$\begin{aligned} I &= \int_2^8 dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^2 \cdot r dr \\ &= \int_2^8 z^2 \cdot 2\pi dz = 336\pi. \end{aligned}$$

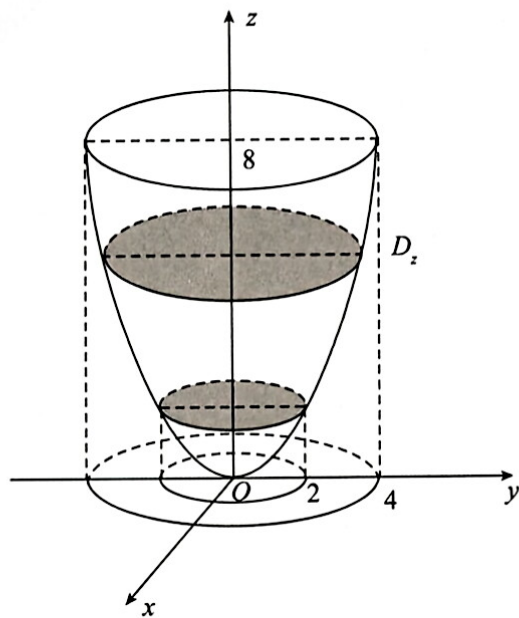


图 13-8

例 4 计算 $I = \iiint_V (x + y + z)^2 dV$, 其中 V 是由 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 与 $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ 所围成的位于锥面上方部分的空间区域.

解 用球面坐标法(见图 13-9).

先将 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 与 $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ 化为球坐标方程, 分别为 $r = 4\cos \varphi$,

$\varphi = \frac{\pi}{3}$, 且

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV + \iiint_V 2(xy + xz + yz) dV.$$

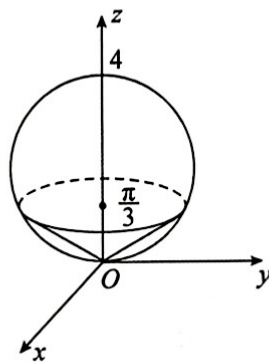


图 13-9

考虑到 V 关于 yOz 面、 xOz 面对称, 且 xy 关于 y 是奇函数, xz 关于 x 是奇函数, yz 关于 y 是奇函数, 故 $\iiint_V 2(xy+xz+yz)dV = 0$, 从而

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV + 0 \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{4^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5\varphi \sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{336\pi}{5}. \end{aligned}$$

例 5 计算 $I = \iiint_V (\sqrt{2}x+z)^2 dV$, 其中 $V: x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0$.

解 积分区域 V 如图 13-10 所示.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (\sqrt{2}x+z)^2 dV \\ &= \iiint_V (2x^2+z^2)dV + 2\sqrt{2} \iiint_V xz dV. \end{aligned}$$

因为 V 关于 yOz 面对称, 且 xz 关于 x 是奇函数, 所以

$$2\sqrt{2} \iiint_V xz dV = 0.$$

又由于 V 关于平面 $x=y$ 对称, 故

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (2x^2+z^2)dV = \iiint_V x^2 dV + \iiint_V x^2 dV + \iiint_V z^2 dV \\ &= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV \quad \left(\iiint_V x^2 dV = \iiint_V y^2 dV \right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{球坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{2\pi}{5}.$$

注 考虑到被积函数 $2x^2+z^2$ 关于 z 是偶函数, 补充下半球面后的区域记为 V_1 , 则 V_1 关于直线 $x=y=z$ 对称, 故

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (2x^2+z^2)dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (x^2+x^2+z^2)dV \\ &= \frac{1}{2} \left(\iiint_{V_1} x^2 dV + \iiint_{V_1} y^2 dV + \iiint_{V_1} z^2 dV \right) \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (x^2+y^2+z^2)dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

例 6 求由曲面 $x^2+y^2=az, z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ ($a>0$) 所围成的立体的体积.

解 先求两个曲面的交线.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2+y^2=az, \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases} \text{ 消去 } z, \text{ 得 } x^2+y^2=a^2.$$

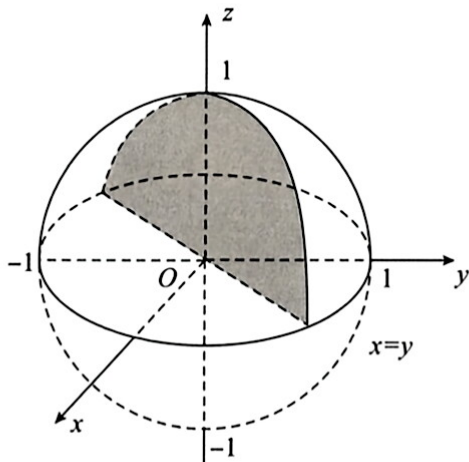


图 13-10

如图 13-11 所示,将 V 分成两部分 V_1, V_2 , 得

$$V = \iiint_V dV = \iiint_{V_1} dV + \iiint_{V_2} dV.$$

采用先二后一, 得

$$V = \int_0^a \pi(\sqrt{az})^2 dz + \int_a^{2a} \pi(2a-z)^2 dz = \frac{5}{6}\pi a^3.$$

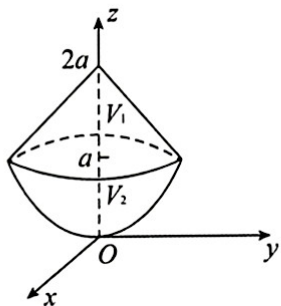


图 13-11

例 7 某均匀物体由上、下两部分组成, 上部分是半径为 a 的半球体, 下部分是底面半径为 a 、高为 3 的直圆锥体, 且半球体的底面圆与圆锥的底面重合, 问当 a 为何值时, 此物体的重心恰好在球心位置?

解 建立如图 13-12 所示的坐标系. 设物体的密度为 ρ , 将球心置于原点, 球面底面放在 xOy 面上, 则球面方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, AB 直线方程: $\frac{y}{a} + \frac{z}{-3} = 1 \Rightarrow z = \frac{3}{a}y - 3 \Rightarrow$ 绕 z 轴旋转得到 $z = \frac{3}{a}\sqrt{x^2 + y^2} - 3$, 即为圆锥面方程.

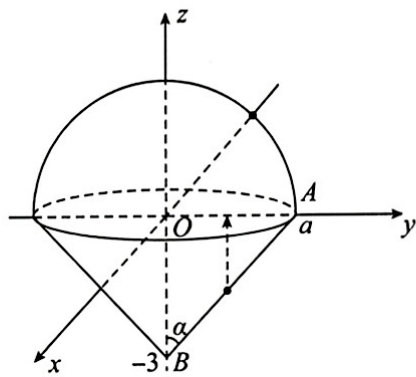


图 13-12

设重心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性, 知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 故要使重心恰好在球心位置, 只需 $\bar{z} = 0$, 即 $\bar{z} = \frac{\iiint_V z \cdot \rho dV}{\iiint_V \rho dV} = 0$, 从而 $\iiint_V z dV = 0$, 于是有

$$\begin{aligned} \iiint_V z dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{\frac{3}{a}r-3}^0 z dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{4} - \pi \left(\frac{9}{4a^2} \cdot a^4 - 6a^2 + \frac{9}{2}a^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{4}a^2(a^2 - 3) = 0, \end{aligned}$$

解得 $a = \sqrt{3}$.

例 8 求均匀球体 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ 绕 z 轴的转动惯量(设密度 $\rho = 1$).

解 采用先二后一, 得

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) dV = \int_0^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z-z^2} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} r^2 \cdot r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 (4z^2 - 4z^3 + z^4) dz = \frac{8\pi}{15}. \end{aligned}$$

第二节 第一型曲线积分

内容与提要

一、第一型曲线积分的概念与性质

1. 定义

设 L 为空间内的光滑曲线, $f(x, y, z)$ 是定义在 L 上的函数,

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

2. 物理含义

若 $\rho(x, y, z)$ 表示 L 的密度, 则 L 的质量为

$$m = \int_L \rho(x, y, z) ds.$$

说明 若 L 为平面曲线, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

3. 性质

(1) $\int_L ds = s$ (s 表示曲线的长度).

(2) $\int_L [k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)] ds = k_1 \int_L f(x, y) ds + k_2 \int_L g(x, y) ds.$

(3) $\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$, 其中 $L = L_1 + L_2$.

4. 对称性

(1) 奇偶性.

① 若曲线 L 关于 y 轴对称, L_1 为 L 位于 y 轴右侧的部分, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{L_1} f(x, y) ds, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

② 若曲线 L 关于 x 轴对称, L_1 为 L 位于 x 轴上侧的部分, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{L_1} f(x, y) ds, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

(2) 转换对称性. 若曲线 L 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds$, 故

$$\int_L f(x, y) ds = \frac{1}{2} \int_L [f(x, y) + f(y, x)] ds.$$

说明 对空间曲线 $\int_L f(x, y, z) ds$ 也有类似的结果.

二、第一型曲线积分的计算

设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^\beta f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

说明 ① 对空间曲线 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 则

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_a^\beta f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

② 由于被积函数 $f(x, y, z)$ 定义在曲线 L 上, 故计算时, 可以代入 L 的方程.

例如 求 $I = \int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 $L: x^2 + y^2 = 1$.

解 $I = \int_L (x^2 + y^2) ds = \int_L ds = 2\pi.$

三、第一型曲线积分的应用

1. 求弧长

$$s = \int_L ds.$$

2. 求曲线 L 的质心坐标

设 L 的密度为 $\rho(x, y, z)$, 则

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\rho(x, y, z)ds}{\int_L \rho(x, y, z)ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_L y\rho(x, y, z)ds}{\int_L \rho(x, y, z)ds}, \quad \bar{z} = \frac{\int_L z\rho(x, y, z)ds}{\int_L \rho(x, y, z)ds}.$$

3. 求转动惯量

设 L 的密度为 $\rho(x, y, z)$, 则

$$\begin{aligned} I_x &= \int_L (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds, \\ I_y &= \int_L (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds, \\ I_z &= \int_L (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)ds. \end{aligned}$$

典型例题分析

例 1 计算 $I = \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 = ax$.

解 曲线 L 可化为 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\theta, \\ y = \frac{a}{2}\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

将 $L: x^2 + y^2 = ax$ 代入被积函数中, 得

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \oint_L \sqrt{ax} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\theta\right)} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2} d\theta - \int_\pi^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta\right) = 2a^2. \end{aligned}$$

例 2 计算 $I = \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$ 与 $x + z = 1$ 的交线.

解 将 $z = 1 - x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$, 得 $\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

令 $x = \frac{1}{2} + \sqrt{2}\cos\theta, y = 2\sin\theta, z = 1 - x = \frac{1}{2} - \sqrt{2}\cos\theta, \theta \in [0, 2\pi]$, 则

$$ds = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 + [z'(\theta)]^2} d\theta = 2d\theta,$$

故

$$I = \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} \frac{9}{2} \cdot 2d\theta = 18\pi.$$

例 3 计算 $I = \oint_L (z + y^2) ds$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

解 由 L 关于直线 $x = y = z$ 对称, 可知

$$\oint_L z ds = \frac{1}{3} \oint_L (x + y + z) ds = \frac{1}{3} \oint_L 0 ds = 0,$$

$$\oint_L y^2 ds = \frac{1}{3} \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} \oint_L R^2 ds = \frac{2\pi R^3}{3},$$

$$\text{故 } I = 0 + \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

例 4 设曲线 L 为椭圆 $x^2 + 4y^2 = 8y$, 且 L 的周长为 a , 求

$$I = \int_L (x \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 4y^2 - 7y) ds.$$

解 将曲线 L 化为 $\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$, 由于其关于 y 轴对称, 且 $x \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ 关于 x 是奇函数, 故

$$\int_L x \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds = 0.$$

将 $L: x^2 + 4y^2 = 8y$ 代入, 得

$$I = \int_L (8y - 7y) ds = \int_L y ds = \bar{y} \cdot \int_L ds = 1 \cdot a = a.$$

注 由质心坐标 $\bar{y} = \frac{\int_L y \rho ds}{\int_L \rho ds} = \frac{\int_L y ds}{\int_L ds}$, 知 $\int_L y ds = \bar{y} \cdot \int_L ds$.

例 5 求 $\frac{1}{8}$ 的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界曲线的质心, 设曲线的密度 $\rho = 1$.

解 设曲线在三个坐标面内的弧段分别为 l_1, l_2 和 l_3 (见图 13-13), 依题设, 质心坐标 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, 且

$$\bar{x} = \frac{\int_L x \cdot \rho ds}{\int_L \rho ds} = \frac{\int_L x ds}{\int_L ds}.$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_L ds &= 3 \cdot \frac{2\pi R}{4} = \frac{3}{2} \pi R, \\ \int_L x ds &= \int_{l_1} x ds + \int_{l_2} x ds + \int_{l_3} x ds, \end{aligned}$$

且在 l_2 上, 由 $x = 0$, 可知 $\int_{l_2} x ds = 0$, 又由于 $\int_{l_1} x ds = \int_{l_3} x ds$, 所以

$$\bar{x} = \frac{2 \int_{l_1} x ds}{\frac{3}{2} \pi R} = \frac{2 \int_0^R \frac{Rx}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx}{\frac{3\pi R}{2}} = \frac{4R}{3\pi},$$

从而质心坐标为 $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$.

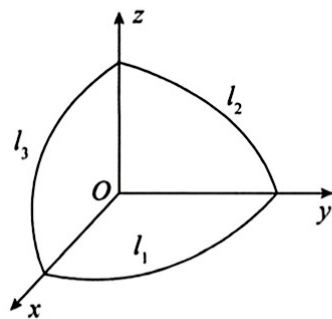


图 13-13

第三节 第一型曲面积分

内容与方法提要

一、第一型曲面积分的概念与性质

1. 定义

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i, \text{ 其中 } d = \max\{\Delta S_i \text{ 的直径}\}.$$

2. 物理含义

若 $\rho(x, y, z)$ 表示曲面 S 的密度, 则曲面 S 的质量为

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS.$$

3. 几何含义

若 $f(x, y, z) = 1$, 则曲面 $z = z(x, y)$ 的面积为

$$A = \iint_S dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

其中 D_{xy} 为曲面 $z = z(x, y)$ 在 xOy 面上的投影.

4. 基本性质

$$(1) \iint_S [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] dS = k_1 \iint_S f(x, y, z) dS + k_2 \iint_S g(x, y, z) dS.$$

$$(2) \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS, \text{ 其中 } S = S_1 + S_2.$$

5. 奇偶对称性

(1) 设 S 关于 xOy 面对称, S_1 为 S 位于 xOy 面上侧的部分, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dS, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

(2) 设 S 关于 xOz 面对称, S_1 为 S 位于 xOz 面右侧的部分, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dS, & f(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

(3) 设 S 关于 yOz 面对称, S_1 为 S 位于 yOz 面前侧的部分, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dS, & f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数,} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

6. 轮换对称性

设曲面 S 关于直线 $x = y = z$ 对称, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S f(z, x, y) dS = \iint_S f(y, z, x) dS,$$

故

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \frac{1}{3} \iint_S [f(x, y, z) + f(z, x, y) + f(y, z, x)] dS.$$

二、第一型曲面积分的计算

(1) 设曲面 $S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

(2) 设曲面 $S: y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f[x, y(x, z), z] \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz.$$

(3) 设曲面 $S: x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z] \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz.$$

说明 简单地说,“投影算二重积分”.

