

李林老师考研图书仅在北航出版社出版 · 李林全家桶之②

考研数学 2026 线性代数辅导讲义

(数学一、二、三通用)

带学一本通

李 林◎编著

重要提示

本书赠完整配套课
基础薄弱考生可无障碍学习

- 紧跟考研趋势
- 归纳总结真题考点及考法



扫码关注作者自媒体
李林老师新浪微博



扫码+刮防伪码
看配套课



扫码登录B站
看配套课



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS



2026 考研数学 线性代数辅导讲义 (数学一、二、三通用)

李 林 编著

 本文档**扫码**可**在线打印**



低至**5**分/页,满**9.9****京东**包邮

内 容 简 介

本书由李林老师根据自己多年在考研数学辅导班的讲义改编而成,是针对全国硕士研究生招生考试线性代数复习的辅导讲义,也可作为非数学专业本科生学习线性代数的参考书。其中各章由四部分组成:考试要求、内容与方法提要、典型例题分析、习题演练及解答。

本书内容全面,方法简洁;题型齐全,难度适中,力求以较少的篇幅帮助考生厘清基本概念,掌握基本理论和公式,提高解题能力。本书与李林《2026 考研数学精讲精练 880 题》配套使用复习效果更佳。

图书在版编目(CIP)数据

2026 考研数学线性代数辅导讲义:数学一、二、三
通用 / 李林编著. -- 北京:北京航空航天大学出版社,
2025. 3. -- ISBN 978-7-5124-4686-1

I. O151.2

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025PT0105 号

版权所有,侵权必究。

2026 考研数学线性代数辅导讲义(数学一、二、三通用)

李 林 编著

责任编辑 宋淑娟

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhzxf@163.com 邮购电话:(010)82316936

涿州市铭瑞印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:11.25 字数:356 千字

2025 年 3 月第 1 版 2025 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-4686-1 定价:89.80 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前言

本书是针对全国硕士研究生招生考试线性代数复习的辅导讲义，由本人根据多年在考研辅导班的讲义改编而成。本书也可作为非数学专业本科生学习线性代数的参考书。

线性代数是考研数学的重要组成部分，本书力求以较少的篇幅帮助考生厘清基本概念，掌握基本理论和公式，提高解题能力。

本书各章由四部分组成：①考试要求；②内容与方法提要；③典型例题分析；④习题演练及解答。

本书具有以下特点：

一、内容全面，方法简洁

本书按照最新考研数学大纲的顺序，分六章介绍线性代数的考试内容，全面总结考试中各类题型的简洁解题方法，澄清了一些常犯的错误与疑惑，帮助考生提高应试能力。

二、题型齐全，难度适中

本书对典型例题进行了分析，力求覆盖考试中的各种题型，以中等难度题目为主，由浅入深，探究考研命题规律，提高考生应试能力。

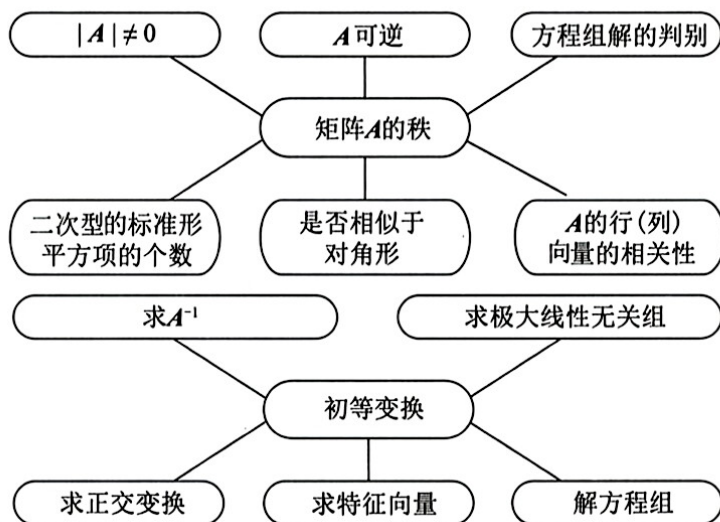
三、紧贴真题，与时俱进

本书新增了一部分 2025 年考研数学真题题型，能帮助考生适应最新的考查趋势，达到事半功倍的复习效果。

本人根据多年考研辅导经验，提出以下两点建议：

1. 了解线性代数的特点：内容联系紧密，计算量较大。计算准确是基础，全面掌握各概念之间的关系是重点。

2. 把握线性代数的主线：“一个中心”“一种方法”。如下图所示，“一个中心”即矩阵的秩，“确定什么”常用到矩阵的秩；“一种方法”即初等变换，“求什么”常用到矩阵的初等变换。



本书适用于参加数学一、数学二、数学三的考生，其内容针对不同分类要求的部分给出了相应说明。本人借鉴和参考了若干国内外的优秀著作，在此向这些作者表示衷心的感谢！

由于本人水平有限，本书仍有很多地方需要改进和提高，恳请广大读者提出宝贵的意见和建议！

最后，衷心祝愿广大考生考上自己理想的学校！

李 林

2025 年 3 月

目 录

第一章 行列式	1
第一节 行列式的概念与性质	1
第二节 克拉默法则	11
第三节 讨论 $ A =0$ 的问题	12
习题演练	14
习题演练解答	15
第二章 矩 阵	20
第一节 矩阵的概念与运算	20
第二节 伴随矩阵	21
第三节 可逆矩阵	23
第四节 矩阵的秩	24
第五节 初等矩阵	25
第六节 矩阵方程	37
习题演练	40
习题演练解答	42
第三章 向 量	50
第一节 向量及其运算	50
第二节 向量组的线性相关性和线性表示	51
第三节 相关性常用结论	63
第四节 n 维向量空间(仅数学一要求)	69
习题演练	74
习题演练解答	76
第四章 线性方程组	83
习题演练	101
习题演练解答	103
第五章 相似矩阵	111
第一节 特征值与特征向量	111
第二节 矩阵相似	116
第三节 实对称矩阵	127
第四节 确定参数	132
习题演练	135
习题演练解答	137
第六章 二次型	148
第一节 二次型的概念及其标准形	148
第二节 正定二次型与正定矩阵	158
习题演练	165
习题演练解答	167

第一章 行列式



扫码关注
免费网课+无水印PDF

考试要求

1. 了解行列式的概念, 掌握行列式的性质.
2. 会使用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.
3. 会使用克拉默法则.

第一节 行列式的概念与性质

内容与方法提要

一、概 念

1. 行列式的定义

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

其中 $\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 表示排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 的逆序数, 即 $|A|$ 是所有在不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和. 它由 $n!$ 项组成, 其中带正号与带负号的项各占一半. 当逆序数 $\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 为偶数时, 该项的前面带正号; 当逆序数 $\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 为奇数时, 该项的前面带负号.

例如 在 6 阶行列式中, $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 项的符号为

$$(-1)^{\tau(4,3,1,2,6,5)} = (-1)^6 = 1.$$

故该项应带正号.

2. 行列式按行(列)展开公式

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}, \end{aligned}$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} 为 $|A|$ 中去掉第 i 行及第 j 列元素后的 $n-1$ 阶行列式.

说明 $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0$ ($i \neq k$), 即一行与另一行对应元素的代数余子式的乘积之和为零.

此外, A_{ij} 与 a_{ij} 的取值无关. 例如, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 第 1 行元素的代数余子式与 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 第 1 行元素的代数余子式是相同的.

3. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式的值相等, 即 $|A| = |A^T|$.

(2) 若某行(列)有公因数 k , 则可将 k 提到行列式符号外.

(3) 两行(列)互换, 行列式的值变号. 特别地, 如果两行(列)元素对应相等或成比例, 则行列式的值为零.

(4) 将某行(列)的 k 倍加到另一行, 行列式的值不变.

(5) 若某行(列)所有元素都是两个数的和, 则将其写成两个行列式之和. 例如,

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

说明 行列式的性质是计算行列式的基础.

二、重要的行列式及定理

1. 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 三角形行列式

$$\text{主: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\text{副: } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

3. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

4. 分块行列式

设 A, B 分别为 m 与 n 阶矩阵, 则

$$(1) \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|.$$

$$(2) \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|.$$

$$(3) \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|.$$

5. 拉普拉斯定理

行列式可按任何 k ($1 \leq k \leq n-1$) 行(列)展开, 即在 n 阶行列式 $|A|$ 中, 可以任意选定 k 行(列), 则含于此 k 行(列)中的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和为 $|A|$ 的值.

说明 拉普拉斯定理是行列式按行(列)展开公式的推广.

例如 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, 按第 3, 4 行展开为

$$\begin{aligned} D_4 = & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由拉普拉斯定理容易证明下列结论:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|, \\ \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 分别为 $n \times n, m \times m, n \times m$ 矩阵.

三、有关行列式的重要公式

- (1) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$.
- (2) 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是同型方阵, 则 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$.
- (3) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.
- (4) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 则 $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$.
- (5) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵, 且 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- (6) 若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似, 则 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$.

说明 ① $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 即 $\mathbf{A}^* = (A_{ji})_{n \times n}$, 其中 A_{ji} 是 $\mathbf{A}$ 中 a_{ji} 的代数余子式.

② 伴随矩阵满足公式

$$\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{E}.$$

③ $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ 的证明见第二章第二节“内容与提要”.

典型例题分析

题型一 计算具体行列式

计算行列式时一般利用行列式的性质, 先将其行(列)的元素尽量化为零, 再按行(列)展开. 此外, 行(列)加法、加边法、拆项法、递推法等也是常用方法. 一些特殊的行列式是常考点, 如箭形(爪形)行列式、三对角行列式等.

例 1 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解 考查 D_n 的转置行列式 D_n^T , 转化为范德蒙德行列式, 即

$$\begin{aligned}
 D_n = D_n^T &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i) \\
 &= n! (2-1)(3-1)\cdots(n-1) \cdot (3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)] \\
 &= n! (n-1)! (n-2)! \cdots 2! \cdot 1!.
 \end{aligned}$$

例 2 计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 行列式 D_4 形似箭形行列式, 有时也称爪形行列式. 利用主对角线元素将第 1 行(或第 1 列)的部分元素化为零, 即

$$\begin{aligned}
 D_4 &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{三角形}}{\text{行列式}} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times 2 \times 3 \times 4 = -2.
 \end{aligned}$$

注 ① 一般地, 箭形行列式

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= \begin{vmatrix} \lambda_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i a_i}{\lambda_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} \\
 &= \left(\lambda_0 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i a_i}{\lambda_i}\right) \cdot \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (\lambda_i \neq 0; i = 1, 2, \cdots, n).
 \end{aligned}$$

若 $\lambda_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $D_{n+1} = 0$.