三、第一型曲面积分的应用

1. 求曲面的面积

若曲面 S 的方程为 $z = z(x, y)$, 则曲面的面积为

$$A = \iint_S 1 dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

其中 D_{xy} 为 S 在 xOy 面上的投影区域.

2. 求曲面的质心坐标

设曲面 S 的密度为 $\rho(x, y, z)$, 则

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x \rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y \rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_S z \rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}.$$

3. 求转动惯量

设曲面 S 的密度为 $\rho(x, y, z)$, 则

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS, \\ I_y &= \iint_S (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS, \\ I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS. \end{aligned}$$

典型例题分析

例 1 计算 $I = \oiint_S (x^2 + y^2) dS$, 其中 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面

$z = 1$ 所围区域的整个边界曲面(见图 13-14).

解 S 由锥面 S_1 和平面 S_2 两部分组成, 它们在 xOy 面上的投影都是 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$. 对于 S_1 , 有

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy;$$

对于 S_2 , 有 $dS = dx dy$, 故

$$\begin{aligned} I &= \oiint_S (x^2 + y^2) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{2} dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= (\sqrt{2} + 1) \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= (\sqrt{2} + 1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \pi. \end{aligned}$$

例 2 计算 $I = \iint_S (xy + yz + xz) dS$, 其中 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱

面 $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$ 所截下的有限部分.

解 积分曲面 S 如图 13-15 所示. 因为 S 关于 xOz 面对称, 且函数 xy 和 yz 关于 y 都是奇函数, 所以

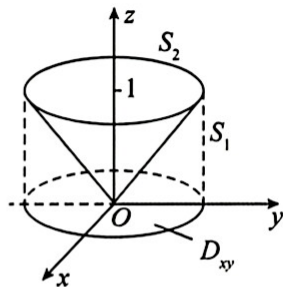


图 13-14

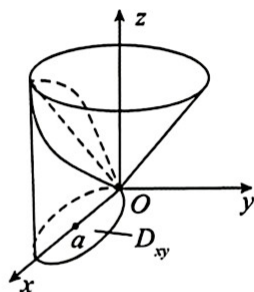


图 13-15

$$\iint_S xy dS = \iint_S yz dS = 0.$$

由于 S 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2ax$, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_S xz dS = \iint_{D_{xy}} x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^3 \cos \theta dr \\ &= 4\sqrt{2} a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = 8\sqrt{2} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta \\ &= 8\sqrt{2} a^4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4. \end{aligned}$$

例 3 求 $I = \oiint_S z dS$, 其中 S 是由圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$, 平面 $z = 0$ 和 $z - x = R$ 所围立体的表面(见图 13-16).

解 不妨记 $S_1: z - x = R$, $S_2: z = 0$, $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $I = \iint_S z dS = \iint_{S_1} z dS + \iint_{S_2} z dS + \iint_{S_3} z dS$, 故

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z dS &= \iint_{D_{xy}} (R + x) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} (R + x) dx dy \xrightarrow[\text{变换}]{\text{极坐标}} \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R + r \cos \theta) r dr \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} R^3 + \frac{1}{3} R^3 \cos \theta \right) d\theta = \sqrt{2} \pi R^3. \end{aligned}$$

S_3 分为两块, 其方程分别为 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. 将其投影到 xOz 面上, 此时

$$\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

由对称性, 知

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} z dS &= 2 \iint_{D_{xz}} z \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dz = 2 \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \int_0^{R+x} z dz \\ &= \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} (R + x)^2 dx \xrightarrow{x = R \sin t} R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t)^2 dt = \frac{3\pi R^3}{2}. \end{aligned}$$

显然 $\iint_{S_2} z dz = 0$, 故 $I = \sqrt{2} \pi R^3 + 0 + \frac{3\pi R^3}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 3}{2} \pi R^3$.

例 4 设曲面 $S: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $I = \oiint_S (x + |y|) dS =$ _____.

解 曲面 S 在第一卦限的部分如图 13-17 所示, S 关于 yOz 面对称, 且函数 $f(x) = x$ 关于 x 是奇函数, 故 $\oiint_S x dS = 0$. 又由于 S 关于直线 $x = y = z$ 对称, 故由轮换对称性, 得

$$I = \oiint_S |y| dS = \frac{1}{3} \oiint_S (|x| + |y| + |z|) dS$$

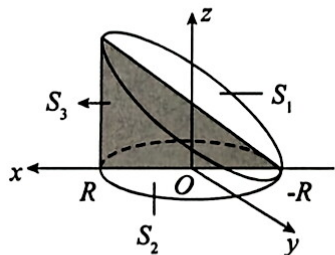


图 13-16

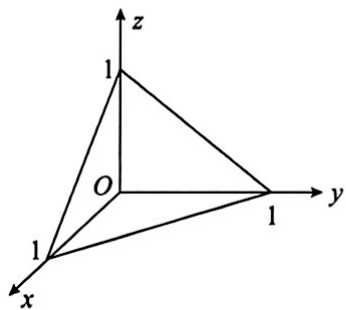


图 13-17

$$= \frac{1}{3} \oint_S dS = \frac{1}{3} \times 8 \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3} \sqrt{3}.$$

例 5 设曲面 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 截下的部分(见图 13-18).

(1) 求曲面 S 的面积 A ;

(2) 若曲面 S 的密度 $\rho = 1$, 求 S 关于 z 轴的转动惯量.

解 (1) $A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$

$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} dx dy$$

$$= \sqrt{2} \times \pi \times 1^2 = \sqrt{2} \pi.$$

(2) $I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \cdot 1 dS$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

$$= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \cdot r dr = \frac{3}{2} \sqrt{2} \pi.$$

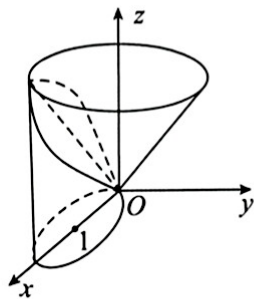


图 13-18

习题演练

解答题

(1) 设 V 是 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 2$ 所围的立体, 求 $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dV$.

(2) 设 V 是 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围的立体, 求 $I = \iiint_V (x + z) dV$.

(3) 设 V 是由曲线 $\begin{cases} x = 0, \\ y^2 = 2z \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 围成的空间区域, 求

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z) dV.$$

(4) 设 $f(u)$ 是连续函数, $F(t) = \iiint_V [f(x^2 + y^2) + z^2] dV$, $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq h\}$,

求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$.

(5) 求 $I = \iiint_V (ax + by + cz)^2 dV$, 其中 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

(6) 求 $I = \iiint_V |z - x^2 - y^2| dV$, 其中 V 由 $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1$ 所围成.

(7) 求 $I = \oint_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, 其中 L 为 $x = \sqrt{1 - y^2}, y = x$ 与 x 轴所围图形的边界.

(8) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 且其周长为 a , 求 $I = \oint_L (3x^2 + 4y^2 + xy) ds$.

(9) 设 $L: x^2 + y^2 = 1, x \geq 0$, 求 $I = \int_L |y| ds$.

(10) 设 L 是点 $(1, -1, 2)$ 到点 $(2, 1, 3)$ 的直线段, 求 $I = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$.

(11) 在半径为 a 的球表面上取一点, 以该点为球心作半径为 R 的球, 问 R 为何值时, 该球位于定球内的表面积最大?

(12) 设薄型物体 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $\mu(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 记圆锥面与柱面的交线为 C .

(I) 求 C 在 xOy 面上的投影曲线方程;

(II) 求 S 的质量.

习题演练解答

解答题

(1) 解 如图 13-19 所示, 用先二后一.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x^2 + y^2) dV = \int_0^2 dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} r^2 \cdot r dr = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

(2) 解 如图 13-20 所示,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V x dV + \iiint_V z dV = 0 + \iiint_V z dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

(3) 解 如图 13-21 所示, 利用柱面坐标法计算.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x^2 + y^2 + z) dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^4 (r^2 + z) dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} \left(r^3 z + \frac{1}{2} r z^2 \right) \Big|_{\frac{r^2}{2}}^4 dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} \left(4r^3 + 8r - \frac{5}{8} r^5 \right) dr \\ &= \frac{256}{3} \pi. \end{aligned}$$

(4) 解 由于

$$\begin{aligned} F(t) &= \iiint_V [f(x^2 + y^2) + z^2] dV \\ &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t [f(r^2) + z^2] r dr \\ &= \frac{\pi h^3}{3} t^2 + 2\pi h \int_0^t r f(r^2) dr, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi h^3}{3} t^2 + 2\pi h \int_0^t r f(r^2) dr}{t^2} \\ &= \frac{\pi h^3}{3} + 2\pi h \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t r f(r^2) dr}{t^2} \end{aligned}$$

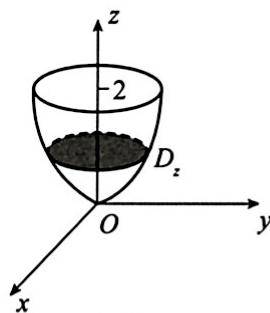


图 13-19

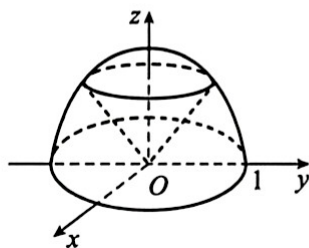


图 13-20

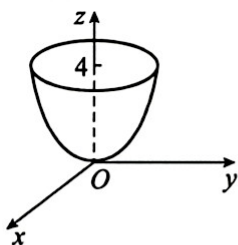


图 13-21

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi h^3}{3} + 2\pi h \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{tf(t^2)}{2t} \\
 &= \frac{\pi h^3}{3} + \pi h f(0).
 \end{aligned}$$

(5) 解

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V (ax + by + cz)^2 dV \\
 &= \iiint_V (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) dV + 2 \iiint_V (abxy + bcyz + acxz) dV \\
 &= \iiint_V (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) dV + 0 \\
 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV \\
 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\
 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \cdot \frac{4}{5} \pi R^5.
 \end{aligned}$$

(6) 解 如图 13-22 所示, $z = x^2 + y^2$ 将 V 分成 V_1, V_2 .

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{V_1} (z - x^2 - y^2) dV + \iiint_{V_2} (x^2 + y^2 - z) dV \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 (z - r^2) dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{r^2} (r^2 - z) dz \\
 &= \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

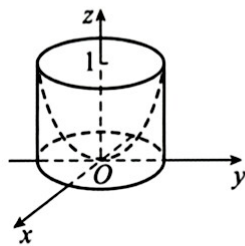


图 13-22

(7) 解 $L = L_1 + L_2 + L_3$, 如图 13-23 所示, 有

$$\begin{aligned}
 L_1: x &= \sqrt{1-y^2}, \quad ds = dt, \\
 L_2: y &= x, \quad ds = \sqrt{2} dx, \\
 L_3: y &= 0, \quad ds = dx,
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e dt + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \cdot \sqrt{2} dx + \int_0^1 e^x dx = \left(\frac{\pi}{4} + 2\right) e - 2.
 \end{aligned}$$

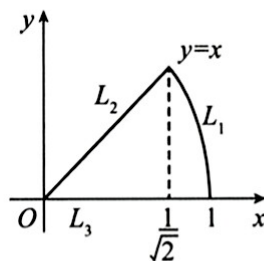


图 13-23

(8) 解 由对称性, 知 $\oint_L xy ds = 0$, 故

$$I = \oint_L (3x^2 + 4y^2) ds + 0 = \oint_L 12 ds = 12a.$$

(9) 解 如图 13-24 所示, 有

$$L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad ds = dt,$$

故

$$I = \int_L |y| ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 2.$$

(10) 解 由于直线的方向向量为 $(1, 2, 1)$, 故直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1},$$

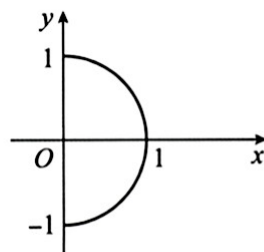


图 13-24

化为参数式方程为 $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = -1+2t, \quad (0 \leq t \leq 1), \text{ 又因为} \\ z = 2+t \end{cases}$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \sqrt{6} dt,$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^1 \sqrt{6} [(1+t)^2 + (-1+2t)^2 + (2+t)^2] dt \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 (6+2t+6t^2) dt = 9\sqrt{6}. \end{aligned}$$

(11) 解 设 $S_0: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. 在 S_0 上, 取点 $P(0, 0, a)$, 则球面方程 S_1 为

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2,$$

如图 13-25 所示.

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2, \end{cases}$ 可得 $z = a - \frac{R^2}{2a}$, 故所求内部曲面在 xOy 面上的投影区域为

$$D: x^2 + y^2 \leq R^2 - \frac{R^4}{4a^2}.$$

内部曲面记为 S , 则 $S: z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 故

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

所求表面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \quad \left(r^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2} \right) \\ &= 2\pi \left(R^2 - \frac{R^3}{2a} \right), \end{aligned}$$

令 $\frac{dA}{dR} = 2\pi \left(2R - \frac{3R^2}{2a} \right) = 0$, 得 $R = \frac{4a}{3}$, 此时表面积最大.

(12) 解 (I) 由已知, C 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x, \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2 + y^2 = 2x$, 故 C 在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 0. \end{cases}$$

(II) S 的质量为

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \mu(x, y, z) dS = \iint_S 9 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS \\ &= \iint_D 9\sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} dx dy \quad (D: x^2 + y^2 \leq 2x) \\ &= 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r dr = 64. \end{aligned}$$

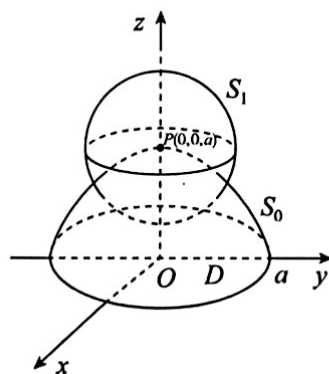


图 13-25

第十四章 第二型曲线、曲面积分 (仅数学一要求)

考试要求

1. 理解第二型曲线与曲面积分的概念.
2. 理解两类曲线积分、两类曲面积分的关系.
3. 掌握第二型曲线与曲面积分的计算方法.
4. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件, 会求二元函数全微分的原函数.
5. 掌握高斯公式、斯托克斯公式.
6. 了解散度与旋度的概念, 并会计算.

第一节 第二型曲线积分

内容与提要

一、第二型曲线积分的概念与性质

1. 变力沿曲线所做的功

求一个质点在平面力场 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 的作用下, 从 A 点沿光滑曲线 L 移到 B 点所做的功.

若 $\mathbf{F}$ 是常向量, 且质点在直线上移动, 如图 14-1 所示, 则 $\mathbf{F}$ 所做的功 $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

若 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 不是常向量, 则利用划分、近似、求和、求极限解决, 如图 14-2 所示.

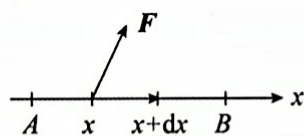


图 14-1

(1) 划分. 将 L 任意划分为 n 段, 其中第 i 段为 $\overline{M_{i-1}M_i}$.

(2) 近似. 用 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 代替 $\overline{M_{i-1}M_i}$, $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\mathbf{i} + (\Delta y_i)\mathbf{j}$, 在 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 用 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) = P(\xi_i, \eta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i)\mathbf{j}$ 代替 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上各点处的变力, 则 $\mathbf{F}(x, y)$ 沿 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 所做的功的近似值为

$$\begin{aligned}\Delta W_i &\approx \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \\ &= P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.\end{aligned}$$

(3) 求和.

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i].$$

(4) 求极限.

$$W = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i],$$

其中 $d = \max \{ \overline{M_{i-1}M_i} \text{ 的弧长} \}$.

2. 第二型曲线积分的定义

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i] \stackrel{\text{记}}{=} \int_L P(x, y)dx + \int_L Q(x, y)dy$$

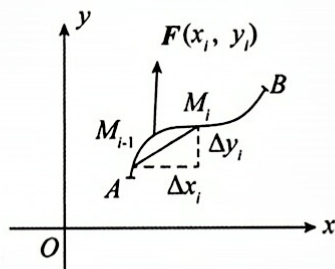


图 14-2

$$= \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

若记 $ds = (dx, dy)$, 则向量形式为

$$W = \int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot ds.$$

若对空间光滑曲线 $L, \mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, 则

$$W = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

3. 第二型曲线积分的性质

(1) 设 L 为平面光滑有向曲线, L^- 与 L 方向相反, 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{L^-} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

说明 关于简单闭曲线 L 正向的规定: 当人沿 L 的正向行走时, L 所围成的区域 D 的内部在人的左侧, 如图 14-3 所示.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_{L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{L_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \end{aligned}$$

其中 $L = L_1 + L_2$.

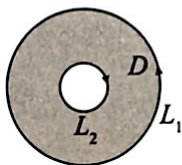


图 14-3

4. 两类曲线积分的关系

设 L 为光滑曲线, 对 L 上任一点 $M(x, y)$, 弧微分 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, 取切线 MT 的方向与曲线 L 的指定方向一致, 如图 14-4 所示, 则

$$dx = ds \cdot \cos \alpha, \quad dy = ds \cdot \cos \beta,$$

故

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds.$$

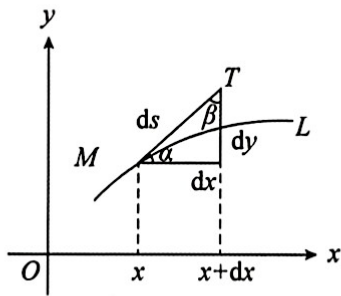


图 14-4

二、第二型曲线积分的计算公式

(1) 设积分曲线 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^\beta \left\{ P[x(t), y(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t)] y'(t) \right\} dt,$$

其中 α 对应曲线 L 的起点, β 对应曲线 L 的终点.

(2) 设 $L: y = y(x), x = x$ (视 x 为参数), 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \left\{ P[x, y(x)] + Q[x, y(x)] y'(x) \right\} dx,$$

其中 a 对应曲线 L 的起点, b 对应曲线 L 的终点.

(3) 设 $L: x = x(y), y = y$ (视 y 为参数), 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\} dy,$$

其中 c 对应曲线 L 的起点, d 对应曲线 L 的终点.

(4) 设空间曲线 $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, 则

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_a^\beta \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\} dt, \end{aligned}$$

其中 α 对应曲线 L 的起点, β 对应曲线 L 的终点.

说明 简单地说, 参数法为“变量参数化, 计算定积分, 下限对起点, 上限对终点”.

例如 ① 设 $\widehat{AB}$ 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 的第一象限的部分, 计算

$$I = \int_{\widehat{AB}} x dy - y dx.$$

解 如图 14-5 所示, $\widehat{AB}: x = a \cos t, y = b \sin t, t$ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{\widehat{AB}} x dy - y dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [a \cos t \cdot (b \sin t)' - b \sin t \cdot (a \cos t)'] dt \\ &= -\frac{\pi}{2} ab. \end{aligned}$$

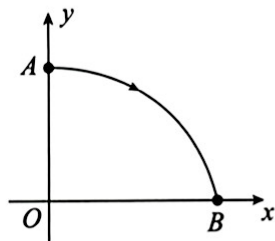


图 14-5

② 如图 14-6 所示, 计算 $I = \int_L 2yx^3 dy + 3x^2 y^2 dx$, 其中起点为 $O(0, 0)$, 终点为 $B(1, 1)$, 其中

- (i) $y = x^2$;
- (ii) $L: y = x$;
- (iii) L : 折线 OAB .

解 (i) $y = x^2, x = x, x$ 从 0 变到 1, 则

$$I = \int_0^1 (4x^6 + 3x^6) dx = 1.$$

(ii) $y = x, x = x, x$ 从 0 变到 1, 则

$$I = \int_0^1 (2x^4 + 3x^4) dx = 1.$$

(iii) $\overline{OA}: x = x, y = 0, x$ 从 0 变到 1; $\overline{AB}: x = 1, y = y, y$ 从 0 变到 1, 于是

$$I = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} = \int_0^1 3x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 2y dy = 1.$$

注 积分 I 沿三条不同路径, 其值均为 1, 此情形称积分与路径无关.

三、格林公式

设平面闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{L^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中 L^+ 是 D 的正向边界曲线.

说明 ① 若 D 内任意一条闭曲线的内部都属于 D , 则称 D 为单连通区域, 否则称为复连通区域. 直观地说, 单连通区域是没有“洞”的区域, 而复连通区域是有“洞”的区域, 如图 14-7 所示.

② 格林公式对于单连通区域和复连通区域均成立.



单连通区域



复连通区域

图 14-7

③ 格林公式提供了一种计算沿有向闭曲线积分的重要方法.

例如 计算 $I = \oint_L y dx + 2x dy$, 其中 L 是 $|x| + |y| = 1$, 取正向(见图 14-8).

解 由于 $P = y, Q = 2x$, 满足格林公式的条件, 所以

$$I = \oint_L y dx + 2x dy = \iint_D (2 - 1) dx dy = 2.$$

④ 格林公式的应用有三种情形:

(i) 若曲线 L 为闭曲线, 则检验格林公式的条件是否成立; 若成立, 则直接用格林公式.

(ii) 若曲线 L 为非闭曲线, 则作辅助曲线, 使其构成闭曲线, 再用格林公式.

(iii) 若闭曲线 L 的内部有奇点, 则作辅助曲线, 挖去奇点, 在复连通区域上用格林公式.

⑤ 利用两类曲线积分的关系, 格林公式也可以写成

$$\oint_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

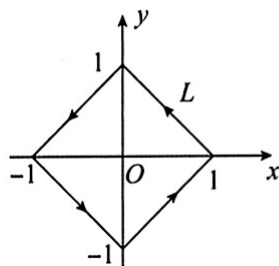


图 14-8

四、平面曲线积分与路径无关的条件

1. 定理

设 D 是平面上的单连通区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则下列四个命题等价:

(1) 对 D 内的任何光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P dx + Q dy = 0$.

(2) $\int_L P dx + Q dy$ 的值在 D 内与路径无关.

(3) 存在 $u(x, y)$, 使得 $du(x, y) = P dx + Q dy$.

(4) 在 D 内, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

说明 四个等价命题都要求 D 是单连通区域, 对复连通区域 D , 由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 不能推出 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关.

例如 $I = \oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, $D: 0 < x^2 + y^2 \leq R^2$, $L: x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$,

取正向(见图 14-9). 在 D 内, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$L: \begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = R \sin \theta, \end{cases} \quad \theta \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

但

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin \theta (-R \sin \theta) + R \cos \theta \cdot R \cos \theta}{R^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0, \end{aligned}$$

说明积分 I 与路径有关.

2. 求 $u(x, y)$ 的方法

(1) 凑微分法.

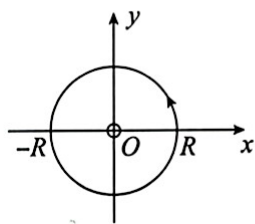


图 14-9

$$(2) \text{ 公式法: } u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

$$(3) \text{ 由 } \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \text{ 积分求出 } u(x, y).$$

五、斯托克斯公式

设 L 为分段光滑的空间有向闭曲线, S 为以 L 为边界的光滑有向曲面, L 的正向与 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 构成右手系 (见图 14-10), $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在包含曲面 S 的空间区域内有一阶连续偏导数, 则

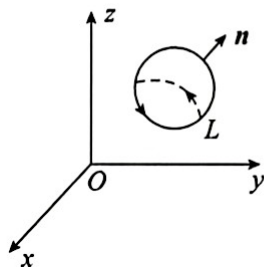


图 14-10

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS, \end{aligned}$$

其中 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为曲面 S 上与其侧方向一致的单位法向量.

例如 计算 $I = \oint_L z dx + x dy + y dz$, 其中 L 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截得的三角形 S 的整个边界, 其正向与这个三角形上侧的法向量构成右手系 (见图 14-11).

解 $P = z, Q = x, R = y$, 由斯托克斯公式, 知

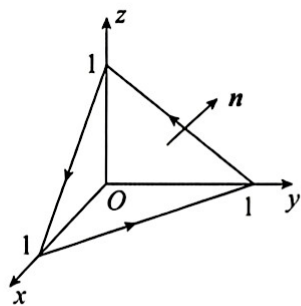


图 14-11

$$\begin{aligned} I &= \oint_L z dx + x dy + y dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} \\ &= \iint_S dy dz + dz dx + dx dy, \end{aligned}$$

其中 S 取上侧. 设 S 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} , 由对称性, 得

$$I = 3 \iint_S dx dy = 3 \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{3}{2}.$$

典型例题分析

题型一 格林公式

例 1 计算

$$I = \int_L (x^2 - 2y) dx + (3x + ye^y) dy,$$

其中 L 是由 $x + y = 1$ 位于第一象限的线段与圆弧 $x^2 + y^2 = 1$ 位于第二象限的部分组成的, 方向如图 14-12 所示.

解 作线段 $\overline{CA}$: $\begin{cases} y = 0, \\ x = x, \end{cases}$ x 从 -1 变到 1 , 则 L 与 $\overline{CA}$ 构成

闭合曲线. 由于

$$P = x^2 - 2y, \quad Q = 3x + ye^y,$$

应用格林公式, 得

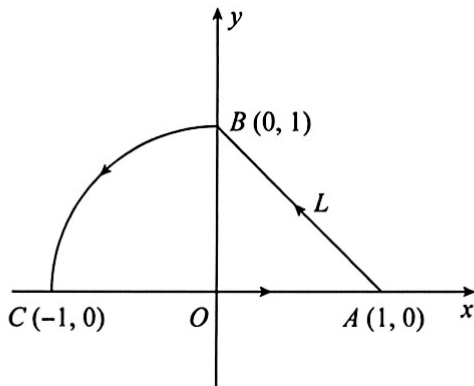


图 14-12

$$\begin{aligned}
 I_1 &\stackrel{\text{记}}{=} \oint_{L+\overline{CA}} (x^2 - 2y) dx + (3x + ye^y) dy \\
 &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (3 + 2) dx dy = 5 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right).
 \end{aligned}$$

又由于

$$I_2 \stackrel{\text{记}}{=} \int_{\overline{CA}} (x^2 - 2y) dx + (3x + ye^y) dy = \int_{-1}^1 (x^2 - 0) dx = \frac{2}{3},$$

于是

$$I = I_1 - I_2 = 5 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{2}{3} = \frac{5\pi}{4} + \frac{11}{6}.$$

例 2 计算 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1, 0)$ 为圆心, $R > 1$ 为半径的圆, 方向取逆时针方向.

解

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{-y}{4x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}, \\
 \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).
 \end{aligned}$$

由于 P, Q 在 $(0, 0)$ 处无定义, 所以不能直接用格林公式, 需挖去 $(0, 0)$

点, 作 $l: \begin{cases} x = \frac{\delta}{2} \cos \theta, \\ y = \delta \sin \theta, \end{cases} \theta \in [0, 2\pi], l$ 取逆时针方向, δ 是充分小的正数 (见

图 14-13), 由格林公式, 得

$$\oint_{L+l^-} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

从而

$$\oint_L = -\oint_{l^-} = \oint_{l^+} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} \delta^2}{\delta^2} d\theta = \pi.$$

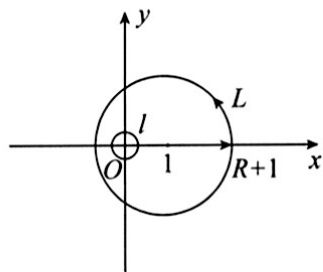


图 14-13

题型二 积分与路径无关

例 3 设 $f(u)$ 有连续导数, 且 $\int_0^4 f(u) du = A \neq 0$, 如图 14-14 所示, L 为上半圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$,

起点为 $(0, 0)$, 终点为 $B(2, 0)$.

(1) 计算 $I = \int_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy)$;

(2) 若将 $f(u)$ 有连续导数的条件改为 $f(u)$ 连续, 问(1)的计算结果是否正确?

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}
 P &= xf(x^2 + y^2), \quad Q = yf(x^2 + y^2), \\
 \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} = 2xyf'(x^2 + y^2),
 \end{aligned}$$

所以积分与路径无关. 取 $\overline{OB}: \begin{cases} y = 0, \\ x = x, \end{cases} x$ 从 0 变到 2, 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) \\
 &= \int_{\overline{OB}} f(x^2 + y^2)(x dx + y dy)
 \end{aligned}$$

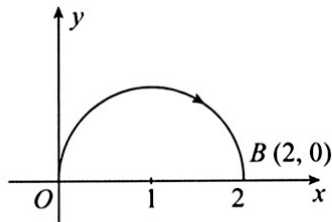


图 14-14

$$= \int_0^2 f(x^2) \cdot x dx \xrightarrow{x^2=u} \int_0^4 \frac{1}{2} f(u) du = \frac{A}{2}.$$

(2) 由于 $f(u)$ 连续, 不能用 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (没有导数条件), 因为

$$f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = \frac{1}{2} f(x^2 + y^2) d(x^2 + y^2) = d\left[\frac{1}{2} F(x^2 + y^2)\right],$$

其中 $F(u) = \int_0^u f(t) dt$, 所以存在 $u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(t) dt$, 使得 $du = P dx + Q dy$, 故积分与路径无关,

因为(1)的计算中利用了积分与路径无关, 所以(1)的计算结果正确.

例 4 求 $I = \int_{AmB} [f(y)e^x - 3y] dx + [f'(y)e^x - 3] dy$, 其中 $f(y)$ 有一

阶连续导数, $\widehat{AmB}$ 为连接 $A(2, 3), B(4, 1)$ 且与线段 $\overline{AB}$ 围成的图形面积为 5 的任一路径 (见图 14-15).