② 其他箭形行列式 $\begin{vmatrix} & & & & \\ & \diagdown & & & \\ & & \diagup & & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & \diagup \end{vmatrix}$ 也可类似地计算.

例 3 计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 所给行列式是三对角行列式, 一般可用递推法. 将 D_4 按第 1 列展开, 得

$$D_4 = 4 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4D_3 - 3D_2,$$

故 $D_4 - D_3 = 3(D_3 - D_2) = 3^2(D_2 - D_1) = 3^2 \times (13 - 4) = 3^4$, 从而

$$\begin{aligned} D_4 &= D_3 + 3^4 = D_2 + 3^3 + 3^4 = D_1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 \\ &= 4 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121. \end{aligned}$$

例 4 证明: $D_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = (n+1)a^n.$

证法 1 D_n 为三对角行列式, 用递推法. 当 $n \geq 2$ 时, 按第 1 列展开, 得

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2},$$

故

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = a(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ &= a^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - aD_1) = a^n. \end{aligned}$$

从而当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} D_n &= a^n + aD_{n-1} = a^n + a(a^{n-1} + aD_{n-2}) \\ &= 2a^n + a^2D_{n-2} = \cdots = (n-2)a^n + a^{n-2}D_2 \\ &= (n-1)a^n + a^{n-1}D_1 \\ &= (n-1)a^n + a^{n-1} \cdot 2a = (n+1)a^n. \end{aligned}$$

显然当 $n = 1$ 时, $D_1 = 2a$, 故 $D_n = (n+1)a^n$ 对所有正整数均成立.

证法 2 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时, $D_1 = 2a$, 结论成立; 当 $n = 2$ 时, $D_2 = 3a^2$, 结论成立.

假设对小于 n 的情形结论成立. 将 D_n 按第 1 列展开, 得

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = 2a \cdot na^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2} = (n+1)a^n,$$

故 $D_n = (n+1)a^n$ 对所有正整数均成立.

例 5 设 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$, 计算行列式 $|\lambda E - A|$.

解

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix},$$

利用加边法, 将其化为箭形行列式, 即

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda - a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ 0 & -a_2 a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftarrow r_1 + \sum_{i=2}^n r_i]{(i=1,2,\cdots,n)} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}.$$

当 $\lambda \neq 0$ 时, $|\lambda E - A| = \lambda^n \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\lambda}\right)$;

当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda E - A|$ 中各行成比例, 故 $|A| = 0$.

注 将行列式添加一行和一列, 使其升阶后的行列式的值不变, 称为加边法. 加边法常用于计算除主对角线外, 各行(列) 对应元素分别都有相同元素的行列式.

例 6 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} \quad (b_i \neq 0).$

解 D_n 中除主对角线外, 各列元素分别相同, 可用加边法, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

该行列式为箭形行列式, 故可求得 $D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}\right) \prod_{j=1}^n b_j$.

例 7 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

解 将第 2, 3, 4 列都加到第 1 列, 得

$$D = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x \cdot (-1)^{\frac{1}{2} \times 4 \times (4-1)} x^3 = x^4.$$

例 8 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

解法 1 交换第 2, 4 两列、第 2, 4 两行将其化为分块对角形行列式, 得

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3). \end{aligned}$$

解法 2 直接按第 1 行展开, 得

$$\begin{aligned} D_4 &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3). \end{aligned}$$

注 此形(类)行列式也称“品”字形行列式.

例 9 计算 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & \ddots & & & \ddots \\ b & & & & a \end{vmatrix}_{2n}$.

解法 1 将第 $n+1, n+2, \dots, 2n$ 行分别加到第 $n, n-1, \dots, 1$ 行, 再提取公因式 $(a+b)$, 得

$$D_{2n} = (a+b)^n \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & 1 & 1 \\ & & b & a \\ & \ddots & & & \ddots \\ b & & & & a \end{vmatrix} = (a+b)^n \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & a-b \\ & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & & & a-b \end{vmatrix}$$

三角形行列式 $(a+b)^n (a-b)^n = (a^2 - b^2)^n$.

解法 2 用递推法. 当 $n=1$ 时, $D_2 = a^2 - b^2$; 当 $n \geq 2$ 时, 按第 1 行展开, 得

$$D_{2n} = a^2 D_{2n-2} - b^2 D_{2n-2} = (a^2 - b^2) D_{2n-2} \\ = \cdots = (a^2 - b^2)^{n-1} D_2 = (a^2 - b^2)^n,$$

故 $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$.

例10 计算 $D_n = \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & \lambda + a_n \end{vmatrix}$.

解 当 $n = 1$ 时, $D_1 = \lambda + a_1$; 当 $n \geq 2$ 时, 用拆项法, 得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & \cdots & 0 + a_n \\ a_1 & \lambda + a_2 & \cdots & 0 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & \lambda + a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_1 & \lambda + a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &= \lambda D_{n-1} + \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &= \lambda D_{n-1} + a_n \lambda^{n-1} = \lambda (\lambda D_{n-2} + a_{n-1} \lambda^{n-2}) + a_n \lambda^{n-1} \\ &= \lambda^2 D_{n-2} + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_n \lambda^{n-1} = \cdots \\ &= \lambda^{n-1} D_1 + a_2 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_n \lambda^{n-1} \\ &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_n \lambda^{n-1} \\ &= \lambda^n + \lambda^{n-1} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n). \end{aligned}$$

注 本题可看作是例 6 的特殊情形, 因此也可用加边法. 由于各行元素相加都相等, 因此也可将第 $2, 3, \cdots, n$ 列元素都加到第 1 列进行求解.

例11 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 D_n 中的第 1, n 行都只有两个元素非 0, 选取含 0 较多的行(列)展开是计算行列式的基本方法. 本题按第 n 行展开, 当 $n = 1$ 时, $D_1 = a_1$; 当 $n \geq 2$ 时, 有

$$D_n = x \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + a_n \cdot (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix},$$

故

$$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n.$$

由递推关系,得

$$D_{n-1} = xD_{n-2} + a_{n-1}, D_{n-2} = xD_{n-3} + a_{n-2}, \cdots, D_2 = a_1x + a_2.$$

将这些式子分别乘以 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-2}$ 再相加,得

$$D_n = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

例12 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -2x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$, 求 $f(x)$ 中 x^3 的系数.

解 由行列式的定义知, x 的最高次数为主对角线元素的乘积, 即 $3x^4$, 要想求 x^3 的系数, 只需在 $f(x)$ 展开式中找到含有 x^3 的项, 注意到每项应取自不同行、不同列的 4 个元素的乘积, 且须有 3 个带 x 的元素. 考虑 $f(x)$ 只有一项 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 符合要求, 即

$$(-1)^{r(2,1,3,4)}(-2x) \cdot 1 \cdot 3x \cdot x = 6x^3,$$

故 x^3 的系数为 6.

题型二 计算抽象行列式

例13 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $|A| = 2, |B| = -3$. 求:

(1) $|2A^*B^T|$;(2) $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}|$.

解 (1) 利用行列式的重要公式, 得

$$\begin{aligned} |2A^*B^T| &= 2^n |A^*| |B^T| = 2^n |A|^{n-1} |B| \\ &= 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot (-3) = -6 \cdot 4^{n-1}. \end{aligned}$$

(2) 利用 $AA^* = A^*A = |A|E$, 得

$$A^* = |A|A^{-1} = 2A^{-1}, \quad B^* = |B|B^{-1} = -3B^{-1},$$

故

$$\begin{aligned} |A^{-1}B^* - A^*B^{-1}| &= |A^{-1}(-3B^{-1}) - 2A^{-1}B^{-1}| = |-5A^{-1}B^{-1}| \\ &= (-5)^n |A^{-1}| |B^{-1}| = (-5)^n |A|^{-1} \cdot |B|^{-1} \\ &= (-5)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^n}{6}. \end{aligned}$$

例14 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma$ 均是 4 维列向量, 且 $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)| = C_1, |(\beta + \gamma, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)| = C_2$, 则 $|(2\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| =$ _____.

解 利用行列式的性质, 将 $|(\beta + \gamma, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)|$ 拆成两个行列式之和, 得

$$|(\beta + \gamma, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)| = |(\beta, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)| + |(\gamma, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)| = C_2.$$

又因为 $|(\beta, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)| = |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)| = C_1$, 所以

$$|(\gamma, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)| = C_2 - C_1,$$

从而有

$$|(2\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = -2 |(\gamma, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)| = 2(C_1 - C_2).$$

例15 设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, 则 $|A| =$ _____.

解法1 利用已知条件, 得

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1),$$

再由行列式的性质, 得

$$\begin{aligned} |A| |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| &= |(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)| \\ &= 2 |(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)| \\ &= 2 |(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2)| \\ &= 2 |(\alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2)| = 2 |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)|. \end{aligned}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \neq 0$, 从而有 $|A| = 2$.

解法2 利用相似矩阵的行列式相等, 可得

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{记 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关, 知 } P \text{ 可逆, 故由 } AP = PB, \text{ 得 } P^{-1}AP = B,$$

即 A 与 B 相似, 故

$$|A| = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

例16 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 为非零矩阵, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i = 1, 2, 3)$, 则 $|A| =$ _____.

解 由 $a_{ij} = -A_{ij}$, 知 $A^T = -A^*$, 故

$$|A| = |A^T| = |-A^*| = (-1)^3 |A^*| = -|A|^{3-1} = -|A|^2,$$

即 $|A|(1 + |A|) = 0$, 解得 $|A| = 0$ 或 $|A| = -1$.

又由于 $A \neq O$, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 则

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0,$$

故 $|A| = -1$.

例17 设 4 阶矩阵 $A = (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 4 维列向量, 且 $|A| = 4, |B| = 1$, 求行列式 $|A + B|$ 的值.

解 先求矩阵 $A + B$, 再利用行列式的性质. 因为

$$A + B = (\alpha + \beta, \alpha_1 + \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_3) = (\alpha + \beta, 2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3),$$

所以

$$\begin{aligned} |A + B| &= 2^3 |(\alpha + \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \\ &= 8[|(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| + |(\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)|] \\ &= 8 \times (4 + 1) = 40. \end{aligned}$$

注 此例可以看出 $|A+B| \neq |A|+|B|$.

第二节 克拉默法则

内容与方法提要

当线性方程组的系数矩阵为方阵时,可考虑用克拉默法则进行求解.

(1) 对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则非齐次线性方程组有唯一解 $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$, 其中

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

即 D_i 表示用 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 替换 D 中第 i 列所得的行列式.

(2) 对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

当系数行列式 $D \neq 0$ 时,方程组只有零解;当系数行列式 $D = 0$ 时,方程组有非零解.