解 直线 AB 的方程为 $x + y = 5$.

$$I = \int_{AmB} [f(y)e^x - 3y] dx + [f'(y)e^x - 3] dy$$

格林
公式

$$= - \iint_D 3 dx dy + \int_{\widehat{AmBA}} f(y)e^x dx + f'(y)e^x dy - 3 \int_{\overline{AB}} y dx + dy$$

$$= -15 + f(y)e^x \Big|_{(2,3)}^{(4,1)} - 3 \int_3^1 (-y + 1) dy$$

$$= -15 + f(1)e^4 - f(3)e^2 - 6$$

$$= -21 + f(1)e^4 - f(3)e^2.$$

例 5 设 $x > 0$ 时, $y = f(x)$ 可微, 且 $f(1) = 2$, 对 $x > 0$ 内的任何光滑闭曲线 C , 都有 $\oint_C 4x^3 y dx + x f(x) dy = 0$, 求:

(1) $f(x)$;

(2) $I = \int_L 4x^3 y dx + x f(x) dy$, 其中 L 是从 $A(1, 0)$ 到 $B(2, 3)$ 的一段弧.

解 (1) 由已知, 积分与路径无关, 所以 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 即 $4x^3 = x f'(x) + f(x)$, 从而 $f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = 4x^2$ 为一阶线性方程, 其通解为

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int 4x^2 \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\ &= x^3 + \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

由 $f(1) = 2$, 得 $C = 1$, 故 $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$.

(2) **解法 1** 由于积分与路径无关, 选择折线 (见图 14-16):

$$\overline{AC}: \begin{cases} x = x, \\ y = 0, \end{cases} x \text{ 从 } 1 \text{ 变到 } 2,$$

$$\overline{CB}: \begin{cases} x = 2, \\ y = y, \end{cases} y \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 3.$$

故

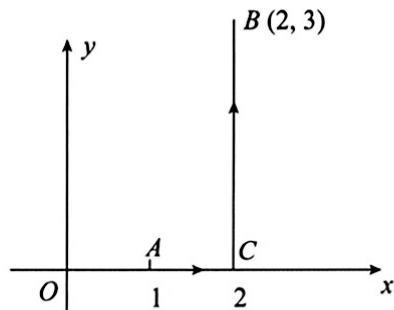


图 14-16

$$I = \int_{AC} + \int_{CB} = \int_1^2 0 dx + \int_0^3 2 \cdot \left(2^3 + \frac{1}{2}\right) dy = 51.$$

解法2

$$\begin{aligned} I &= \int_L 4x^3 y dx + x \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x}\right) dy = \int_L 4x^3 y dx + (x^4 + 1) dy \\ &= \int_L 4x^3 y dx + x^4 dy + dy = \int_L d(x^4 y) + dy \\ &= \int_L d(x^4 y + y) = (x^4 y + y) \Big|_{(1,0)}^{(2,3)} \\ &= 2^4 \times 3 + 3 - 1^4 \times 0 + 0 = 51. \end{aligned}$$

例6 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 积分

$$I = \oint_L \left[\frac{y^2}{x} + x f\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx + \left[y - x f'\left(\frac{y}{x}\right) \right] dy = 0,$$

其中 L 是任一不与 y 轴相交的简单光滑闭曲线, 求 $f(x)$.**解** 由已知得, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 其中

$$P = \frac{y^2}{x} + x f\left(\frac{y}{x}\right), \quad Q = y - x f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

从而

$$- \left[f'\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot f''\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \right] = \frac{2y}{x} + x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x},$$

即

$$\frac{y}{x} f''\left(\frac{y}{x}\right) - 2f'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2y}{x}. \quad (1)$$

令 $\frac{y}{x} = t$, 则 $t f''(t) - 2f'(t) = 2t$, 该方程可降阶(不显含 y). 令 $f'(t) = p$, 则 $f''(t) = p'$, 故方程①变为 $t p' - 2p = 2t$, 即 $p' - \frac{2}{t} p = 2$, 故

$$\begin{aligned} p &= e^{-\int \frac{2}{t} dt} \left(\int 2e^{\int \frac{2}{t} dt} dt + C_1 \right) = e^{2 \ln t} \left(\int 2e^{-2 \ln t} dt + C_1 \right) \\ &= t^2 \left(\int 2t^{-2} dt + C_1 \right) = t^2 \left(2 \cdot \frac{-1}{t} + C_1 \right) = -2t + C_1 t^2, \end{aligned}$$

由 $p(1) = f'(1) = 1$ 知 $C_1 = 3$, 从而 $f'(t) = -2t + 3t^2$, 积分, 得

$$f(t) = -t^2 + t^3 + C_2,$$

由 $f(1) = 1$ 得 $C_2 = 1$, 所以 $f(t) = -t^2 + t^3 + 1$, 即

$$f(x) = -x^2 + x^3 + 1.$$

例7 设 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y+1$, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线, 求 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并求 $I(t)$ 的最小值.**解**

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \\ &= \int_{L_t} df(x, y) = f(x, y) \Big|_{(0,0)}^{(1,t)} \quad (\text{积分与路径无关}), \end{aligned}$$

又 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 积分, 得

$$f(x, y) = \int (2x+1)e^{2x-y} dx + \varphi(y)$$

$$= x e^{2x-y} + \varphi(y).$$

又由于 $f(0, y) = \varphi(y) = y + 1$, 所以 $f(x, y) = x e^{2x-y} + y + 1$, 故

$$I(t) = f(x, y) \Big|_{(0,0)}^{(1,t)} = (x e^{2x-y} + y + 1) \Big|_{(0,0)}^{(1,t)} = t + e^{2-t}.$$

令 $I'(t) = 1 - e^{2-t} = 0$, 得 $t = 2$, 又由于 $I''(t) = e^{2-t}$, $I''(2) = 1 > 0$, 所以 $I(t)$ 的最小值为 $I(2) = 3$.

题型三 格林公式与积分与路径无关的综合题

例 8 计算 $I = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是先从 $A(1, 1)$ 沿直线到 $B(-1, 0)$, 再沿曲线 $y = x^2 - 1$ 到 $C(1, 0)$ 点.

解法 1 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, 所以在不含 $(0, 0)$ 的区域内, 积分与路径无关 (见图 14-17). 取

$$\begin{aligned} \overline{AD}: \begin{cases} y = 1, \\ x = x, \end{cases} \quad \overline{DB}: \begin{cases} x = -1, \\ y = y, \end{cases} \\ \widehat{BEC}: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{-1} \frac{-dx}{1+x^2} + \int_1^0 \frac{-dy}{1+y^2} + \int_\pi^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{1} dt \\ &= -\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(0 - \frac{\pi}{4}\right) + (2\pi - \pi) = \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

解法 2 加辅助线.

$\overline{CA}: \begin{cases} x = 1, \\ y = y, \end{cases} \quad l: \begin{cases} x = \delta \cos t, \\ y = \delta \sin t, \end{cases} \quad \delta \text{ 为充分小的正数, 取顺时针方向, 则}$

$$I = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_{L+\overline{CA}+l} - \oint_{\overline{CA}} - \oint_l.$$

由格林公式, 知

$$\oint_{L+\overline{CA}+l} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

又

$$\begin{aligned} \int_{\overline{CA}} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \\ \oint_l \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \int_{2\pi}^0 \frac{\delta \cos t \cdot \delta \cos t - \delta \sin t \cdot (-\delta \sin t)}{\delta^2} dt \\ &= \int_{2\pi}^0 dt = -2\pi. \end{aligned}$$

$$\text{故 } I = 0 - \frac{\pi}{4} - (-2\pi) = \frac{7\pi}{4}.$$

例 9 求 $I = \int_L [e^x \sin y - b(x+y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy \quad (a > 0, b > 0)$, 其中 L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $(0, 0)$ 的弧.

解法 1 利用积分与路径无关.

记

$$I = \int_L [e^x \sin y dx + e^x \cos y dy] - \int_L [b(x+y) dx + ax dy]$$

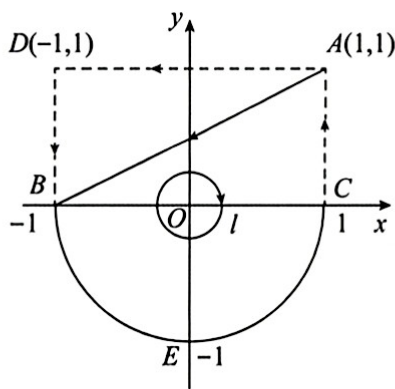


图 14-17

$$= I_1 - I_2.$$

由于 I_1 与路径无关,故

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy \\ &= \int_{\overline{AO}} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = 0 \quad (\overline{AO}: \begin{cases} y=0, \\ x=x \end{cases}). \end{aligned}$$

对于 I_2, L 的参数式方程为

$$x = a + a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

故

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_L b(x+y)dx + ax dy \\ &= \int_0^\pi [b(a+a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)dt + a(a+a\cos t) \cdot a\cos t dt] \\ &= -2a^2b - \frac{1}{2}\pi a^2b + \frac{1}{2}\pi a^3. \end{aligned}$$

$$\text{于是 } I = I_1 - I_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2b - \frac{\pi}{2}a^3.$$

解法2 用格林公式. 添加 $\overline{OA}$: $\begin{cases} y=0, \\ x=x, \end{cases} 0 \leq x \leq 2a$, 由于

$$\begin{aligned} \oint_{L+\overline{OA}} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \iint_D (b-a) dx dy = \frac{\pi}{2}a^2(b-a), \\ \int_{\overline{OA}} &= \int_0^{2a} (-bx) dx = -2a^2b, \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{\pi a^2}{2}(b-a) - (-2a^2b) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2b - \frac{\pi}{2}a^3.$$

例10 设 $P(x, y) = \frac{axy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q(x, y) = \frac{-4yx^b}{(x^2+y^2)^2}$, 求 a, b 的值, 使得积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$ 上与路径无关, 并计算 $I = \int_L Pdx + Qdy$, L 为从点 $A(1, 0)$ 到点 $B(0, 1)$ 的直线段.

解 在 D 上,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-4x^{b-1}y[b(x^2+y^2) - 4x^2]}{(x^2+y^2)^3}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2axy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

依题设, 有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 比较其分子, 得 $b-1=1, 4b=2a$, 解得 $a=4, b=2$, 即有

$$P(x, y) = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

依题意, 积分与路径无关等价于存在函数 $u(x, y)$, 使得

$$\begin{aligned} du(x, y) &= P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}dy = d\left(\frac{-2y^2}{x^2+y^2}\right), \end{aligned}$$

故

$$I = \int_L Pdx + Qdy = \int_L d\left(\frac{-2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2y^2}{x^2+y^2} \Big|_{(1,0)}^{(0,1)} = -2.$$

说明 本题也可通过 $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, 积分求得 $u(x, y)$.

注 平面第二型曲线积分 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 有关问题总结:

① 知识点框架:

$$\int_L Pdx + Qdy \begin{cases} L \text{ 是闭曲线} \begin{cases} \text{用格林公式,} \\ \text{用计算公式(化为定积分),} \end{cases} \\ L \text{ 是非闭曲线} \begin{cases} \text{用计算公式,} \\ \text{构成闭曲线,用格林公式,} \\ \text{积分与路径无关(选择简单路径),} \end{cases} \\ \text{已知积分与路径无关} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \end{cases}$$

② 积分与路径无关的四个等价命题:

设 D 是平面上的单连通区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则下列四个命题等价:

(i) 对 D 内的任何光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

(ii) $\int_L Pdx + Qdy$ 的值在 D 内与路径无关.

(iii) 存在 $u(x, y)$, 使得 $du = Pdx + Qdy$.

(iv) 在 D 内, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

③ 四个等价命题要求 D 是单连通区域, 对复连通区域 D , 由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 不能推出 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关.

例如 设 L 为 $D: 0 < x^2 + y^2 \leq R^2$ 的正向边界, 如图 14-18 所示, 计算积分

$$I = \oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

解 在 D 内, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

L 的参数方程为 $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$. 又由于

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-R\sin t(-R\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t}{R^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0, \end{aligned}$$

这说明由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 不能推出 $I = \oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 0$, 即积分与路径有关, 原因是 D 为复连通区域 (有“洞”的区域).

④ 证明积分与路径无关的步骤:

(i) 考虑用 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$;

(ii) 若不能用 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (如没有 P, Q 偏导数存在的条件), 则考虑由 $du = Pdx + Qdy$, 求 $u(x, y)$.

(iii) 证明 D 内任一光滑闭曲线 L , 都有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

⑤ 求 $u(x, y)$, 使 $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, 有三种方法 (公式、积分、凑微分), 见第九章.

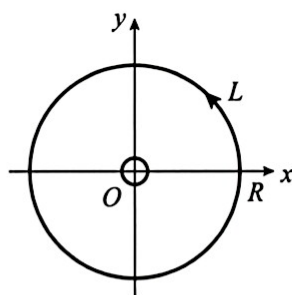


图 14-18

例11 设力场 $F = yzi + zxj + xyk$, 问将质点从原点 O 沿直线移动到曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一卦限部分的哪一点时, F 所做的功最大? 并求此最大功.

解 设 $M(x, y, z)$ 为曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一卦限部分的任意一点, 则 $\overrightarrow{OM}$ 为

$$\begin{cases} X = xt, \\ Y = yt, \\ Z = zt, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

则 F 沿 $\overrightarrow{OM}$ 所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overrightarrow{OM}} YZdX + ZXdY + XYdZ \\ &= \int_0^1 3xyz t^2 dt = xyz. \end{aligned}$$

又因为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

令

$$L = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

由

$$\begin{cases} L'_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L'_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L'_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \\ L'_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}b, \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}c \end{cases}$$

解得

且驻点唯一, 从而 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}b, \frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$ 为所求点, 且 $W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

第二节 第二型曲面积分

内容与方法提要

一、第二型曲面积分的概念与性质

1. 定义

设 S 为有向曲面, $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 定义在曲面 S 上,

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

称为第二型曲面积分.

2. 物理含义——流量

若速度场 $\mathbf{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, 则流量 $\Phi = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ (表示从一侧流向另一侧的流

量), 其中 $d\mathbf{S} = (dydz, dzdx, dx dy)$.

3. 曲面的侧

用曲面 S 的法向量指定曲面的侧 (见图 14-19), 一般分为上侧与下侧、左侧与右侧、前侧与后侧. 对于闭曲面, 分内侧与外侧.

4. 两类曲面积分的关系

设曲面 S 上任一点的单位法向量为

$$\mathbf{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

其中 α, β, γ 分别表示 $\mathbf{n}_0$ 与 x, y, z 轴正向的夹角, 则

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

由此可得

$$dydz = \cos \alpha dS, \quad dzdx = \cos \beta dS, \quad dx dy = \cos \gamma dS,$$

即

$$\frac{dydz}{\cos \alpha} = \frac{dzdx}{\cos \beta} = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = dS. \quad \textcircled{1}$$

式 ① 也称为转换公式.

二、第二型曲面积分的计算公式

1. 投影法

(1) 若 $S: z = z(x, y)$, 在 xOy 面上的投影为 D_{xy} , 则

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy,$$

若 S 的方向为上侧则取“+”, 为下侧则取“-”; 或者若 S 指定侧的法向量与 z 轴夹角的余弦为 $\cos \gamma > 0$ 则取“+”, 为 $\cos \gamma < 0$ 时则取“-”.

(2) 若 $S: y = y(x, z)$, 在 xOz 面上的投影为 D_{xz} , 则

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q[x, y(x, z), z] dz dx,$$

若 S 的方向为右侧则取“+”, 为左侧则取“-”; 或者若 S 指定侧的法向量与 y 轴夹角的余弦为 $\cos \beta > 0$ 则取“+”, 为 $\cos \beta < 0$ 则取“-”.

(3) 若 $S: x = x(y, z)$, 在 yOz 面上的投影为 D_{yz} , 则

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz,$$

若 S 的方向为前侧则取“+”, 为后侧则取“-”; 或者若 S 指定侧的法向量与 x 轴夹角的余弦为 $\cos \alpha > 0$ 则取“+”, 为 $\cos \alpha < 0$ 则取“-”.

说明 简单地讲, 使用投影法时, 应注意以下几点:

① “投影算二重, 注意正负号”.

② 对 $\iint_S R(x, y, z) dx dy$, S 投影到 xOy 面上.

对 $\iint_S P(x, y, z) dy dz$, S 投影到 yOz 面上.

对 $\iint_S Q(x, y, z) dz dx$, S 投影到 xOz 面上.

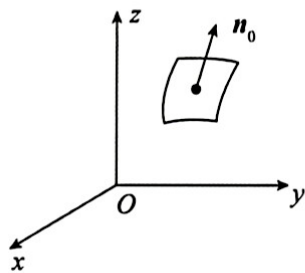


图 14-19

③ 若 S 指定侧的法向量的方向余弦在 S 的不同部分正负号发生改变, 则将 S 分成几部分后再积分.

例如 计算 $I = \iint_S xyz dx dy$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$ 的外侧.

解 如图 14-20 所示, 设 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos \gamma$, 则在 S_1 上, $\cos \gamma < 0$, 在 S_2 上, $\cos \gamma > 0$, 且 $S = S_1 + S_2$, 分两部分积分, 其中

$$S_1: z = -\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad S_2: z = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

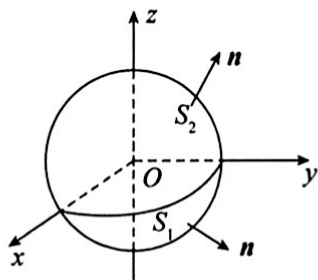


图 14-20

$$\begin{aligned} \iint_S xyz dx dy &= \iint_{S_1} xyz dx dy + \iint_{S_2} xyz dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} xy \cdot (-\sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy + \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} dr = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

2. 转换公式法

若 S 投影到 yOz 面、 xOz 面上计算二重积分较困难, 则可以利用转换公式将其转化到 xOy 面上进行计算, 有

$$\frac{dy dz}{\cos \alpha} = \frac{dz dx}{\cos \beta} = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = dS.$$

例如 计算 $I = \iint_S (z^2 + x) dy dz - z dx dy$, 其中 S 为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z = 0$ 与 $z = 2$ 之间部分的下侧.

解 如图 14-21 所示, 依题设, 需投影到 yOz 面与 xOy 面上计算二重积分, 利用转换公式将 $dy dz$ 化为 $dx dy$.

由 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 令 $F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z$, 法向量

$$\boldsymbol{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (x, y, -1),$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-1)^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-1)^2}},$$

故

$$dy dz = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy = (-x) dx dy,$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_S [(z^2 + x)(-x) - z] dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} \left\{ \left[\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right] (-x) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

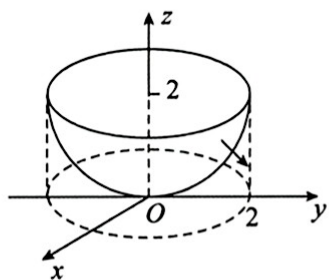


图 14-21

利用奇偶性,知

$$\iint_{D_{xy}} \frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2 \cdot x \, dx \, dy = 0,$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{xy}} \left[x^2 + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right] dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} r^2 \right) r \, dr = 8\pi. \end{aligned}$$

注 此题取上侧时,法向量 $n = (-x, -y, 1)$.

三、高斯公式法

设空间闭区域 V 由分片光滑的封闭曲面 S 所围成, $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 V 上有一阶连续偏导数,则

$$\oiint_{S_{\text{外}}} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

说明 ① 高斯公式对单连通区域和复连通区域均成立.

② 高斯公式的应用有三种情形:

(i) 若 S 为闭曲面,则检验高斯公式成立的条件是否满足.若满足,则直接用高斯公式.

(ii) 若 S 为非闭曲面,则作辅助曲面,构成闭曲面后,再用高斯公式.

(iii) 若 S 内部有奇点,则作辅助曲面,挖去奇点,在复连通区域上用高斯公式.

③ 利用两类曲面积分的关系,高斯公式也可以写成

$$\oiint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是曲面 S 外侧任一点处的外法向量的方向余弦.

典型例题分析

例 1 计算 $I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (xz \, dy \, dz + yz \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy)$, 其中 S 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} (R > 0)$ 的上侧.

解法 1 如图 14-22 所示,利用曲面 S 的方程,代入被积函数并化简,得

$$I = \iint_S \frac{1}{R} (xz \, dy \, dz + yz \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy),$$

记

$$I_1 = \iint_S xz \, dy \, dz, \quad I_2 = \iint_S yz \, dz \, dx, \quad I_3 = \iint_S z^2 \, dx \, dy.$$

对于 I_3 , 曲面 $S: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 取上侧, 则有

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{D_{xy}} (R^2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr = \frac{1}{2} \pi R^4. \end{aligned}$$

对于 I_1, S 可分成前、后两部分, $S_1: x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, S_2: x = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, 所以

$$I_1 = \iint_{S_1} xz \, dy \, dz + \iint_{S_2} xz \, dy \, dz$$

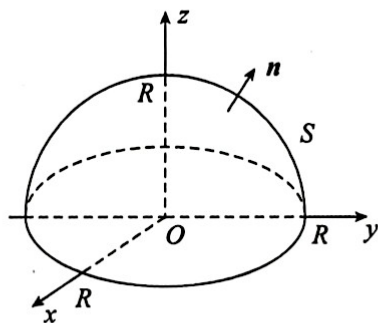


图 14-22

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{D_{yz}} z \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dy dz - \iint_{D_{yz}} (-z \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}) dy dz \\
 &= 2 \iint_{D_{yz}} z \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dy dz = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^R r \sin \theta \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r dr \\
 &= 4 \int_0^R r^2 \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{1}{4} \pi R^4.
 \end{aligned}$$

同理,可求得 $I_2 = \frac{1}{4} \pi R^4$.

综上所述, $I = \frac{1}{R} (I_1 + I_2 + I_3) = \pi R^3$.

解法2 利用高斯公式.

作辅助曲面 $S_1: z = 0 (x^2 + y^2 \leq R^2)$, 取下侧(见图 14-23). 由于

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S \frac{1}{R} (xz dy dz + yz dz dx + z^2 dx dy), \\
 \oiint_{S+S_1} \frac{1}{R} (xz dy dz + yz dz dx + z^2 dx dy) &= \frac{1}{R} \iiint_V (z + z + 2z) dV = \frac{4}{R} \iiint_V z dV \\
 &\stackrel{\text{球坐标}}{=} \frac{4}{R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \pi R^3, \\
 \iint_{S_1} \frac{1}{R} (xz dy dz + yz dz dx + z^2 dx dy) &= 0,
 \end{aligned}$$

从而

$$I = \oiint_{S+S_1} \frac{1}{R} (xz dy dz + yz dz dx + z^2 dx dy) - \iint_{S_1} \frac{1}{R} (xz dy dz + yz dz dx + z^2 dx dy) = \pi R^3.$$

例2 求 $I = \iint_S y dz dx + 2 dx dy$, 其中 $S: z = 8 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分(上侧).

解法1 利用高斯公式.

作辅助曲面 $S_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 8, \\ z = 0 \end{cases}$, 下侧(见图 14-24), 由于

$$I = \iint_S = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1},$$

且

$$\begin{aligned}
 &\oiint_{S+S_1} \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \\
 &= \iiint_V (0 + 1 + 0) dV \stackrel{\text{柱坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} r dr \int_0^{8-r^2} dz = 32\pi, \\
 \iint_{S_1} y dz dx + 2 dx dy &= \iint_{S_1} 2 dx dy = -2 \iint_{D_{xy}} dx dy = (-2) \times \pi (\sqrt{8})^2 = -16\pi,
 \end{aligned}$$

故 $I = 32\pi - (-16\pi) = 48\pi$.

解法2 利用转换公式: $\frac{dy dz}{\cos \alpha} = \frac{dz dx}{\cos \beta} = \frac{dx dy}{\cos \gamma}$.

令 $F = 8 - (x^2 + y^2) - z$, 则

$$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (-2x, -2y, -1).$$

取 $(2x, 2y, 1)$ (上侧), 则

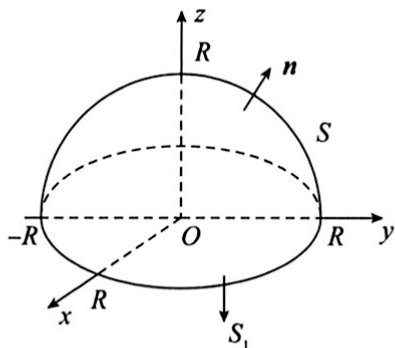


图 14-23

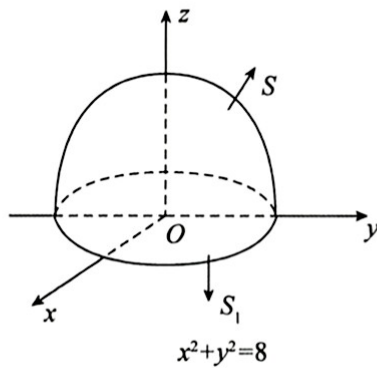


图 14-24

$$\cos \beta = \frac{2y}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1^2}},$$

从而

$$dz dx = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dx dy = 2y dx dy,$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iint_S y dz dx + 2 dx dy = \iint_S 2(y^2 + 1) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} (y^2 + 1) dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} (r^2 \sin^2 \theta + 1) r dr = 48\pi. \end{aligned}$$

例 3 设 $S: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$) 上侧, 求

$$I = \iint_S \frac{ax dy dz + (a+z)^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

解 将 S 的方程代入积分表达式, 得

$$I = \frac{1}{a} \iint_S ax dy dz + (a+z)^2 dx dy.$$

如图 14-25 所示, 作辅助曲面 $S_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$, 取下侧, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \oiint_{S+S_1} ax dy dz + (a+z)^2 dx dy \\ & \xrightarrow{\text{高斯公式}} \frac{1}{a} \iiint_V (a + 2a + 2z) dV \\ &= \frac{-1}{a} \iiint_V (3a + 2z) dV \\ &= -\frac{1}{a} \cdot 3a \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{a} \iiint_V z dV \\ & \xrightarrow{\text{球坐标}} -2\pi a^3 - \frac{2}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^a r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= -2\pi a^3 + \frac{1}{2} \pi a^3 = -\frac{3}{2} \pi a^3, \end{aligned}$$

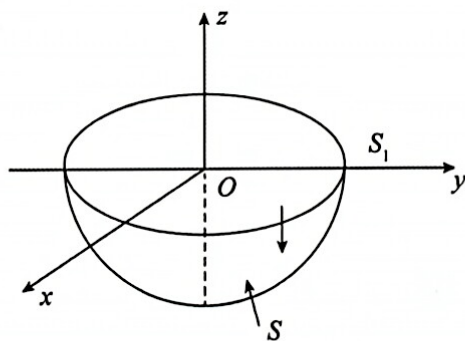


图 14-25

又由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \iint_{S_1} ax dy dz + (a+z)^2 dx dy \\ &= 0 + \frac{-1}{a} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} a^2 dx dy = \frac{-1}{a} \cdot a^2 \cdot \pi a^2 = -\pi a^3, \end{aligned}$$

故

$$I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1} = -\frac{3}{2} \pi a^3 - (-\pi a^3) = -\frac{1}{2} \pi a^3.$$

例 4 求 $I = \iint_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS$, $S: z^2 = x^2 + y^2, -1 \leq z \leq 0$, 其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 S 上任一点 (x, y, z) 处法向量的方向余弦, 且 $\cos \gamma < 0$.

解 由 $\cos \gamma < 0 \Rightarrow S$ 取下侧, 作辅助曲面 $S_1: z = -1, x^2 + y^2 \leq 1$ 上侧(见图 14-26).

由于 $I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1}$, 且

$$\oiint_{S+S_1} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS$$

$$= \oiint_{S+S_1} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

$$\stackrel{\text{高斯公式}}{=} - \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV$$

$$\stackrel{\text{球坐标}}{=} - 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{-1}{\cos \varphi}} r^2 \cdot r^2 dr$$

$$= -6\pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin \varphi \cdot \frac{-1}{5} \cdot \frac{1}{\cos^5 \varphi} d\varphi = \frac{6\pi}{5} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin \varphi \frac{1}{\cos^5 \varphi} d\varphi$$

$$= \frac{6\pi}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^4 \varphi} \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{9\pi}{10},$$

$$\iint_{S_1} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS = \iint_{S_1} [0 + 0 + (-1) \times 1] dS$$

$$= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 1 dxdy = -\pi,$$

$$\text{故 } I = -\frac{9\pi}{10} - (-\pi) = \frac{\pi}{10}.$$

例 5 计算 $I = \oiint_S \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中 S 是 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

解 如图 14-27 所示, 作辅助曲面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($0 < r < \frac{1}{16}$), 取内侧.

$$\oiint_{S+S_1} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iiint_V 0 dV = 0,$$

故

$$I = \oiint_{S+S_1} - \oiint_{S_1} = 0 - \oiint_{S_1} = \oiint_{S_1(\text{外})} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \oiint_{S_1(\text{外})} \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi.$$

注 (*) 利用了两类积分之间的关系:

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

因为

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \mathbf{n} = (2x, 2y, 2z),$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

故

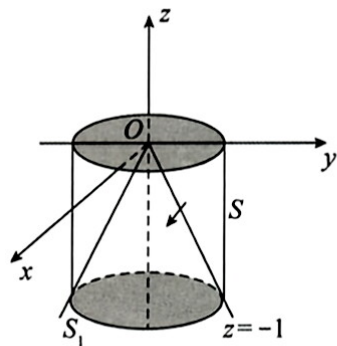


图 14-26

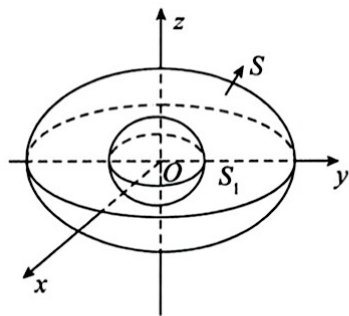


图 14-27

$$P = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\cos \alpha}{r^2},$$

因此

$$\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy dz = \frac{1}{r^2} \cos \alpha dS,$$

则

$$\begin{aligned} & \oint_{S_1(\text{外})} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy dz + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz dx + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \oint_{S_1(\text{外})} \left(\frac{1}{r^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r^2} \cos^2 \beta + \frac{1}{r^2} \cos^2 \gamma \right) dS = \oint_{S_1(\text{外})} \frac{1}{r^2} dS. \end{aligned}$$

例 6 求 $I = \oint_{S_{\text{外}}} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 是 $x^2 + y^2 = R^2$ ($R > 0$),

$z = R, z = -R$ 所围成的圆柱体的表面 (见图 14-28).