典型例题分析

例 1 设 3 阶矩阵 $B \neq O$, 且 B 的每一个列向量都是方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解向量,求 λ 的值.

解 由 $B \neq O$ 知, B 中至少有一个非零列向量, 故所给齐次线性方程组有非零解, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $\lambda = 1$.

例 2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq a_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 求线性方程组 $A^T x = b$ 的解.

解 方程组 $A^T x = b$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其系数行列式的转置为 n 阶范德蒙德行列式. 由 $a_i \neq a_j (i \neq j)$, 知 $D = |A^T| \neq 0$, 故方程组有唯一解, 从而可求得 $D_1 = D, D_2 = D_3 = \cdots = D_n = 0$ (两列成比例), 于是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D} = 0,$$

即 $x = (1, 0, \cdots, 0)^T$ 为所求方程组的唯一解.

第三节 讨论 $|A| = 0$ 的问题

内容与提要

当讨论 $|A| = 0$ 的问题时常用到矩阵的秩.

(1) 矩阵的秩: A 中非零子式的最高阶数称为 A 的秩, 记作 $r(A)$.

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 \neq 0$, 所以 $r(A) = 3$ (没有 4 阶子式).

(2) 有关矩阵 A 的秩的常用表达:

- ① $r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中至少有 r 阶子式不为 0, 且 A 中任意的 r 阶以上子式全为 0 (如果有).
- ② $r(A) < r \Leftrightarrow A$ 中任意的 r 阶及 r 阶以上子式全为 0.
- ③ $r(A) \leq r \Leftrightarrow A$ 中任意的 r 阶以上子式全为 0.
- ④ $r(A) > r \Leftrightarrow A$ 中至少有 $r+1$ 阶子式不为 0.
- ⑤ $r(A) \geq r \Leftrightarrow A$ 中至少有 r 阶子式不为 0.

(3) 设有 $A_{n \times n}$, 则 $\begin{cases} r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0, \\ r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0. \end{cases}$

(4) $A \neq O \Leftrightarrow r(A) \geq 1$.

(5) 讨论矩阵秩的常用方法. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 则:

① 利用矩阵秩的定义, 即讨论矩阵的子式.

② 利用方程组 $Ax = 0$ 有 $n - r(A)$ 个基础解.

③ $AB = O \Rightarrow \begin{cases} B \text{ 的列向量都是方程组 } Ax = 0 \text{ 的解,} \\ r(A) + r(B) \leq n. \end{cases}$

④ $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}, r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

说明 (a) 证明上述结论 ③.

将 B 按列分块为 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则由 $AB = O$, 可得

$$A\beta_1 = 0, A\beta_2 = 0, \dots, A\beta_n = 0,$$

故 B 的列向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 均是方程组 $Ax = 0$ 的解, 从而有

$$n - r(A) \geq r(B),$$

其中 $r(B)$ 表示向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的秩, 即 $r(A) + r(B) \leq n$.

一般地, $A_{n \times s} \cdot B_{s \times t} = O \Rightarrow r(A) + r(B) \leq s$.

(b) 证明: $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

利用方程组证明. 令

$$ABx = 0, \quad \text{①}$$

$$Bx = 0, \quad \text{②}$$

显然方程组 ② 的解都是方程组 ① 的解, 故

$$n - r(AB) \geq n - r(B),$$

即 $r(AB) \leq r(B)$. 又由于

$$r(AB) = r[(AB)^T] = r(B^T A^T) \leq r(A^T) = r(A),$$

故 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

(6) 证明 $|A| = 0$ 的常用方法:

① 利用秩 $r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$.

② 利用齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$.

③ 反证法.

④ 利用 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

典型例题分析

例 1 设 $A^2 = A$, $A \neq E$, 证明: $|A| = 0$.

证法 1 用反证法.

若 $|A| \neq 0$, 则 A 可逆. 于是 $A = A^{-1}A^2 = A^{-1}A = E$, 与 $A \neq E$ 矛盾, 故 $|A| = 0$.

证法 2 利用方程组.

由 $A^2 = A$, 有 $A(A - E) = O$, 即 $A - E$ 的每一列都是 $Ax = 0$ 的解. 又由 $A - E \neq O$, 知 $Ax = 0$ 有非零解, 故 $|A| = 0$.

证法 3 利用秩.

由 $A^2 = A$, 有 $A(A - E) = O$, 即 $A - E$ 的每一列都是 $Ax = 0$ 的解, 故

$$r(A - E) \leq n - r(A).$$

又由 $A - E \neq O$, 知 $r(A - E) > 0$, 故 $r(A) \leq n - r(A - E) < n$, 从而 $|A| = 0$.

例 2 设有 $A_{m \times n}, B_{n \times m}$, 则().

A. 当 $m > n$ 时, 必有 $|AB| \neq 0$

B. 当 $m > n$ 时, 必有 $|AB| = 0$

C. 当 $n > m$ 时, 必有 $|AB| \neq 0$

D. 当 $n > m$ 时, 必有 $|AB| = 0$

解 利用矩阵的秩讨论行列式. 由 $A_{m \times n} \cdot B_{n \times m} = (AB)_{m \times m}$ 可知

$$r(AB) \leq r(B) \leq \min\{m, n\},$$

故当 $m > n$ 时, $r(AB) \leq n < m$, 从而 $|AB| = 0$, B 选项正确.

例 3 设 A 是 3 阶矩阵, 且 $A, A-E, A+2E$ 均不可逆, 则 $|A-3E| =$ _____.

解 由已知, 有

$$|A| = 0, \quad |A-E| = 0, \quad |A+2E| = 0,$$

又由 $|\lambda E - A| = 0$, 知 λ 是 A 的特征值, 故 $0, 1, -2$ 是 A 的特征值, 从而 $A-3E$ 的特征值为 $-3, -2, -5$, 于是

$$|A-3E| = (-3) \times (-2) \times (-5) = -30.$$

习题演练

一、填空题

(1) 行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ _____.

(2) n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ _____.

(3) n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} =$ _____.

(4) n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} =$ _____.

(5) * (有难度) 设 $\alpha \neq \beta$, 则当 $n \geq 2$ 时, $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n \end{vmatrix} =$ _____.

(6) 设 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $A_{i2} (i = 1, 2, 3, 4)$ 为 D_4 中元素 a_{i2} 的代数余子式, 则 $3A_{12} + 7A_{22} +$

$4A_{32} + 8A_{42} =$ _____.

(7) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $A_{11} -$

$A_{12} =$ _____.

(8) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是 4 维列向量, 且 4 阶行列式 $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)| = m$, $|(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3)| = n$, 则 4 阶行列式 $|(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2)| =$ _____.

二、解答题

(1) 设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $|B|$.

(2) 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 求行列式 $|B^{-1} - E|$.

(3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$, 若 $|A| = 1$, 求行列式 $|B|$.

(4) 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $AA^T = E$, $|A| < 1$, 求 $|A + E|$.

(5) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3$, $|B| = 2$, $|A^{-1} + B| = 2$, 求 $|A + B^{-1}|$.

(6) 设 A 是 3 阶矩阵, α 为 3 维列向量, $P = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 为可逆矩阵, $B = P^{-1}AP$, 且 $A^3\alpha + 2A^2\alpha = 3A\alpha$, 求行列式 $|A + E|$.

(7) 求方程 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = 0$ 的根的个数.

(8) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, 求 $|B|$.

习题演练解答

一、填空题

(1) $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$.

解 按第 1 列展开, 有

$$D_4 = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \left[\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right] + 4 \\
 &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.
 \end{aligned}$$

(2) $2^{n+1} - 2$.**解** 当 $n=1$ 时, $D_1=2$; 当 $n \geq 2$ 时, 将 D_n 按第 1 行展开, 有

$$\begin{aligned}
 D_n &= 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ & & & -1 \end{vmatrix} \\
 &= 2D_{n-1} + 2(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2,
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 D_n &= 2D_{n-1} + 2 = 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2D_{n-2} + 2^2 + 2 \\
 &= \cdots = 2^{n-1}D_1 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 \\
 &= 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 = 2^{n+1} - 2.
 \end{aligned}$$

综上所述, $D_n = 2^{n+1} - 2$.(3) $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$.**解** 当 $n=1$ 时, $D_1 = x + a_1$; 当 $n \geq 2$ 时, 按第 1 列展开, 得

$$D_n = x \cdot D_{n-1} + (-1)^{1+n} a_n \cdot (-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n, \quad \text{①}$$

由递推关系, 有

$$D_{n-1} = xD_{n-2} + a_{n-1}, \cdots, D_3 = xD_2 + a_3, D_2 = xD_1 + a_2,$$

依次将各项代入式 ①, 得

$$D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

综上所述, $D_n = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$.(4) $[x + (n-1)a](x-a)^{n-1}$.**解** 用行加法, 即各行加到第 1 行, 再提取公因式, 得

$$\begin{aligned}
 D_n &= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\
 &= [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

(5) $\frac{\alpha \prod_{i=1}^n (x_i - \beta) - \beta \prod_{i=1}^n (x_i - \alpha)}{\alpha - \beta}$.**解** 将最后 1 列元素拆成 2 个数相加, 如 $x_n = (x_n - \alpha) + \alpha$, 则 D_n 可拆成 2 个行列式之和, 即

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n - \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - \alpha)D_{n-1} + \alpha \begin{vmatrix} x_1 - \beta & \alpha - \beta & \alpha - \beta & \cdots & \alpha - \beta & 1 \\ 0 & x_2 - \beta & \alpha - \beta & \cdots & \alpha - \beta & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

故

$$D_n = (x_n - \alpha)D_{n-1} + \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - \beta). \quad (1)$$

由于 $D_n^T = D_n$, 故将式 (1) 中的 α 换成 β , 将 β 换成 α , 得

$$D_n = (x_n - \beta)D_{n-1} + \beta \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - \alpha), \quad (2)$$

求解式 (1) 和式 (2), 得

$$D_n = \frac{\alpha \prod_{i=1}^n (x_i - \beta) - \beta \prod_{i=1}^n (x_i - \alpha)}{\alpha - \beta}.$$

(6) 0.

解 此题是已知行列式 $D = | (a_{ij}) |$ 、代数余子式 A_{ij} 和 n 个数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 求和式 $\sum_{j=1}^n k_j A_{ij}$

或 $\sum_{i=1}^n k_i A_{ij}$.

(1) 上述和式均表示某个行列式, 记为 $\bar{D}$, 其第 i 行或第 j 列元素为 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 因此将 D 的第 i 行元素或第 j 列元素改为 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 即为 $\bar{D}$, 再计算 $\bar{D}$, 即可得所求的和式.