解 因为原点包含在 S 的内部, 所以不能直接用高斯公式, 下面用投影法(公式).

由于 $S_{\text{外}} = S_1 + S_2 + S_3$ (外侧), 所以

$$I = \oint_{S_{\text{外}}} = \iint_{S_1 \text{外}} + \iint_{S_2 \text{外}} + \iint_{S_3 \text{外}}.$$

右边的 3 个积分均是 2 项积分的和, 下面分别计算得:

$$(1) \iint_{S_1} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{S_2} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \iint_{S_1} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} + \iint_{S_2} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{R^2}{x^2 + y^2 + R^2} dx dy + \iint_{D_{xy}} \frac{R^2}{x^2 + y^2 + R^2} dx dy = 0. \end{aligned}$$

$$(3) \iint_{S_3} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \iint_{S_3} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{S_{3\text{前}}} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} + \iint_{S_{3\text{后}}} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \iint_{D_3} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz - \iint_{D_3} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz \\ &= 2 \iint_{D_3} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy \int_{-R}^R \frac{dz}{R^2 + z^2} = \frac{\pi^2 R}{2}. \end{aligned}$$

综上所述, $I = \frac{\pi^2 R}{2}$.

例 7 设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S , 都有

$$\oint_S x f(x) dy dz - x y f(x) dz dx - e^{2x} z dx dy = 0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续的一阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 求 $f(x)$.

分析 本题考查高斯公式、一阶线性微分方程.

解 由已知条件, 用高斯公式.

$$0 = \oint_S x f(x) dy dz - x y f(x) dz dx - e^{2x} z dx dy$$

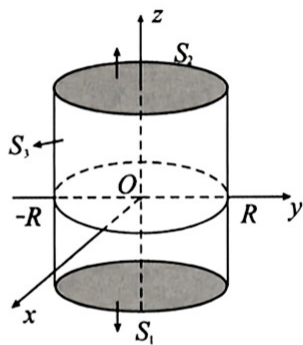


图 14-28

$$= \pm \iiint_V [xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}] dV, \quad \textcircled{1}$$

其中 V 为由 S 所围成的有界闭区域.

由于对任意曲面 S , 式 $\textcircled{1}$ 均成立, 故被积函数为 0, 即

$$xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0,$$

所以

$$f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x}.$$

解此方程, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\int(1-\frac{1}{x})dx} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} dx + C \right] \\ &= \frac{e^x}{x} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot x e^{-x} dx + C \right] = \frac{e^x}{x} (e^x + C). \end{aligned}$$

又由

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x} + Ce^x}{x} \right),$$

得 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + Ce^x) = 0$, 故 $C = -1$, 于是 $f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1)$.

注 在本题中, 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义, 所以需由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 确定常数 C .

例 8 设曲线 L 是球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限与三个坐标面的交线, 曲面 Σ 的方向朝上, L 的方向与 Σ 的方向符合右手法则, 计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$.

解法 1 利用曲线积分计算公式.

如图 14-29 所示, L 由 L_1, L_2, L_3 构成, 其中:

$L_1: z = 0$, 从点 $(1, 0, 0)$ 沿 $x^2 + y^2 = 1$ 到点 $(0, 1, 0)$;

$L_2: x = 0$, 从点 $(0, 1, 0)$ 沿 $y^2 + z^2 = 1$ 到点 $(0, 0, 1)$;

$L_3: y = 0$, 从点 $(0, 0, 1)$ 沿 $z^2 + x^2 = 1$ 到点 $(1, 0, 0)$.

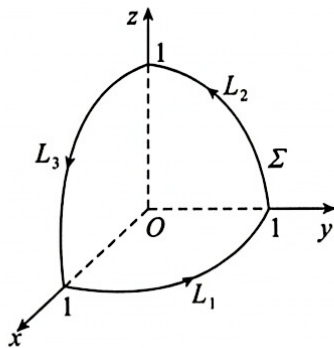


图 14-29

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{L_1} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 t (-\sin t) + (-\cos^2 t) \cos t] dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt = -\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

($x^2 + y^2 = 1$ 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t$).

同理可得,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{L_2} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 t (-\sin t) + (-\cos^2 t) \cos t] dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt = -\frac{4}{3}. \\ I_3 &= \int_{L_3} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(-\cos^2 t) \cos t - \sin^2 t \sin t] dt \end{aligned}$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t + \sin^3 t) dt = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{故 } I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -4.$$

解法2 利用斯托克斯公式.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \iint_{\Sigma} (y+z) dydz + (z+x) dzdx + (x+y) dx dy \end{aligned}$$

添加: $\Sigma_1: x=0, y^2+z^2 \leq 1$, 沿 x 轴向负向;

$\Sigma_2: y=0, x^2+z^2 \leq 1$, 沿 y 轴向负向;

$\Sigma_3: z=0, x^2+y^2 \leq 1$, 沿 z 轴向负向.

利用高斯公式, 有

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} - \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2} - \iint_{\Sigma_3},$$

由 $P=y+z, Q=z+x, R=x+y$, 知 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, 故

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} = 0.$$

$$\iint_{\Sigma_1} = 2 \iint_{D_{yz}} (y+z) dydz = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (\cos \theta + \sin \theta) r^2 dr = \frac{4}{3}.$$

其中 D_{yz} 为 Σ 在 yOz 面上的投影区域.

同理可得,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} &= 2 \iint_{D_{xz}} (x+z) dzdx = \frac{4}{3}, \\ \iint_{\Sigma_3} &= 2 \iint_{D_{xy}} (x+y) dx dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } I = 0 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -4.$$

第三节 第二型曲线、曲面积分的奇偶对称性

内容与方法提要

一、第二型曲线积分的奇偶对称性

设 $I = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

(1) 设 L 关于 x 轴对称, L 在上半平面的部分记为 L_1 , L 在下半平面的部分记为 L_2 .

① 当 L_1 与 L_2 的方向相同时, 有

$$\int_L P(x, y) dx = \begin{cases} 2 \int_{L_1} P(x, y) dx, & P(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数,} \\ 0, & P(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

② 当 L_1 与 L_2 的方向相反时, 有

$$\int_L P(x, y) dx = \begin{cases} 0, & P(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数,} \\ 2 \int_{L_1} P(x, y) dx, & P(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

证 如图 14-30 所示, 设 $L = L_1 + L_2$, 其中

$$L_1: y = y(x), x = x(x_1 \rightarrow x_2),$$

$$L_2: y = -y(x), x = x(x_2 \rightarrow x_1).$$

若 L_1 与 L_2 的方向相反, 则

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx &= \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} P[x, y(x)] dx + \int_{x_2}^{x_1} P[x, -y(x)] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \{P[x, y(x)] - P[x, -y(x)]\} dx \\ &= \begin{cases} 0, & P(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数,} \\ 2 \int_{L_1} P(x, y) dx, & P(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数.} \end{cases} \end{aligned}$$

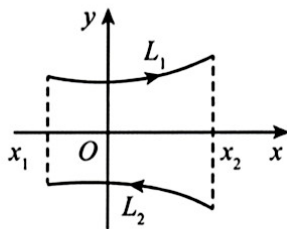


图 14-30

若 L_1 与 L_2 的方向相同, 则

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \{P[x, y(x)] + P[x, -y(x)]\} dx \\ &= \begin{cases} 2 \int_{L_1} P(x, y) dx, & P(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数,} \\ 0, & P(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数.} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 设 L 关于 y 轴对称, L 在右半平面的部分记为 L_1 , L 在左半平面的部分记为 L_2 .

① 当 L_1 与 L_2 的方向相同时, 有

$$\int_L Q(x, y) dy = \begin{cases} 2 \int_{L_1} Q(x, y) dy, & Q(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数,} \\ 0, & Q(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

② 当 L_1 与 L_2 方向相反时, 有

$$\int_L Q(x, y) dy = \begin{cases} 0, & Q(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数,} \\ 2 \int_{L_1} Q(x, y) dy, & Q(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数.} \end{cases}$$

说明 对 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 应用奇偶性时, 应注意两点:

① 分开用. 分两个积分 $\int_L P(x, y) dx$ 与 $\int_L Q(x, y) dy$, 然后分别应用.

② 方向性. 当 L_1 与 L_2 方向相同时, 结论与二重、三重、第一型曲线积分和第一型曲面积分相同, 当 L_1 与 L_2 的方向相反时, 结论相反.

例如 计算 $I = \int_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, $ABCD$ 是以 $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)$ 为顶点的正方形正向边界曲线(见图 14-31).

解 ① 分开用.

$$I = \int_{ABCD} \frac{dx}{|x| + |y|} + \int_{ABCD} \frac{dy}{|x| + |y|} \stackrel{\text{记}}{=} I_1 + I_2.$$

② 方向性.

对于 I_1 , 积分曲线关于 x 轴对称, 且方向相反. 又由于被积函数

$$P(x, y) = \frac{1}{|x| + |y|} \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数, 故 } I_1 = 0.$$

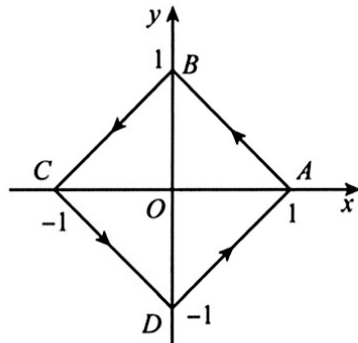


图 14-31

对于 I_2 , 积分曲线关于 y 轴对称, 且方向相反. 又由于被积函数 $Q(x, y) = \frac{1}{|x| + |y|}$ 关于 x 是偶函数, 故 $I_2 = 0$, 所以 $I = I_1 + I_2 = 0$.

二、第二型曲面积分的奇偶对称性

(1) 设曲面 S 关于 xOy 面对称, xOy 面的上半部分为 S_1 , 取上侧, xOy 面的下半部分为 S_2 , 取下侧, 则

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy, & R(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数,} \\ 0, & R(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

(2) 设曲面 S 关于 yOz 面对称, yOz 面的前半部分为 S_1 , 取前侧, yOz 面的后半部分为 S_2 , 取后侧, 则

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \begin{cases} 2 \iint_{S_1} P(x, y, z) dy dz, & P(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数,} \\ 0, & P(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

(3) 设曲面 S 关于 xOz 面对称, xOz 面的左侧部分为 S_1 , 取左侧, xOz 面的右侧部分为 S_2 , 取右侧, 则

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \begin{cases} 2 \iint_{S_1} Q(x, y, z) dz dx, & Q(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数,} \\ 0, & Q(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

说明 ① 设曲面 $S: z = z(x, y)$ 关于 xOy 面对称, S_1 为其上半部分, 取上侧, S_2 为其下半部分, 取下侧, 则

$$\begin{aligned} \iint_S R(x, y, z) dx dy &= \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, -z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

若 $R(x, y, z)$ 关于 z 是偶函数, 则

$$R(x, y, z(x, y)) = R(x, y, -z(x, y)),$$

故 $\iint_S R(x, y, z) dx dy = 0$.

若 $R(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数, 则

$$R(x, y, z(x, y)) = -R(x, y, -z(x, y)),$$

故

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = 2 \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy.$$

② 对 $\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$ 应用奇偶性, 要分开成 3 个积分应用, 注意方向性.

③ 第二型曲线、曲面积分的奇偶性属于了解内容, 掌握其方法会对计算带来方便.

例如 设曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 取外侧, 计算 $I = \iint_S \frac{1}{\cos^2 z} dx dy$.

解 S 关于 xOy 面对称, 其上半部分与下半部分的方向相反, $\frac{1}{\cos^2 z}$ 关于 z 是偶函数, 故

$$I = \iint_S \frac{1}{\cos^2 z} dx dy = 0.$$

例如 设 $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于 $z = 1$ 与 $z = 2$ 之间的部分, 取下侧, 计算

$$I = \iint_S dy dz + z dz dx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

解法1 S 如图 14-32 所示.

S 关于 yOz 面对称, $P = 1 = x^0 \cdot 1$ 关于 x 是偶函数, 则

$$\iint_S dy dz = 0.$$

S 关于 xOz 面对称, $Q = z = z \cdot y^0$ 关于 y 是偶函数, 则

$$\iint_S z dz dx = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= 0 + 0 + \iint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{e^r}{r} \cdot r dr = 2\pi e(1 - e). \end{aligned}$$

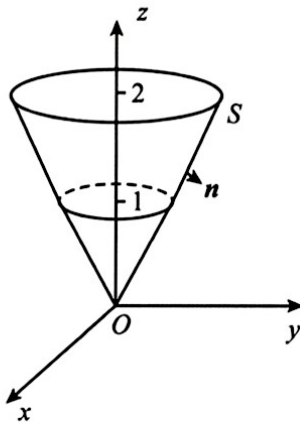


图 14-32

解法2 应用高斯公式.

作辅助曲面: $S_1: z = 2, x^2 + y^2 \leq 4$, 取上侧; $S_2: z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$, 取下侧, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{S+S_1+S_2} - \iint_{S_1} - \iint_{S_2} \\ &= \oint_{S+S_1+S_2} dy dz + z dz dx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \iiint_V \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{e^z}{r} \cdot r dr \int_1^2 dz \\ &= 2\pi \int_1^2 z e^z dz = 2\pi e^2, \\ &= \iint_{S_1} dy dz + z dz dx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \iint_{S_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot r dr = 4\pi e^2, \\ &= \iint_{S_2} dy dz + z dz dx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \iint_{S_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{e}{r} \cdot r dr = -2\pi e, \end{aligned}$$

故

$$I = 2\pi e^2 - 4\pi e^2 - (-2\pi e) = -2\pi e^2 + 2\pi e = 2\pi e(1 - e).$$

注 可见, 用奇偶性计算本题要简便些.

第四节 场论简介

内容与方法提要

1. 数量场的梯度

设 $f(x, y, z)$ 有一阶连续偏导数, 则

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

2. 向量场的散度

设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$. 其中 P, Q, R 有一阶连续偏导数, 则散度

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

3. 向量场的旋度

设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, 其中 P, Q, R 有一阶连续偏导数, 则旋度

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

例 1 设向量场 $\mathbf{A} = \{x \sin(xyz), y \sin(xyz), 2z \sin(xyz)\}$, 求 $\text{div } \mathbf{A}$.

解 记 $P = x \sin(xyz), Q = y \sin(xyz), R = 2z \sin(xyz)$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sin(xyz) + x \cos(xyz) \cdot yz,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \sin(xyz) + y \cos(xyz) \cdot xz,$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 2 \sin(xyz) + 2z \cos(xyz) \cdot xy,$$

故

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 4 \sin(xyz) + 4xyz \cos(xyz).$$

例 2 设向量场 $\mathbf{A} = \{x^2yz, xy^2z, xyz^2\}$, 求在点 $P(1, 2, -3)$ 处的旋度 $\text{rot } \mathbf{A}$.

解

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix} \\ &= (xz^2 - xy^2) \mathbf{i} + (x^2y - yz^2) \mathbf{j} + (y^2z - x^2z) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

故

$$\text{rot } \mathbf{A} \Big|_{(1, 2, -3)} = (5, -16, -9).$$

例 3 设 $f(r) (r > 0)$ 有二阶连续导数, 且 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 满足 $\text{div}(\text{grad } u) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 u 的表达式.