(2) 若 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 为 D 中某行但不是第 i 行元素, 或某列但不是第 j 列元素, 则上述和式的值为 0, 原因是

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} (i = 1, 2, \dots, n) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} (j = 1, 2, \dots, n),$$

当 $i \neq k$ 时, $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$; 当 $j \neq k$ 时, $\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0$.

由于 $A_{i2} (i = 1, 2, 3, 4)$ 为 D 中元素 a_{i2} 的代数余子式, 故将 D 中第 2 列元素依次换成 3, 7, 4, 8, 即可得

$$3A_{12} + 7A_{22} + 4A_{32} + 8A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

(7) -2.

解 由已知, 有

$$A_{11} - A_{12} = | \mathbf{A} | = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

(8) $n - m$.

解 利用行列式的性质, 有

$$\begin{aligned} | (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2) | &= | (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1) | + | (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2) | \\ &= - | (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1) | - | (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2) | \end{aligned}$$

$$= -m + |(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3)| = n - m.$$

二、解答题

(1) 解 由已知, 有 $(A^2 - E)B = A + E$, 故

$$(A + E)(A - E)B = A + E.$$

又由 $A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 知 $A + E$ 可逆, 故 $(A - E)B = E$, 从而 $|A - E| |B| = 1$. 而

$$|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

故 $|B| = \frac{1}{2}$.

(2) 解 由 $A \sim B$, 知 B 与 A 有相同的特征值, 故 B 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 从而 B^{-1} 的特征值为 2, 3, 4, 5, $B^{-1} - E$ 的特征值为 1, 2, 3, 4, 于是有

$$|B^{-1} - E| = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

(3) 解 因为

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

所以

$$|B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 |A| = 2 \times 1 = 2.$$

(4) 解 由于

$$\begin{aligned} |A + E| &= |A + AA^T| = |A(E + A^T)| \\ &= |A| |(E + A)^T| = |A| |E + A|, \end{aligned}$$

且由 $AA^T = E$, 知 $|A| |A^T| = 1$, 即 $|A|^2 = 1$, 又由 $|A| < 1$ 知, $|A| = -1$, 故

$$|A + E| = -|A + E|,$$

即 $|A + E| = 0$.

(5) 解

$$\begin{aligned} |A + B^{-1}| &= |EA + B^{-1}E| = |(B^{-1}B)A + B^{-1}(A^{-1}A)| \\ &= |B^{-1}(B + A^{-1})A| = |B^{-1}| |B + A^{-1}| \cdot |A| \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3. \end{aligned}$$

(6) 解 由 $B = P^{-1}AP$ 知, $AP = PB$, 故

$$\begin{aligned} AP &= A(\alpha, A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha) \\ &= (A\alpha, A^2\alpha, 3A\alpha - 2A^2\alpha) \\ &= (\alpha, A\alpha, A^2\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = PB, \end{aligned}$$

从而有 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 于是

$$\begin{aligned} |A+E| &= |PBP^{-1} + PP^{-1}| = |P| |B+E| |P^{-1}| \\ &= |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4. \end{aligned}$$

(7) **解** 只要先计算 $f(x)$, 再根据 $f(x)$ 是 x 的几次多项式即可判断. 将第 1 列乘以 (-1) 分别加到第 2, 3, 4 列, 得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}.$$

再将第 2 列加到第 4 列, 得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = 5x(x-1),$$

故 $f(x) = 0$ 有两个实根.

(8) **解** 利用公式 $AA^* = A^*A = |A|E$, 在已知等式两端右乘 A , 得

$$ABA^*A = 2BA^*A + A,$$

即

$$|A| \cdot AB - 2|A| \cdot B = A,$$

又因为 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$, 所以 $3AB - 6B = A$, 即

$$3(A - 2E)B = A. \quad \text{①}$$

在式 ① 两端取行列式, 得

$$|3(A - 2E)| \cdot |B| = 27 |A - 2E| \cdot |B| = |A| = 3,$$

又由于 $|A - 2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$, 故 $|B| = \frac{1}{9}$.

第二章 矩 阵

考试要求

1. 理解矩阵的概念, 了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.
2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律, 了解方阵的幂及方阵乘积的行列式的性质.
3. 理解逆矩阵的概念, 掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件, 理解伴随矩阵的概念, 会用伴随矩阵求逆矩阵.
4. 理解矩阵初等变换的概念, 了解初等矩阵的性质和矩阵等价的观念, 理解矩阵的秩的概念, 掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.
5. 了解分块矩阵及其运算.

第一节 矩阵的概念与运算

内容与方法提要

一、矩阵的概念

1. 定 义

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵. 矩阵是一个由 $m \times n$ 个元素构成的表格, 记作 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

2. 特殊矩阵

$$(1) \text{ 单位矩阵: } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 转置矩阵: 将 A 的行与列互换后所得的矩阵, 称为 A 的转置矩阵, 记作 A^T .

(3) 对称矩阵: 若 $A^T = A$, 即 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称 A 为对称矩阵; 若 $A^T = -A$, 即 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称 A 为反对称矩阵.

(4) 正交矩阵: 设 A 为 n 阶矩阵, 若 $A^T A = A A^T = E$, 则称 A 为正交矩阵.

(5) 伴随矩阵: $A^* = (A_{ji})_{n \times n}$, $A_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot M_{ji}$, 其中 M_{ji} 为 $|A|$ 中去掉第 j 行、第 i 列后的 $n-1$ 阶子式.

$$(6) \text{ 数量矩阵: } kE = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}.$$

二、矩阵的加法、减法、数乘和乘法运算

1. 矩阵的加法、减法

$$A \pm B = (a_{ij})_{m \times n} \pm (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}.$$

2. 矩阵的数乘

设 $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$, 则 $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$ (k 为常数).

3. 矩阵的乘法

设 $A_{m \times n} = (a_{ik})_{m \times n}$, $B_{n \times s} = (b_{kj})_{n \times s}$, 则 $AB = C_{m \times s} = (c_{ij})_{m \times s}$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, s).$$

说明 ① 矩阵乘法没有交换律.

因为 $AB \neq BA$, 但 $AE = EA$, 所以

$$(A + E)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1} E + \cdots + C_n^k A^{n-k} E^k + \cdots + E^n.$$

② $AB = O \nRightarrow A = O$ 或 $B = O$.

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \neq O$, 但 $AB = O$.

③ 矩阵乘法没有消去律. $AB = AC$ 且 $A \neq O \nRightarrow B = C$.

④ 设 A, B 均为方阵, 则 $A \neq B \nRightarrow |A| \neq |B|$.

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $A \neq B$, 但 $|A| = |B| = 1$.

⑤ 由于向量可以看成特殊的矩阵, 故向量的加法、减法、数乘和乘法与矩阵的相应运算是一样的.

例如 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则

$$\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^T\beta = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

三、关于矩阵转置的运算公式

$$(1) (A^T)^T = A.$$

$$(2) (kA)^T = kA^T.$$

$$(3) (AB)^T = B^T A^T.$$

$$(4) (A \pm B)^T = A^T \pm B^T.$$

第二节 伴随矩阵

内容与方法提要

1. 定 义

设 A 是 n 阶矩阵, $A^* = (A_{ji})_{n \times n}$ 称为 A 的伴随矩阵.

2. 公 式

$$(1) (AB)^* = B^* A^*.$$

$$(2) (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

$$(3) (A^T)^* = (A^*)^T.$$

$$(4) AA^* = A^*A = |A|E.$$

当 $|A| \neq 0$ 时, $A \cdot \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} \cdot A = E$, 则 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

另外, $\frac{A}{|A|} \cdot A^* = A^* \cdot \frac{A}{|A|} = E$, 则 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$.

说明 ① 证明公式(4).

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E. \end{aligned}$$

② 对公式 $AA^* = A^*A = |A|E$, 可将 A 替换成任何方阵.

例如 设 $A_{n \times n}$ 可逆, 求 $(A^{-1})^*$, $(A^*)^*$, $(kA)^*$.

解 由 $A^{-1} \cdot (A^{-1})^* = |A^{-1}|E = |A|^{-1}E$ 知

$$(A^{-1})^* = |A|^{-1}A = \frac{A}{|A|},$$

因此可知 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, 即“ $*$ ”运算与“ -1 ”运算可以交换.

由 $A^*(A^*)^* = |A^*|E = |A|^{n-1}E$ 知

$$(A^*)^* = |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{A}{|A|} = |A|^{n-2}A.$$

由 $(kA)(kA)^* = |kA|E = k^n|A|E$ 知

$$(kA)^* = (kA)^{-1} \cdot k^n|A| = k^n \cdot \frac{1}{k} |A| A^{-1} = k^{n-1}A^*.$$

③ 设 A 是 n 阶矩阵, 证明: $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证 由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 知

$$|A||A^*| = ||A|E| = |A|^n.$$

当 $|A| \neq 0$ 时, $|A^*| = |A|^{n-1}$;

当 $|A| = 0$ 时, $A^*A = |A|E = O$.

若 $A \neq O$, 则由 A 的列向量是方程组 $A^*x = O$ 的解知, $A^*x = O$ 有非零解, 故 $|A^*| = 0$, 由此可得 $|A^*| = |A|^{n-1} = 0$.

若 $A = O$, 则 $A^* = O$, 故 $|A^*| = 0$, 所以 $|A^*| = |A|^{n-1} = 0$.

3.2 阶矩阵的伴随矩阵

设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, 则 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

比较 A 与 A^* , 简单地说, A^* 可由 A 的“主对角线对调、副对角线变号”得到, 且

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

4. 伴随矩阵的秩

设 A 是 n 阶矩阵, 则 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$

说明 ① $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0 \Leftrightarrow r(A^*) = n.$

② $r(A) = n-1 \Leftrightarrow |A| = 0$ 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0

$$\Leftrightarrow AA^* = |A|E = O \text{ 且存在 } A_{ji} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r(A) + r(A^*) \leq n \text{ 且 } A^* \neq O$$

$$\Leftrightarrow r(A^*) = 1.$$

③ $r(A) < n-1 \Leftrightarrow A$ 的任意 $n-1$ 阶子式全为 0

$$\Leftrightarrow A^* \text{ 的所有元素 } A_{ji} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^* = O \Leftrightarrow r(A^*) = 0.$$

从上面的结论可以看出

$$r(A) \begin{cases} = n, & r(A^*) = n, \\ = n-1, & r(A^*) = 1, \\ < n-1, & r(A^*) = 0. \end{cases}$$

第三节 可逆矩阵

内容与提要

1. 可逆矩阵的定义

设 A 是 n 阶矩阵, 若存在 n 阶矩阵 B , 使得 $AB = BA = E$, 则称 B 是 A 的逆矩阵, 记为 $B = A^{-1}$.

说明 当 A, B 是同阶的方阵时, 由 $AB = E$ 可推得 $BA = E$. 但对非方阵 A, B , 由 $AB = E$ 不一定有 $BA = E$.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 可逆的充分必要条件

设 A 是 n 阶矩阵, 则 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

3. 求矩阵的逆矩阵的常用方法

(1) 定义法: 利用 $AB = BA = E$.

(2) 初等行变换: $(A | E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E | A^{-1})$.

例如 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 对 $(A | E)$ 进行初等行变换, 有

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right),$$

$$\text{故 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(3) 利用伴随矩阵有 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

$$(4) \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

特别地,

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & \\ & a_1 & \\ & & a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & \frac{1}{a_3} \\ & \frac{1}{a_2} & \\ \frac{1}{a_1} & & \end{pmatrix},$$

其中 a_1, a_2, a_3 均不为 0.

(5) 分解求逆,即利用因式分解及可逆的定义求逆矩阵.

例如 设 $A^3 = 2E$, 求 $(A+E)^{-1}$.

解 由 $A^3 = 2E$, 得 $A^3 + E = 3E$, 即

$$(A+E)(A^2 - A + E) = 3E,$$

故 $(A+E) \cdot \frac{1}{3}(A^2 - A + E) = E$, 从而

$$(A+E)^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - A + E).$$

4. 逆矩阵的运算公式

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$(2) (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} (k \neq 0).$$

$$(3) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

$$(4) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

$$(5) |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

$$(6) (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n.$$

第四节 矩阵的秩

内容与提要

矩阵的秩是考研数学线性代数部分的必考点,下面是一些常用的结论和方法.

(1) 设矩阵 $A_{m \times n}$, 若 A 中非零子式的最高阶数为 r , 则称 A 的秩为 r , 记作 $r(A) = r$.

由秩的定义知, $r(A) \leq m$ 且 $r(A) \leq n$, 即 $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

(2) 将 $A_{m \times n}$ 写成行向量组的形式 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, 写成列向量组的形式 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 则

A 的行向量组的秩 = A 的列向量组的秩 = $r(A)$.

(3) 对于具体矩阵, 可利用初等行变换, 将 A 化为阶梯形, 则阶梯形中非零的行数就是矩阵的秩.

例如 由于

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $r(A) = 2$.

$$(4) \quad r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T).$$

说明 证明 $r(A) = r(A^T A)$, 只需证

$$Ax = 0 \quad ①$$

与

$$A^T Ax = 0 \quad ②$$

同解. 显然, 方程组 ① 的解是方程组 ② 的解, 所以只需证方程组 ② 的解也是方程组 ① 的解即可.

在 $A^T Ax = 0$ 两边同时左乘 x^T , 得

$$x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax) = 0.$$

由于 Ax 为实列向量, 且 $(Ax)^T (Ax)$ 为列向量 Ax 的内积, 故

$$(Ax)^T (Ax) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0,$$

从而方程组 ② 的解也是方程组 ① 的解, 于是 $r(A) = r(A^T A)$.

同理可证 $r(A^T) = r(AA^T)$.

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $P_{m \times m}$ 与 $Q_{n \times n}$ 均可逆, 则

$$r(PAQ) = r(AQ) = r(PA) = r(A),$$

即可逆矩阵乘以矩阵 A 不改变 A 的秩.

说明 证明: 当 P 可逆时, $r(PA) = r(A)$.

利用 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, 有

$$r(PA) \leq r(A) = r(EA) = r(P^{-1}PA) \leq r(PA),$$

故 $r(PA) = r(A)$.

例如 设 $A_{4 \times 3}$, 且 $r(A) = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $r(AB)$.

解 由 $|B| = 12 \neq 0$ 知, B 可逆, 故 $r(AB) = r(A) = 2$.

(6) 设 A, B 是同型矩阵, 则 $|r(A) - r(B)| \leq r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$.

$$(7) \quad r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \leq r(A) + r(B), \quad r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) = r(A) + r(B).$$

$$(8) \quad r(A + B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B).$$

(9) 若 A 经过有限次初等变换化为 B , 则称 A 与 B 等价.

(10) 若 A, B 是同型矩阵, 则 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

第五节 初等矩阵

内容与方法提要

1. 初等矩阵的定义

单位矩阵经过一次初等变换所得的矩阵, 称为初等矩阵.

例如

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(交换第 1, 2 行(列))}, \\
 \nearrow & & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(第 2 行(列) 乘以 2)}, \\
 \searrow & & \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(第 1 行乘以 -2 加到第 2 行或} \\
 & & \text{第 2 列乘以 -2 加到第 1 列).}
 \end{array}$$

(1) $E_{i,j}$ 表示单位矩阵 E 交换第 i 行与第 j 行(或交换第 i 列与第 j 列)所得的初等矩阵.

(2) $E_i(k)$ ($k \neq 0$) 表示单位矩阵 E 的第 i 行(或第 i 列)乘以非零常数 k 所得的初等矩阵.

(3) $E_{ij}(c)$ 表示单位矩阵 E 的第 j 行乘以 c 加到第 i 行(或第 i 列乘以 c 加到第 j 列)所得的初等矩阵.

2. 初等矩阵在乘法中的位置

(1) 初等矩阵左乘 A , 相当于对 A 作一次相应的初等行变换.

(2) 初等矩阵右乘 A , 相当于对 A 作一次相应的初等列变换.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 14 & 5 & 6 \\ 23 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

说明 利用初等矩阵将初等变换过程转化为用初等矩阵左乘、右乘矩阵, 从而建立等式关系.

3. 初等矩阵的逆矩阵

$$(1) E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}. \quad (2) E_i^{-1}(k) = E_i\left(\frac{1}{k}\right). \quad (3) E_{ij}^{-1}(c) = E_{ij}(-c).$$

4. 初等矩阵的行列式

$$(1) |E_{i,j}| = -1. \quad (2) |E_i(k)| = k (k \neq 0). \quad (3) |E_{ij}(c)| = 1.$$

说明 三种初等矩阵都是可逆矩阵.

5. 分块初等矩阵

矩阵的三类初等变换推广到分块矩阵上, 便得到分块矩阵初等变换, 该变换可通过分块初等矩阵乘法来实现.

第 1 类初等变换(倍加):

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ G & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ GA + C & GB + D \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O \\ G & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BG & B \\ C + DG & D \end{pmatrix}.$$

第 2 类初等变换(倍乘): 设 P 是可逆矩阵, 则

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix}.$$

第3类初等变换(互换):

$$\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}.$$

注 ① 这里 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的分块要保证上述乘法能够进行;

② 由于矩阵乘法不满足交换律,因此分块矩阵初等变换须区别左乘与右乘;

③ 分块矩阵初等变换在考研大纲中未明确要求,但在近年的考试中常出现.

典型例题分析

题型一 求 A^n

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

解 由矩阵 A 的秩 $r(A) = 1$ 知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2, 1, 3) \stackrel{\text{记}}{=} \alpha \beta^T,$$

故 $A^2 = \alpha \beta^T \alpha \beta^T = 13 \alpha \beta^T = 13A$, 从而有

$$\begin{aligned} A^n &= (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) \cdots (\alpha \beta^T) \\ &= \alpha (\beta^T \alpha)(\beta^T \alpha) \cdots (\beta^T \alpha) \beta^T \\ &= 13^{n-1} A = 13^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

说明 设 A 是 m 阶非零方阵, 则

$$r(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha \beta^T (\alpha, \beta \text{ 为非零列向量}) \Rightarrow A^n = k^{n-1} A,$$

其中 $k = \beta^T \alpha = \sum_{i=1}^m a_{ii} = \sum_{i=1}^m \lambda_i, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为 A 的特征值.

证 充分性: 若 $A = \alpha \beta^T, \alpha, \beta$ 为非零列向量, 则

$$r(A) = r(\alpha \beta^T) \leq \min\{r(\alpha), r(\beta)\} = 1,$$

又由 $A \neq O$ 知, $r(A) \geq 1$, 故 $r(A) = 1$.

必要性: 若 $r(A) = 1$, 则 A 的任意两行(或两列)都成比例. 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) = \alpha \beta^T,$$

其中 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$.

例 2 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{pmatrix}$, 且 $BA = O$, 其中 $B_{3 \times 3}$ 的秩大于 1, 求 A^n .

解 由 $BA = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq 3$. 又由于 $r(B) > 1$, 故

$$r(A) \leq 3 - r(B) \leq 1.$$

显然 $r(A) \geq 1$, 从而 $r(A) = 1$, 于是 A 的行向量成比例, 即

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{-1} = \frac{b}{3}, \quad \frac{2}{4} = \frac{-1}{c} = \frac{3}{6},$$

解得 $a = -2, b = -3, c = -2$. 由此可知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (2, -1, 3),$$

故

$$A^n = 9^{n-1} A = 9^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

例 3 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

解 由于

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $A^n = O (n \geq 3)$.

例 4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

解 直接求 A^n 不方便, 将 A 拆成两个矩阵之和, 即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} E + B.$$

由于

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $B^n = O (n \geq 3)$, 从而有

$$\begin{aligned} A^n &= (E+B)^n = E^n + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} n(n-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 4n^2 - n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 5 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $r(A^3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由于

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

故 $r(A^3) = 1$.

例 6 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

解 $r(A) = 2$. 先求 A^2 , 找出 A^n 的规律. 由

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A,$$

即 $A^2 = 2A$, 可知 $A^3 = 2A^2 = 2^2A, \dots, A^n = 2^{n-1}A$, 故 $A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例 7 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 则 $B^{2004} - 2A^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 一般地, 若 $B = P^{-1}AP$, 则由

$$B^2 = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^2P$$

可知, $B^n = P^{-1}A^nP$, 故 $B^{2004} = P^{-1}A^{2004}P$.

由已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 得 $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故 $A^{2004} = (A^2)^{1002} = E$, 从而 $B^{2004} = P^{-1}EP = E$,

于是

$$B^{2004} - 2A^2 = E - 2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

注 利用矩阵相似求 A^n 是常用方法之一.

例 8 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $AX + 2B = BA + 2X$, 求 X^4 .

解 由 $AX + 2B = BA + 2X$ 知

$$(A - 2E)X = B(A - 2E),$$

又由 $A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆知, $X = (A - 2E)^{-1}B(A - 2E)$, 故

$$\begin{aligned} X^4 &= (A - 2E)^{-1}B^4(A - 2E) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

题型二 伴随矩阵与可逆矩阵

例 9 设 A, B 为 2 阶矩阵, 且 $|A| = 2, |B| = 3$, 求 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*$.