解

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - x^2}{r^3}.\end{aligned}$$

同理,有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f''(r) \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= f''(r) \frac{z^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - z^2}{r^3}.\end{aligned}$$

由已知得

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = r,$$

即 $[r^2 f'(r)]' = r^3$, 从而

$$r^2 f'(r) = \frac{1}{4}r^4 + C_1,$$

解得

$$f(r) = \frac{1}{12}r^3 - \frac{C_1}{r^2} + C_2,$$

故

$$u = \frac{1}{12}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - C_1(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

习题演练

解答题

(1) 设 L 是从 $A(1, \frac{1}{2})$ 沿 $2y = x^2$ 到 $B(2, 2)$ 的弧段, 求 $I = \int_L \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$.

(2) 设 L 为 $|x| + |y| = 1$, 取逆时针方向, 求 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{|x| + |y|}$.

(3) 设 L 为 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 上由点 $A(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$ 沿顺时针方向到点 $B(a, 0)$ 的一段弧, 求 $I = \int_L y dx$.

(4) 计算积分 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

(I) L 是圆周 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 1$, 取逆时针方向;

(II) L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向;

(III) L 是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 取逆时针方向.

(5) 计算 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, $L: x^2 + y^2 = R^2 (R > 1)$ 取逆时针方向.

(6) 设 L 为 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$ 从 $A(R, 0)$ 经过 $B(0, R)$ 到 $C(-R, 0)$ 的一段弧, 计算 $I = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2}$.

(7) 设 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0,2)$ 的一段曲线, 求 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有连续导数, 其中 L 是从 $A(3, \frac{2}{3})$ 到 $B(1,2)$ 的直线段, 求 $I = \int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$.

(9) 设有平面力场 $F = (2xy^3 - y^2 \cos x, 1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)$, 求质点沿曲线 $L: 2x = \pi y^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(\frac{\pi}{2}, 1)$ 时 F 所做的功.

(10) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 曲线积分

$$I = \int_L [x e^{2x} - 6f(x)] \sin y dx - [5f(x) - f'(x)] \cos y dy$$

与路径无关, 求 $f(x)$ 的表达式.

(11) 设 $f(x), g(x)$ 有连续导数, $v = yf(xy)dx + xg(xy)dy$, 且存在函数 $u(x, y)$, 使得 $du = v$.

(I) 求 $f(xy) - g(xy)$;

(II) 若 $f(x) = \varphi'(x)$, 求函数 $u(x, y)$, 使得 $du = v$.

(12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向看去为逆时针方向, 求

$$I = \oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz.$$

(13) 已知曲线 $L: \begin{cases} z = x, \\ z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \end{cases}$ 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 求

$$I = \int_L (y+z) dx + (z^2 - x^2 + y) dy + x^2 y^2 dz.$$

(14) 若 $\varphi(y)$ 有连续导数, $\varphi(0) = 0$, 曲线 $\widehat{AB}$ 的极坐标方程为 $r = a(1 - \cos \theta)$, 其中 $a > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$, A 与 B 分别对应于 $\theta = 0$ 与 $\theta = \pi$, 计算

$$I = \int_{\widehat{AB}} [\varphi(y)e^x - \pi y] dx + [\varphi'(y)e^x - \pi] dy.$$

(15) 设 $S: z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 取上侧, 求 $I = \iint_S (x+1) dy dz + z dx dy$.

(16) 设 S 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧, 计算

$$I = \iint_S 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy.$$

(17) 设 S 是曲面 $x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$ 的前侧, 计算

$$I = \iint_S x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy.$$

(18) 设 $f(u)$ 有连续导数, S 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与两个半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 所围立体的全表面的外侧, 计算

$$I = \iint_S \left[\frac{1}{y+3} f\left(\frac{x+4}{y+3}\right) + 3xy^2 \right] dy dz + \left[\frac{1}{x+4} f\left(\frac{x+4}{y+3}\right) + 3x^2 y \right] dz dx + z^3 dx dy.$$

(19) 设 $\varphi(y)$ 有连续导数, 在绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4}$

的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(II) 求 $\varphi(y)$.

(20) 设 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 证明: 对上半平面 $y > 0$ 中的任意闭曲线 L , 都有 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{f(x, y)} = 0$ 成立的充分必要条件是 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ 对任意 $t > 0$ 及上半平面中的任意点 (x, y) 都成立.

(21) 设 $F(x, y, z) = xyi - yzj + zxk$, 求 $\text{rot } F(1, 1, 0)$.

习题演练解答

解答题

(1) 解 L 的参数式方程为 $\begin{cases} x = x, \\ y = \frac{1}{2}x^2, \end{cases}$ 故

$$I = \int_L \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} dx - \frac{4}{x^2} \cdot x dx \right) = 0.$$

(2) 解 利用格林公式, 将 $|x| + |y| = 1$ 代入被积表达式, 得

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{x dy - y dx}{|x| + |y|} &= \oint_L x dy - y dx \\ &= \iint_D 2 dx dy = 2 \times 2 = 4. \end{aligned}$$

(3) 解 如图 14-33 所示,

$$L: \begin{cases} x = x, \\ y = \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases} \quad \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq a \right),$$

故

$$\begin{aligned} \int_L y dx &= \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = -a^2 \int_{\frac{3\pi}{4}}^0 \sin^2 t dt \\ &= a^2 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) a^2. \end{aligned}$$

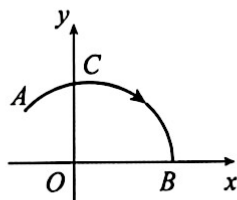


图 14-33

(4) 解 (I) 记 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 则 P 与 Q 在 $(x+2)^2 + (y-4)^2 \leq 1$ 内有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 利用格林公式, 得

$$I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

(II) 由于 P 与 Q 在 $x^2 + y^2 < 1$ 内可能无定义, 故不能直接利用格林公式, 可直接利用参数方程 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ 计算, 得

$$I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi.$$

(III) 如图 14-34 所示, 取 $L_r: \begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi), 0 < r \ll 1$, 且取顺时针方向.

在 $L + L_r$ 所围区域 D 上, 利用格林公式, 有

$$\oint_{L+L_r} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0,$$

故

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_{L_r} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)}{r^2} dt = 2\pi.$$

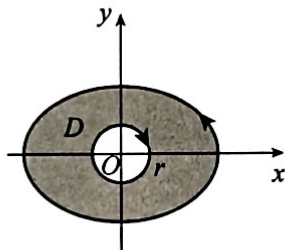


图 14-34

(5) 解

$$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{4x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2},$$

故在不含(0,0)的区域内,积分与路径无关.

作 $L_r: \begin{cases} x = \frac{1}{2}r \cos t, \\ y = r \sin t, \end{cases}$ r 为充分小的正数,取顺时针方向,则

$$\oint_{L+L_r^-} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

故

$$I = \oint_L = \oint_{L_r} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{r^2} \oint_{L_r} x dy - y dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi.$$

(6) 解

$$P = \frac{-y}{x^2 + 4y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + 4y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2 + 4y^2)^2}.$$

考虑到被积表达式的分母为 $x^2 + 4y^2$, 作 $L_r: x^2 + 4y^2 = R^2$, 方向为从点 $(R, 0)$ 到 $(-R, 0)$, 如图 14-35 所示. 利用格林公式, 有

$$\oint_{L+L_r^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

故

$$I = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2} = \int_{L_r} \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2} = \frac{1}{R^2} \int_{L_r} x dy - y dx.$$

$$L_r: \begin{cases} x = R \cos t, \\ y = \frac{1}{2}R \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi) \text{ 为逆时针方向, 所以}$$

$$I = \frac{1}{R^2} \int_0^\pi \left[R \cos t \cdot \frac{R}{2} \cos t - \frac{1}{2} R \sin t \cdot (-R \sin t) \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi dt = \frac{\pi}{2}.$$

(7) 解 如图 14-36 所示, 作辅助线 $\overline{BO}$: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ 利用格林公式, 有

$$I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$$

$$= \int_{L+\overline{BO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy -$$

$$\int_{\overline{BO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$$

$$= \iint_D (3x^2 + 1 - 3x^2) dx dy - \int_2^0 (-2y) dy$$

$$= \frac{1}{4} \pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \pi \times 1^2 + y^2 \Big|_2^0 = \frac{\pi}{2} - 4.$$

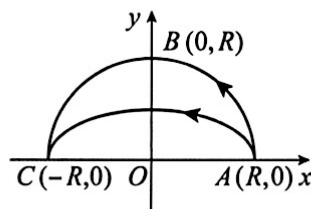


图 14-35

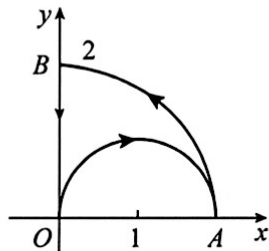


图 14-36

(8) 解 $P = \frac{1+y^2 f(xy)}{y}, Q = \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1],$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = f(xy) + xyf'(xy) - \frac{1}{y^2} \quad (y \neq 0),$$

故在 $y \neq 0$ 的区域内, 积分与路径无关.

取折线 $\overline{AC}, \overline{CB}$, 如图 14-37 所示,

$$\overline{AC}: \begin{cases} x = x, \\ y = \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \overline{CB}: \begin{cases} y = y, \\ x = 1, \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int_3^1 \frac{3}{2} \left[1 + \frac{4}{9} f\left(\frac{2}{3}x\right) \right] dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 \left[f(y) - \frac{1}{y^2} \right] dy \\ &= \frac{3}{2} \int_3^1 dx + \frac{2}{3} \int_3^1 f\left(\frac{2x}{3}\right) dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy - \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{y^2} dy \\ &= \frac{3}{2} (1-3) + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(t) dt + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -4 \\ &\quad \left[\text{这里 } \frac{2}{3} \int_3^1 f\left(\frac{2x}{3}\right) dx \stackrel{\frac{2x}{3}=t}{=} \int_{\frac{2}{3}}^2 f(t) dt \right]. \end{aligned}$$

注 取过 $xy=2$ 的积分路径, 即 $\begin{cases} x = \frac{2}{y}, \\ y = y, \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{2}{3}}^2 \left\{ \frac{1+y^2 f(2)}{y} \cdot \left(-\frac{2}{y^2}\right) + \frac{2}{y^3} [y^2 f(2) - 1] \right\} dy \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^2 \left(-\frac{4}{y^3}\right) dy = -4. \end{aligned}$$

(9) 解 如图 14-38 所示,

$$W = \int_L (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy = \int_L P dx + Q dy.$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则积分与路径无关. 于是

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overline{OB+BA}} P dx + Q dy \\ &= \int_0^1 \left(1 - 2y \sin \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi^2}{4} \cdot y^2 \right) dy \\ &= \left(y - y^2 + \frac{\pi^2}{4} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

(10) 解 $P = [xe^{2x} - 6f(x)] \sin y, Q = -[5f(x) - f'(x)] \cos y,$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 得

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = xe^{2x}. \quad ①$$

特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 得 $r_1 = 2, r_2 = 3$.

令特解为 $f^* = x(a_0 x + a_1)e^{2x}$, 代入式 ①, 解得 $a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = -1$, 故式 ① 的通解为

$$f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2} x(x+2)e^{2x}.$$

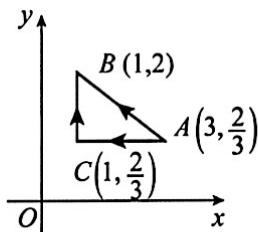


图 14-37

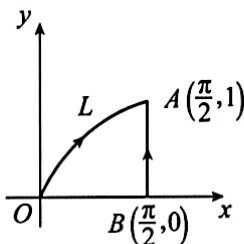


图 14-38

由 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 得 $C_1 = -2, C_2 = 2$, 故

$$f(x) = -2e^{2x} + 2e^{3x} - \frac{x}{2}(x+2)e^{2x}.$$

(11) 解 (I) 由 $du = v$, 知

$$\frac{\partial}{\partial y}[yf(xy)] = \frac{\partial}{\partial x}[xg(xy)],$$

即

$$f(xy) + yf'(xy) \cdot x = g(xy) + xg'(xy) \cdot y.$$

令 $xy = s$, 故 $f(s) + s \frac{df(s)}{ds} = g(s) + s \frac{dg(s)}{ds}$, 即

$$s \frac{d(f-g)}{ds} = -(f-g),$$

解得 $f(s) - g(s) = \frac{C}{s}$, 即 $f(xy) - g(xy) = \frac{C}{xy}$ (C 为任意常数).

(II) 当 $f(x) = \varphi'(x)$ 时, 由 (I), 有

$$du = y\varphi'(xy)dx + x\left[\varphi'(xy) - \frac{C}{xy}\right]dy.$$

由积分与路径无关, 有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} y\varphi'(xy)dx + x\left[\varphi'(xy) - \frac{C}{xy}\right]dy \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} y\varphi'(xy)dx + x\varphi'(xy)dy - \frac{C}{y}dy \\ &= \varphi(xy) - C \ln|y| + C_0 \quad (C_0, C \text{ 为任意常数}). \end{aligned}$$

注

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy. \end{aligned}$$

(12) 解 L 为空间闭曲线, 利用斯托克斯公式, 取 $S: z = x + y$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} = \iint_S y dydz + x dzdx + dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-x-y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r\cos\theta - r\sin\theta) r dr = \pi. \end{aligned}$$

(13) 解 利用 L 的参数方程计算.

L 在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = 1, & (-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}), \\ z = 0 \end{cases}$$

曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sqrt{2} \sin t, & (t \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}), \\ z = \cos t \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} [-(\sqrt{2} \sin t + \cos t) \sin t + \sqrt{2} \sin t \cdot \sqrt{2} \cos t + \cos^2 t \cdot 2 \sin^2 t (-\sin t)] dt \\ &= -\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

注 此题也可以利用斯托克斯公式计算.

(14) **解** 设曲线 $\widehat{AB}$ 与线段 $\overline{BA}$ 所围区域为 D , 如图 14-39 所示. 设

$$P = \varphi(y)e^x - \pi y, \quad Q = \varphi'(y)e^x - \pi,$$

应用格林公式, 有

$$\begin{aligned} \oint_{\widehat{AB}+\overline{BA}} P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D \pi dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi r^2 d\theta \\ &= \frac{a^2 \pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{a^2 \pi}{2} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} - 2\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{3}{4} a^2 \pi^2. \end{aligned}$$

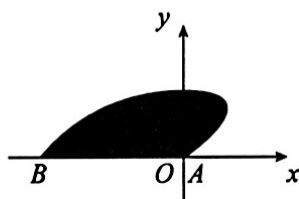


图 14-39

又由于

$$\int_{\overline{BA}} P dx + Q dy = \int_{-a}^a P(x, 0) dx = \int_{-a}^a \varphi(0)e^x dx = 0,$$

$$\text{故 } I = \frac{3}{4} a^2 \pi^2.$$

(15) **解** 利用转换公式, 有

$$\frac{dy dz}{\cos \alpha} = \frac{dz dx}{\cos \beta} = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = dS.$$

如图 14-40 所示, 曲面 $S: z = x^2 + y^2$ 上侧的法向量 $\mathbf{n} = (-2x, -2y, 1)$, 故

$$\cos \alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

所以

$$dy dz = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy = (-2x) dx dy,$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x+1) dy dz + z dx dy \\ &= \iint_S [(x+1)(-2x) + z] dx dy \\ &= \iint_S (-2x^2 + z) dx dy \end{aligned}$$

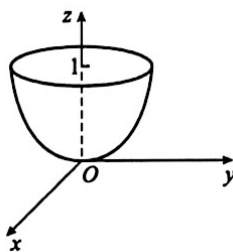


图 14-40

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [-2x^2 + (x^2 + y^2)] dx dy = 0.$$

(16) 解 如图 14-41 所示, 作辅助曲面 $S_1: \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1, \end{cases}$ 取下侧. 利用高斯公式, 有

$$I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1} \stackrel{\text{记}}{=} I_1 - I_2,$$

$$I_1 = \oiint_{S+S_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy$$

$$= \iiint_V 6(x^2 + y^2 + z) dV$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z + r^2) r dz$$

$$= 12\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r (1-r^2)^2 + r^3 (1-r^2) \right] dr = 2\pi,$$

$$I_2 = \iint_{S_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy$$

$$= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-3) dx dy = 3\pi,$$

故

$$I = I_1 - I_2 = 2\pi - 3\pi = -\pi.$$

(17) 解 作辅助曲面 $S_1: \begin{cases} x = 0, \\ 3y^2 + 3z^2 \leq 1, \end{cases}$ 取后侧, 则 $I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1}$. 利用高斯公式, 有

$$\oiint_{S+S_1} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy$$

$$= \iiint_V (1 + 3y^2 + 3z^2) dV = \iiint_V dV + 3 \iiint_V (y^2 + z^2) dV$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \iint_{3y^2+3z^2 \leq 1} (y^2 + z^2) \sqrt{1-3y^2-3z^2} dy dz$$

$$= \frac{2\pi}{9} + 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} r^2 \sqrt{1-3r^2} \cdot r dr = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{45} = \frac{14\pi}{45}.$$

又由于

$$\iint_{S_1} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy = 0,$$

$$\text{故 } I = \frac{14\pi}{45}.$$

(18) 解 如图 14-42 所示, 记

$$P = \frac{1}{y+3} f\left(\frac{x+4}{y+3}\right) + 3xy^2,$$

$$Q = \frac{1}{x+4} f\left(\frac{x+4}{y+3}\right) + 3x^2y,$$

$$R = z^3,$$

所求积分满足高斯公式的条件, 利用高斯公式, 有

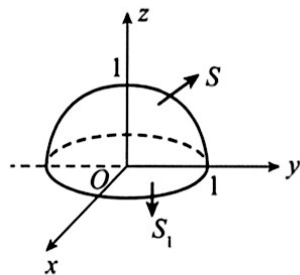


图 14-41

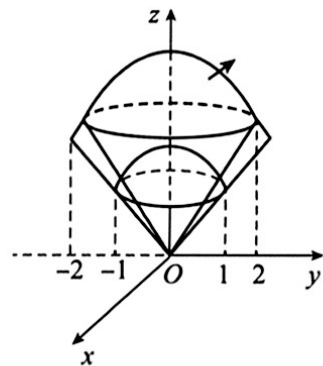


图 14-42

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \\
 &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_1^2 r^4 dr \\
 &= \frac{93\pi}{5} (2 - \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

(19)(I) **证** 如图 14-43 所示, 设 C 是 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线, 在 C 上任意取定两点 M, N , 作绕原点的闭曲线 $\widehat{MQNRM}$, 同时得到另一条绕原点的闭曲线 $\widehat{MQNPM}$.

由已知, 得

$$\oint_{\widehat{MQNRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\widehat{MQNPM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0.$$

根据第二类曲线积分的性质, 有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0.$$

(II) **解** 设 $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$, $Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$, 则 P, Q 在单连通区域 $x > 0$ 内有一阶连续偏导数. 由 (I)

知, $\int_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关, 故当 $x > 0$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2}. \quad (2)$$

比较式 ① 和式 ② 的右端, 得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y, \\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5. \end{cases} \quad (3)$$

由式 ③, 得 $\varphi(y) = -y^2 + C$, 再代入式 ④, 得

$$2y^5 - 4Cy^3 = 2y^5,$$

故 $C = 0$, 从而 $\varphi(y) = -y^2$.

(20) **证** 记 D 是由 L 围成的平面区域, 由格林公式, 得

$$\begin{aligned}
 \oint_L \frac{ydx - xdy}{f(x, y)} &= \iint_D \left[\frac{-f(x, y) + xf'_x(x, y)}{f^2(x, y)} - \frac{f(x, y) - yf'_y(x, y)}{f^2(x, y)} \right] dx dy \\
 &= \iint_D \frac{xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) - 2f(x, y)}{f^2(x, y)} dx dy = 0,
 \end{aligned}$$

这等价于

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) - 2f(x, y) = 0.$$

当 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ 时, 两边同时对 t 求导, 有

$$xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = 2tf(x, y).$$

两边同时乘以 t , 有

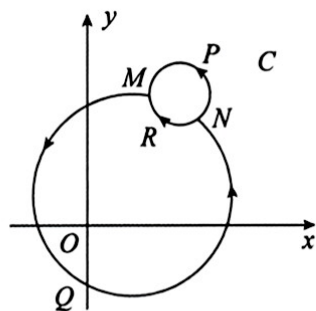


图 14-43

$$txf_1'(tx, ty) + tyf_2'(tx, ty) = 2t^2 f(x, y) = 2f(tx, ty),$$

所以

$$xf_x'(x, y) + yf_y'(x, y) - 2f(x, y) = 0.$$

充分性得到证明.

当 $xf_x'(x, y) + yf_y'(x, y) - 2f(x, y) = 0$ 时, 令 $g(t) = f(xt, yt), t > 0$, 则

$$\begin{aligned} g'(t) &= xf_1'(tx, ty) + yf_2'(tx, ty) \\ &= \frac{1}{t}[xtf_1'(tx, ty) + ytf_2'(tx, ty)] \\ &= \frac{2}{t}f(tx, ty) = \frac{2}{t}g(t), \end{aligned}$$

解得 $g(t) = Ct^2$, 由 $g(1) = f(x, y)$, 得 $C = f(x, y)$, 故

$$g(t) = f(x, y)t^2,$$

从而

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y),$$

即证明了 $xf_x'(x, y) + yf_y'(x, y) - 2f(x, y) = 0$ 等价于 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y) (t > 0)$.

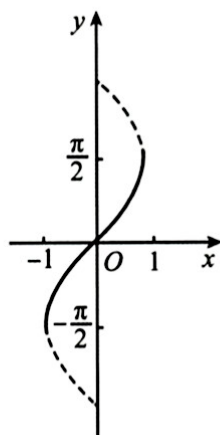
(21) **解** 由旋度的定义, 有

$$\begin{aligned} \text{rot } F(1, 1, 0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & zx \end{vmatrix} \bigg|_{(1,1,0)} = yi - zj - xk \bigg|_{(1,1,0)} \\ &= i - k. \end{aligned}$$

附录 几种常用的图形与曲线

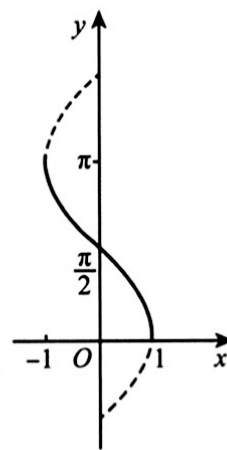
1. 反三角函数

(1) 反正弦函数



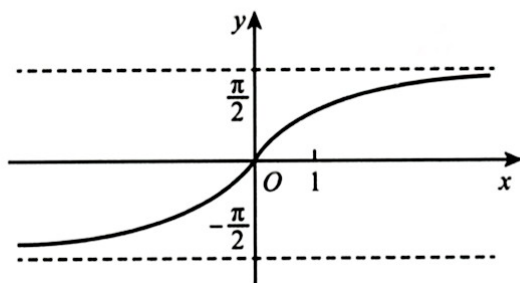
$$y = \arcsin x$$

(2) 反余弦函数



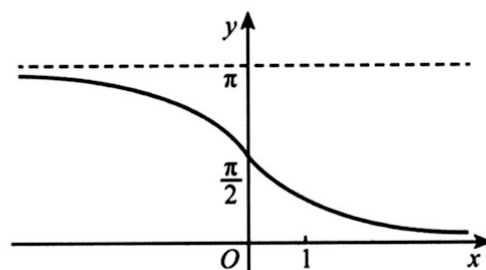
$$y = \arccos x$$

(3) 反正切函数



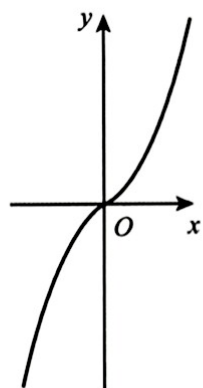
$$y = \arctan x$$

(4) 反余切函数



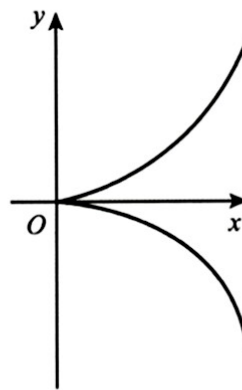
$$y = \operatorname{arccot} x$$

2. 三次抛物线



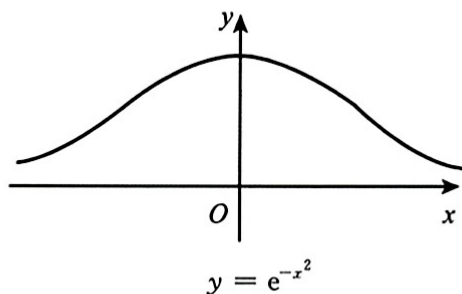
$$y = ax^3 (a > 0)$$

3. 半立方抛物线

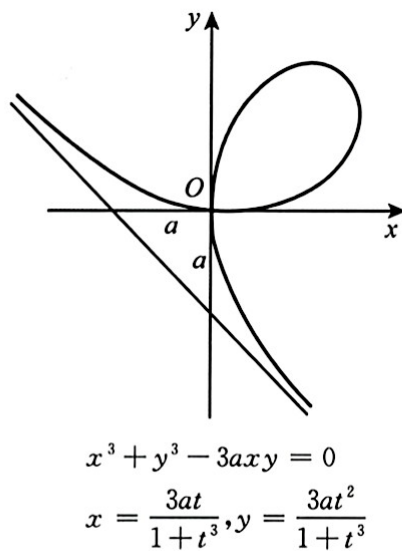


$$y^2 = ax^3 (a > 0)$$

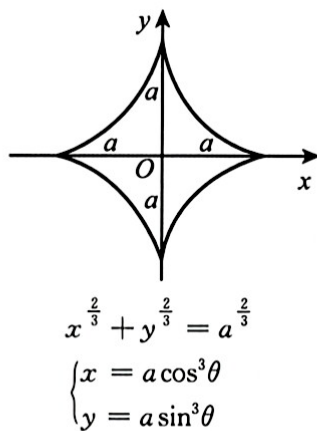
4. 概率曲线



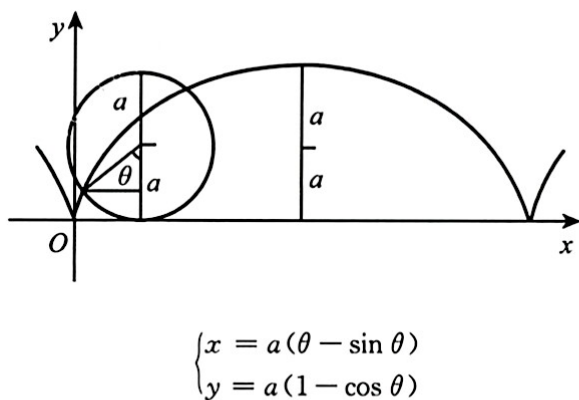
5. 笛卡儿叶形线



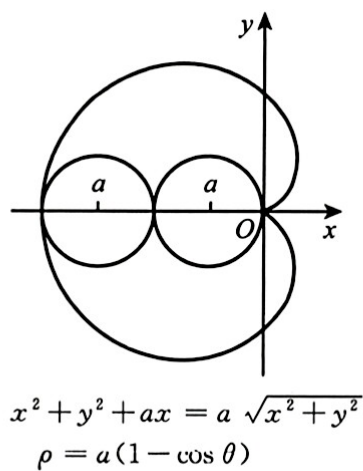
6. 星形线(内摆线的一种)



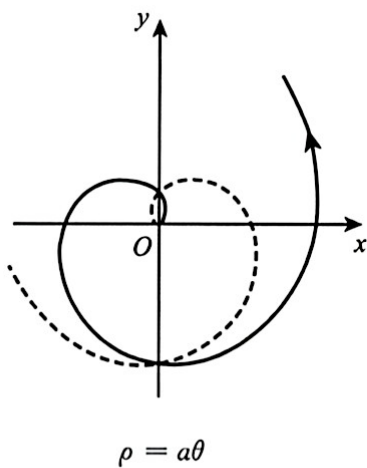
7. 摆线



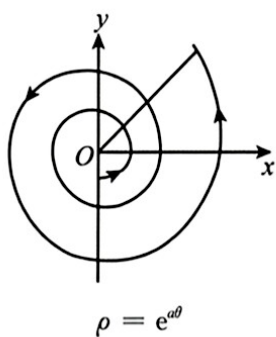
8. 心形线(外摆线的一种)



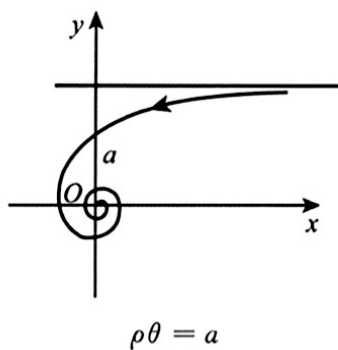
9. 阿基米德螺线



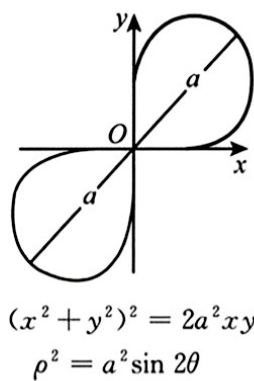
10. 对数螺线



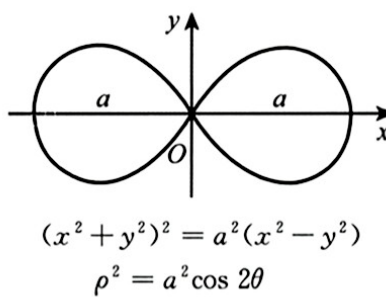
11. 双曲螺线



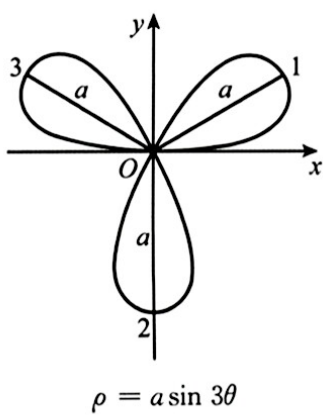
12. 伯努利双纽线(a)



13. 伯努利双纽线(b)



14. 三叶玫瑰线



15. 四叶玫瑰线