解 求伴随矩阵时考虑利用公式 $AA^* = A^*A = |A|E$, 有

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} E = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| E = 6E,$$

故

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= 6 \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} O & \frac{B^*}{|B|} \\ \frac{A^*}{|A|} & O \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} O & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 10 设 A 是 $n (n \geq 3)$ 阶可逆方阵, 下列结论正确的是().

- ① $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ ② $(kA)^* = k^{n-1}A^* (k \neq 0)$
 ③ $(A^*)^T = (A^T)^*$ ④ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①②③④

解 利用伴随矩阵的公式 $AA^* = A^*A = |A|E$, 由 A 可逆知, $|A| \neq 0$, 故

$$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}.$$

由 $A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$ 知, $(A^{-1})^* = \frac{A}{|A|}$, 所以

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{A}{|A|},$$

故结论 ① 正确.

由 $(kA)(kA)^* = |kA|E$ 知,

$$\begin{aligned}(kA)^* &= k^n |A| \cdot (kA)^{-1} = k^n |A| \cdot \frac{1}{k} A^{-1} \\ &= k^{n-1} |A| A^{-1} = k^{n-1} A^*,\end{aligned}$$

故结论 ② 正确.

由 $A^T(A^T)^* = |A^T|E = |A|E$ 知, $(A^T)^* = |A|(A^T)^{-1}$, 又由

$$(AA^*)^T = (A^*)^T A^T = (|A|E)^T = |A|E$$

知, $(A^*)^T = |A|(A^T)^{-1}$, 故 $(A^*)^T = (A^T)^*$, 结论 ③ 正确.由 $A^*(A^*)^* = |A^*|E = |A|^{n-1}E$ 知

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= |A|^{n-1} (A^*)^{-1} = |A|^{n-1} (A^{-1})^* \\ &= |A|^{n-1} \cdot |A^{-1}| \cdot (A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2} A,\end{aligned}$$

故结论 ④ 正确. 所以选 D.

注 ① 对于公式 $AA^* = A^*A = |A|E$, 可以将 A 分别替换成 A^{-1}, kA, A^* 而衍生出更多的公式.② 三种运算 “ $*$ ” “ -1 ” “ T ” 是可交换的.③ 常用结论: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^* = B^* A^*$.

例11 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = (E+A)^{-1}(E-A)$, 求 $(E+B)^{-1}$.

解 求 $(E+B)^{-1}$, 一般利用 E 恒等变形化“和”为“积”, 即

$$\begin{aligned}(E+B)^{-1} &= [E + (E+A)^{-1}(E-A)]^{-1} \\ &= [(E+A)^{-1}(E+A) + (E+A)^{-1}(E-A)]^{-1} \\ &= [(E+A)^{-1}(E+A+E-A)]^{-1} \\ &= [2(E+A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(E+A)\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

例12 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 求 A^{-1} .

解 利用分块矩阵求逆. 令

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = (a_n),$$

则 $A = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$, 故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

例13 设 A, B 和 C 均是 n 阶矩阵, 其中 A, B 可逆, 求 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 (1) 设 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$. 则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_{11} + CX_{21} & AX_{12} + CX_{22} \\ BX_{21} & BX_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}.$$

由 $BX_{21} = O$ 及 B 可逆, 知 $X_{21} = O$; 由 $BX_{22} = E$, 知 $X_{22} = B^{-1}$; 由 $AX_{11} + CX_{21} = E$ 即 $AX_{11} = E$, 得 $X_{11} = A^{-1}$; 由 $AX_{12} + CX_{22} = O$, 得 $X_{12} = -A^{-1}CB^{-1}$, 故

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

(2) 用同样的方法, 可得

$$\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}.$$

例14 设 $A = E + \alpha\beta^T$, 其中 α, β 为 n 维列向量, 且 $\alpha^T\beta = 2$, 求 A^{-1} .

解 由已知, 先计算 A^2 . 由

$$\begin{aligned} A^2 &= (E + \alpha\beta^T)(E + \alpha\beta^T) = E + 2\alpha\beta^T + \alpha\beta^T\alpha\beta^T \\ &= E + 2\alpha\beta^T + \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T, \end{aligned}$$

且 $\beta^T\alpha = (\alpha^T\beta)^T = 2$ 可知

$$A^2 = E + 4\alpha\beta^T = 4E + 4\alpha\beta^T - 3E = 4A - 3E,$$

故 $A(A - 4E) = -3E$, 从而

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4E - A) = \frac{3E - \alpha\beta^T}{3} = E - \frac{1}{3}\alpha\beta^T.$$

注 ① 设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 若

$$f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n E = O,$$

则称 $f(A)$ 为 A 的化零多项式. 此题的关键是找出 A 的化零多项式 $A^2 = 4A - 3E$, 即 $A^2 - 4A + 3E = O$, 从而通过分解因式求出 A^{-1} .

② 计算 A^2 是考虑到 $r(\alpha\beta^T) = 1$.

③ 一般结论:

设 α, β 为 n 维列向量, 且常数 $k_1 \neq 0, \beta^T \alpha \neq \frac{1}{k_1}$, 则矩阵 $A = E - k_1 \alpha \beta^T$ 可逆, 且

$$A^{-1} = E - (k_1 + 2k_2 - k_1 k_2 \beta^T \alpha) \cdot \alpha \beta^T = E - k_2 \alpha \beta^T,$$

其中 $\beta^T \alpha = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

题型三 矩阵的秩

例15 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, A 是 3 阶方阵, $r(A) = 2, r(BA) = 1$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 先证 $r(B) < 3$, 用反证法. 假设 $r(B) = 3$, 则 B 可逆, 于是 $r(BA) = r(A)$, 这与已知矛盾, 故 $r(B) < 3$. 由于

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 3 & k+2 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{pmatrix},$$

故 $k = -1$.

例16 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: $r(A) + r(A - E) = n$.

证 由 $A - (A - E) = E$, 得

$$r(A) + r(A - E) \geq r(E) = n.$$

又由 $A^2 = A$ 知, $A(A - E) = O$, 故

$$r(A) + r(A - E) \leq n,$$

从而有 $r(A) + r(A - E) = n$.

例17 设 $A_{3 \times 3}$ 满足 $A^2 = E, A \neq \pm E$, 证明:

$$[r(A + E) - 1][r(A - E) - 1] = 0.$$

证 由已知 $A + E \neq O, A - E \neq O$, 故

$$r(A + E) \geq 1, \quad r(A - E) \geq 1. \quad \textcircled{1}$$

又由 $A^2 = E$, 有 $(A + E)(A - E) = A^2 - E = O$, 故

$$r(A + E) + r(A - E) \leq 3. \quad \textcircled{2}$$

由式 ① 和式 ②, 知 $r(A + E)$ 与 $r(A - E)$ 中至少有一个等于 1, 故有

$$[r(A + E) - 1][r(A - E) - 1] = 0.$$

例18 设 x 为 3 维单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则 $E - xx^T$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 设 $x = (a_1, a_2, a_3)^T$, 则 $x^T x = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, 记

$$A = xx^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

由已知 $r(A) = 1$, 得 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\lambda^2 = \lambda^3 - \lambda^2,$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 从而 $E - A$ 的特征值为 $0, 1, 1$. 又由于 $E - A$ 是对称矩阵, 故 $E - A \sim$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{从而 } r(E - A) = 2.$$

注 此题利用了相似矩阵有相同的秩这一结论.

例19 设 α, β 为 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$. 证明:

(1) 秩 $r(A) \leq 2$; (2) 若 α, β 线性相关, 则秩 $r(A) < 2$.

证 (1) 由 α, β 为 3 维列向量知, $\alpha\alpha^T$ 和 $\beta\beta^T$ 均为 3 阶矩阵. 又由于

$$r(\alpha\alpha^T) \leq \min\{r(\alpha), r(\alpha^T)\} \leq 1,$$

$$r(\beta\beta^T) \leq \min\{r(\beta), r(\beta^T)\} \leq 1,$$

即 $r(\alpha\alpha^T) \leq 1, r(\beta\beta^T) \leq 1$, 故

$$r(A) = r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq 2.$$

(2) 由已知 α, β 线性相关, 不妨设 $\alpha = k\beta$, 故

$$r(A) = r(\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) = r[(1+k^2)\beta\beta^T] = r(\beta\beta^T) \leq 1 < 2.$$

注 ① 这里利用了 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}, r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

② 若 α, β 为非零列向量, 则 $r(\alpha\beta^T) = 1$.

题型四 初等矩阵

例20 设 A 是 3 阶矩阵, 交换 A 的第 1 列与第 2 列得 B , 将 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 且 $AP = C$, 则 $P =$ _____.

解 将初等变换用初等矩阵表示. 由已知, 有

$$AE_{1,2} = B, \quad BE_{23}(1) = C,$$

故 $AE_{1,2}E_{23}(1) = C$, 从而

$$P = E_{1,2}E_{23}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例21 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 且 $|A| = 2, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{11} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31} + a_{33} \end{pmatrix}$, 求 $(A^*B)^{-1}$.

解 由 A 与 B 的关系知, $B = AE_{13}(3)$, 其中 $E_{13}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

由于 $A^*B = A^*AE_{13}(3) = |A|E_{13}(3) = 2E_{13}(3)$, 故

$$(A^*B)^{-1} = [2E_{13}(3)]^{-1} = \frac{1}{2}E_{13}^{-1}(3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例22 设3阶矩阵 A 满足 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$, 求一个可逆矩阵 A .

解 依题设, 有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换 1, 2 行}} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换 1, 3 行}} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix},$$

故

$$A = E_{1,3}E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例23 设 n 阶矩阵 A 可逆, 将 A 的第 i 行与第 j 行互换得 B , 试指出 A^{-1} 与 B^{-1} 、 A^* 与 B^* 、 A^T 与 B^T 的关系.

解 (1) 由已知, 有 $B = E_{i,j}A$, 两边取逆, 得

$$B^{-1} = (E_{i,j}A)^{-1} = A^{-1}E_{i,j}^{-1} = A^{-1}E_{i,j},$$

故 B^{-1} 可由 A^{-1} 的第 i 列与第 j 列互换得到.

(2) 由 $E_{i,j}E_{i,j}^* = |E_{i,j}|E$, 知 $E_{i,j}^* = |E_{i,j}|E_{i,j}^{-1} = -E_{i,j}$, 故

$$B^* = (E_{i,j}A)^* = A^*E_{i,j}^* = A^*(-E_{i,j}) = (-A^*)E_{i,j},$$

即 B^* 可由 $-A^*$ 交换第 i, j 列得到.

(3) $B^T = (E_{i,j} \cdot A)^T = A^T \cdot E_{i,j}^T = A^TE_{i,j}$,

即 B^T 可由 A^T 交换第 i, j 列得到.

例24 设有 $A_{3 \times 3}$, 且 $|A| = 3$. 若交换 A 的第1行与第2行得 B , 则 $|BA^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由已知, 有 $B = E_{1,2}A$, 故

$$\begin{aligned} |BA^*| &= |E_{1,2}AA^*| = |A| |E_{1,2}| = |3E_{1,2}| \\ &= 3^3 |E_{1,2}| = 27 \times (-1) = -27. \end{aligned}$$

例25 设 $A_{3 \times 3}, P_{3 \times 3}$ 满足 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 Q^TAQ .

解 先求出 Q 与 P 的关系. 由于

$$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PE_{21}(1),$$

故

$$\begin{aligned} Q^TAQ &= [PE_{21}(1)]^T A [PE_{21}(1)] = [E_{21}(1)]^T P^T A P E_{21}(1) \\ &= E_{12}(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} E_{21}(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

题型五 分块初等矩阵

例26 设 $A_{n \times n}$ 是可逆矩阵, 并有 $D_{n \times n}, B_{n \times n}, C_{n \times n}$.

(1) 证明: $r\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D), r\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D)$.

(2) 记 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 证明: 分块矩阵 M 可逆的充分必要条件是 $D - CA^{-1}B$ 可逆.

证 (1) 对 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$ 的第 1 行乘以 $-CA^{-1}$ 加到第 2 行, 有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

由初等变换不改变矩阵的秩知

$$r\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D).$$

同理可证

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D).$$

(2) 因为

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

由行列式乘法公式, 有

$$\begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix},$$

故

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

于是 M 可逆当且仅当 $|M| \neq 0$, 即 $|D - CA^{-1}B| \neq 0$ 当且仅当 $D - CA^{-1}B$ 可逆.

例27 设矩阵 $A_{n \times s}, B_{s \times n}$ 满足 $r(A) = s, r(B) = n$. 证明: $r\begin{pmatrix} AB & O \\ E & A \end{pmatrix} = 2n, r\begin{pmatrix} A & AB \\ E & B \end{pmatrix} = n$.

证 由 $A_{n \times s}$ 且 $r(A) = s$ 知, $n \geq s$; 由 $B_{s \times n}$ 且 $r(B) = n$ 知, $s \geq n$. 故 $s = n$, 从而 A, B, AB 均为 n 阶可逆矩阵. 所以, 可得

$$r\begin{pmatrix} AB & O \\ E & A \end{pmatrix} = r(AB) + r(A) = n + n = 2n,$$

$$r\begin{pmatrix} A & AB \\ E & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & O \\ E & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & O \\ E & O \end{pmatrix} = n.$$

注 关于分块矩阵的秩还有如下结论:

① $r\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} \geq r(A) + r(D).$

② $r\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \geq r(A) + r(D).$

例28 设 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 是 n 阶单位矩阵, 记矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 , 则().

A. $r_1 \leq r_2 \leq r_3$

B. $r_1 \leq r_3 \leq r_2$

C. $r_3 \leq r_1 \leq r_2$

D. $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

解 记 $M_1 = \begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}.$

对 M_1, M_2, M_3 分别作初等变换, 有

$$M_1 = \begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①}} \begin{pmatrix} -ABC & O \\ BC & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ BC & E \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}} \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③}} \begin{pmatrix} E & AB \\ O & -ABAB \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{④}} \begin{pmatrix} E & O \\ O & -ABAB \end{pmatrix}.$$

初等变换 ① 对应于 M_1 左乘矩阵 $\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}$, 初等变换 ② 对应于 M_2 左乘矩阵 $\begin{pmatrix} E & -C \\ O & E \end{pmatrix}$, 初等变

换 ③ 对应于 M_3 左乘矩阵 $\begin{pmatrix} E & O \\ -AB & E \end{pmatrix}$, 初等变换 ④ 对应于右乘矩阵 $\begin{pmatrix} E & -AB \\ O & E \end{pmatrix}.$

由初等变换不改变矩阵的秩知

$$r_1 = r(M_1) = r(E) = n,$$

$$r_2 = r(M_2) = r(E) + r(AB) \geq n,$$

$$r_3 = r(M_3) = r(E) + r(ABAB) \geq n.$$

又 $r(ABAB) \leq r(AB)$, 故 $r_1 \leq r_3 \leq r_2$. B 选项正确.

第六节 矩阵方程

内容与方法提要

含未知矩阵的等式称为矩阵方程. 矩阵方程可分成两类:

(1) $AX = B, XA = B, AXB = C.$

当 A 可逆时, $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B, XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}.$

当 A, B 可逆时, $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$

(2) 对于 $AX = B$, 当 A 不可逆时, 求矩阵 X 转化为解方程组.

例如 设 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

解 由 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ 知, A 不可逆.

由题设,可令 $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$.

求矩阵 X , 相当于解两个非齐次线性方程组. 对增广矩阵作初等行变换, 得

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 4 & 13 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

即等价于解方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_3 = 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 3y_3 = -1, \\ y_3 = 2. \end{cases}$

分别解得 $\begin{cases} x_1 = -3k_1 - 1, \\ x_2 = k_1, \\ x_3 = 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y_1 = -3k_2 - 7, \\ y_2 = k_2, \\ y_3 = 2, \end{cases}$ 其中 k_1, k_2 为任意常数, 故

$$X = \begin{pmatrix} -3k_1 - 1 & -3k_2 - 7 \\ k_1 & k_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

典型例题分析

例 1 设 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 求矩阵 B .

解 先将已知矩阵方程化简, 得

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E, \quad \text{①}$$

对式 ① 两端同时右乘 A , 得 $AB = B + 3A$, 再左乘 A^* , 得 $A^*AB = A^*B + 3A^*A$, 即

$$(A^* | E - A^*)B = 3 | A^* | E.$$

又由 $|A^*| = |A|^{4-1} = |A|^3 = 8$ 可知, $|A| = 2$, 故

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

注 对 $AB = B + 3A$ 两端同时左乘 A^{-1} , 得 $B - A^{-1}B = 3E$, 解得

$$B = 3\left(E - \frac{1}{2}A^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 2 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 求 X .

解 (1) 由 $A^3 = O$, 得 $|A^3| = 0$, 故 $|A| = 0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0,$$

解得 $a = 0$.

(2) 将已知等式变形为 $X(E - A^2) - AX(E - A^2) = E$, 即

$$(E - A)X(E - A^2) = E.$$

因为 $E - A$ 与 $E - A^2$ 均可逆, 所以

$$\begin{aligned} X &= (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = [(E - A^2)(E - A)]^{-1} \\ &= (E - A - A^2 + A^3)^{-1} = (E - A - A^2)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 3 设列向量 $\alpha = (1, 2, 1)^T$, $\beta = (1, \frac{1}{2}, 0)^T$, $\gamma = (0, 0, 8)^T$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$, 且 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$, 求 x .

解 注意到 $B = \beta^T\alpha = (1, \frac{1}{2}, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$ 是一个数, 则

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2\alpha\beta^T = BA.$$

同理, $A^4 = B^3A$.

由 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$, 得

$$2B^3Ax = B^3Ax + B^4x + \gamma,$$

故 $[(2B^3 - B^3)A - B^4E]x = \gamma$, 而

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = 2,$$

于是有

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 8 & 4 & -16 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix},$$

解此非齐次线性方程组, 得 $x = (k, 2k, k - \frac{1}{2})^T$, k 为任意常数.

习题演练

一、选择题

(1) 设 A 是 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C , 记

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } ().$$

A. $C = P^{-1}AP$

B. $C = PAP^{-1}$

C. $C = P^TAP$

D. $C = PAP^T$

(2) 设 A 是 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵, 记

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A = ().$$

A. P_1P_2

B. $P_1^{-1}P_2$

C. P_2P_1

D. $P_2P_1^{-1}$

(3) 设 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = E$, E 是 n 阶单位矩阵, 则必有 ().

A. $ACB = E$

B. $CBA = E$

C. $BAC = E$

D. $BCA = E$

(4) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $B = E + AB, C = A + CA$, 则 $B - C = ().$

A. E

B. $-E$

C. A

D. $-A$

(5) 设 A 是 3 阶矩阵, P 是 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ = ().$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) 设 A, B 是 n 阶矩阵, $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 且可逆, 则 C 的伴随矩阵 $C^* = ().$

A. $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

(7) 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 若 $r(A^*) = 1$, 则必有 ().

A. $a = b$ 或 $a + 2b = 0$

B. $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$

C. $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$

D. $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$

(8) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则 ().

A. $r(A) = m, r(B) = m$

B. $r(A) = m, r(B) = n$

C. $r(A) = n, r(B) = m$

D. $r(A) = n, r(B) = n$

(9) 已知 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵, 且 $PQ = O$, 则必有().

A. 当 $t = 6$ 时, $r(P) = 1$

B. 当 $t = 6$ 时, $r(P) = 2$

C. 当 $t \neq 6$ 时, $r(P) = 1$

D. 当 $t \neq 6$ 时, $r(P) = 2$

(10) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 则().

A. $r(A, AB) = r(A)$

B. $r(A, BA) = r(A)$

C. $r(A, B) = \max\{r(A), r(B)\}$

D. $r(A, B) = r(A^T, B^T)$

(11) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则().

A. $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆

B. $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆

C. $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

D. $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

二、填空题

(1) 设 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $A = \alpha^T\beta$, n 为正整数, 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, n 为大于 2 的正整数, 则 $A^n - 2A^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 A 满足 $A^2 + A - 4E = O$, 则 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & k & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(7) 设 A 为 4×3 矩阵, 且 $r(A) = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $r(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(8) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $AB + E = A^2 + B$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(9) 设 A 是 3 阶方阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|(3A)^{-1} - A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设 $|B| \neq 0$, $(A - E)^{-1} = (B - E)^T$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(1) 设 n 维列向量 $\alpha = (a, 0, \dots, 0, a)^T (a < 0)$, E 为 n 阶单位矩阵, $A = E - \alpha\alpha^T$, $B = E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T$,

其中 A 的逆矩阵为 B , 求 a 的值.

(2) 设 A 是 n 阶可逆方阵, 将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到矩阵 B .

(I) 证明: B 可逆;

(II) 求 AB^{-1} .

(3) 设 $A = E - \alpha\alpha^T$, α 为 n 维非零列向量, E 为 n 阶单位矩阵. 证明:

(I) $A^2 = A$ 的充分必要条件是 $\alpha^T\alpha = 1$;

(II) 当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

(4) 设 A 为 n 阶可逆矩阵, α 为 n 维列向量, b 为常数, 且

$$P = \begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix},$$

其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵.

(I) 计算并化简 PQ ;

(II) 证明: Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

(5) 设 A 为 $2n+1$ 阶正交矩阵, 且 $|A| = 1$, 证明: $A - E$ 不可逆.

(6) 设 $A, B, A+B$ 均为可逆矩阵, 证明: $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 并求 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$.

(7) 设 A, B 是 n 阶方阵.

(I) 证明: $|E - AB| = \begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix}$;

(II) 若 $E - AB$ 可逆, 证明: $E - BA$ 也可逆.

(8) 设 $A = E - 2xx^T$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 若 $x^T x = 1$. 证明:

(I) $A^T = A$;

(II) A 可逆, 并求 A^{-1} .

(9) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$, 其中 E 是

3 阶单位矩阵, 求 X .

(10) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, X 是 3 阶矩阵, 且满足 $(A^*)^* X A^* = 4(AX + A)$, 求:

(I) 行列式 $|(A^*)^*|$;

(II) 矩阵 X .

习题演练解答

一、选择题

(1) B.

解 由已知, 得

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A, \quad C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P A P^{-1}.$$

(2) D.

解 由已知,得

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = E,$$

即 $AP_1 = B, P_2B = E$, 故 $P_2(AP_1) = E$, 从而

$$A = P_2^{-1}EP_1^{-1} = P_2P_1^{-1}.$$

(3) D.

解 由 $ABC = E$, 有 $|A||B||C| = 1$, 故 A, B, C 均可逆.在 $ABC = E$ 两边左乘 A^{-1} , 再右乘 A , 得 $A^{-1}ABCA = E$, 即 $BCA = E$.**注** 矩阵乘法没有交换律. 若 n 阶矩阵 A, B, C, D 满足 $ABCD = E$, 则有

$$ABCD = BCDA = CDAB = DABC = E.$$

(4) A.

解 由 $B = E + AB$, 知 $(E - A)B = E$, 故 $B = (E - A)^{-1}$.由 $C = A + CA$, 知 $C(E - A) = A$, 故 $C = A(E - A)^{-1}$, 从而

$$B - C = (E - A)^{-1} - A(E - A)^{-1} = (E - A)(E - A)^{-1} = E.$$

(5) B.

解 由已知,有

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PE_{21}(1),$$

故

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= [PE_{21}(1)]^{-1}A[PE_{21}(1)] = E_{21}^{-1}(1)P^{-1}APE_{21}(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(6) D.

$$\begin{aligned} C^* &= |C|C^{-1} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = |A||B| \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A|A^{-1}|B| & O \\ O & |B|B^{-1}|A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(7) C.

$$\text{解 由于 } r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \text{ 故当 } r(A^*) = 1 \text{ 时, 有 } r(A) = 2. \\ 0, & r(A) < n-1, \end{cases}$$

若 $a = b$, 则 $r(A) \leq 1$, 排除 A, B 选项.若 $a \neq b$, 则 A 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0$, 故 $|A| \neq 0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0,$$

C 选项正确.

(8) A.

解 由 $AB = E$ 知, $r(AB) = r(E) = m$. 又由 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, 可知

$$r(A) \geq m, \quad r(B) \geq m.$$

由 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 可知 $r(A) \leq m, r(B) \leq m$, 故

$$r(A) = m, \quad r(B) = m.$$

(9) C.

解 由 $P \neq O$ 知, $r(P) \geq 1$.

当 $t = 6$ 时, 由于 $r(Q) = 1$, 且由 $PQ = O$ 知, $r(P) + r(Q) \leq 3$, 故 $r(P) \leq 2$, 不能确定 $r(P)$ 是 1 还是 2, 故 A, B 选项可排除.

当 $t \neq 6$ 时, 由 $r(Q) = 2$ 知, $r(P) \leq 1$, 又因为 $r(P) \geq 1$, 所以 C 选项正确.

(10) A.

解 令 $AB = C$, 对 A, C 按列分块, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n),$$

故 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 从而

$$r(A, AB) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(A),$$

A 选项正确.

对于 B, C, D 选项可举出反例.

取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 从而 $r(A) = 1$, $r(A, BA) =$

$r\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$, 有 $r(A) \neq r(A, BA)$, 知 B 选项错;

取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $r(A) = r(B) = 1$, 而 $r(A, B) = r\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \neq$

$\max\{r(A), r(B)\}$, 知 C 选项错;

取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $r(A, B) = r\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$, 而 $r(A^T, B^T) = r\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$,

知 D 选项也错.

(11) A.

解 由 $r(\alpha\alpha^T) = 1$, 且 α 为单位列向量知, $\alpha^T\alpha = 1$, 故 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $1, 0, \dots, 0$, 从而 $E - \alpha\alpha^T$ 的特征值为 $0, 1, \dots, 1$, 于是 $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆.

二、填空题

(1) 3.

解 由于

$$(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3\alpha\alpha^T,$$

故 $\alpha^T\alpha = 3$.

注 若利用本章第五节例 1 中的“说明”,则由 $r(\alpha\alpha^T) = 1$, 得 $\alpha^T\alpha = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 3$.

$$(2) \ 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

解 由于

$$A = \alpha^T\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n = k^{n-1}A,$$

$$\text{其中 } k = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1 + 1 + 1 = 3, \text{ 故 } A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) O .

解 由 $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 知, $(A - 2E)A = O$, 故

$$A^n - 2A^{n-1} = (A - 2E)A^{n-1} = O.$$

注 由已知, $r(A) = 2$, 找出 A^n 的规律, 有

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2A,$$

类似可得 $A^3 = 2A^2 = 2^2A, \dots, A^n = 2^{n-1}A$, 故

$$A^n - 2A^{n-1} = 2^{n-1}A - 2 \cdot 2^{n-2}A = O.$$

(4) $\frac{1}{2}(A + 2E)$.

解 由于

$$A^2 + A - 4E = (A - E)(A + 2E) - 2E = O,$$

即 $(A - E)(A + 2E) = 2E$, 故 $(A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(A + 2E)$.

(5) -3.

解 将 B 按列分块, 有

$$AB = A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (A\beta_1, A\beta_2, A\beta_3) = (0, 0, 0),$$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的非零解, 从而有 $|A| = 0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & k & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7(k+3) = 0,$$

解得 $k = -3$.**注** 由 $AB = O$, 得 $r(A) + r(B) \leq 3$. 由 $B \neq O$ 知, $r(B) \geq 1$, 故 $r(A) < 3$, 从而有 $|A| = 0$, 可解得 $k = -3$.

$$(6) \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解 由 $AA^* = |A|E$ 知, $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$, 而 $|A| = 10$, 故

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(7) 2.

解 由 $|B| = 10 \neq 0$ 知, B 可逆, 故 $r(AB) = r(A) = 2$.

$$(8) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 由于 $AB + E = A^2 + B$ 可化为

$$(A - E)B = A^2 - E = (A - E)(A + E),$$

且 $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆, 故

$$B = (A - E)^{-1}(A - E)(A + E) = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(9) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{108}$.**解** $|A^*| = |A|^{3-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 知, $A^* = |A|A^{-1}$, 故

$$\begin{aligned} |(3A)^{-1} - A^*| &= \left| \frac{1}{3}A^{-1} - |A|A^{-1} \right| = \left| \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) A^{-1} \right| \\ &= \left(-\frac{1}{6} \right)^3 |A^{-1}| = -\frac{1}{6^3} \times 2 = -\frac{1}{108}. \end{aligned}$$

$$(10) E - (B^T)^{-1}.$$

解 由 $(A - E)^{-1} = (B - E)^T = B^T - E$ 可知

$$(A - E)(A - E)^{-1} = (A - E)(B^T - E),$$

即 $E = AB^T - A - B^T + E$, 故

$$A(B^T - E) = B^T.$$

由 $|B^T| = |B| \neq 0$ 知, B^T 可逆, 故

$$A(B^T - E) \cdot (B^T)^{-1} = B^T \cdot (B^T)^{-1} = E,$$

从而

$$A^{-1} = (B^T - E)(B^T)^{-1} = E - (B^T)^{-1}.$$

三、解答题

(1) **解** 由已知, 有 $AB = E$, 即 $(E - \alpha\alpha^T)\left(E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T\right) = E$, 故

$$E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T - \alpha\alpha^T - \frac{1}{a}\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = E, \quad ①$$

又由于 $\alpha^T\alpha = (a, 0, \dots, 0, a) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = 2a^2$, 故式 ① 可化为

$$\left(\frac{1}{a} - 1 - 2a\right)\alpha\alpha^T = O.$$

由 $\alpha\alpha^T \neq O$ 知, $\frac{1}{a} - 1 - 2a = 0$, 解得 $a = -1, a = \frac{1}{2}$ (舍).

(2) **解** (I) 由已知, $B = E_{i,j}A$, 其中 $E_{i,j}$ 表示互换第 i 行与第 j 行的初等矩阵. 由 A 可逆知, $|A| \neq 0$, 故

$$|B| = |E_{i,j}A| = |E_{i,j}| |A| = -|A| \neq 0,$$

即 B 可逆.

(II) 由 $B = E_{i,j}A$ 知, $AB^{-1} = A(E_{i,j}A)^{-1} = AA^{-1}E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}$.

(3) **证** (I) 由于

$$\begin{aligned} A^2 &= (E - \alpha\alpha^T)(E - \alpha\alpha^T) = E - 2\alpha\alpha^T + \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T \\ &= E - \alpha\alpha^T + \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T - \alpha\alpha^T = A + (\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T - \alpha\alpha^T, \end{aligned}$$

故 $A^2 = A \Leftrightarrow (\alpha^T\alpha - 1)\alpha\alpha^T = O$.

又由于 $\alpha\alpha^T \neq O$, 故 $A^2 = A \Leftrightarrow \alpha^T\alpha - 1 = 0$, 即 $\alpha^T\alpha = 1$.

(II) 用反证法. 当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时, 由 (I) 知 $A^2 = A$. 若 A 可逆, 则

$$A = A^{-1}A^2 = A^{-1}A = E,$$

与已知 $A = E - \alpha\alpha^T \neq E$ 矛盾, 故 A 是不可逆矩阵.

(4) **解** (I) 由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 及 $A^* = |A|A^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha^TA^* & |A| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^TA^*A + |A|\alpha^T & -\alpha^TA^*\alpha + b|A| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{pmatrix}.$$

(II) 利用行列式的拉普拉斯展开式,有

$$|P| = \begin{vmatrix} E & O \\ -\alpha^T A^{-1} & |A| \end{vmatrix} = |A|,$$

$$|P||Q| = |PQ| = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ O & |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{vmatrix} = |A|^2 (b - \alpha^T A^{-1} \alpha),$$

又由 A 可逆知, $|A| \neq 0$, 故

$$|Q| = |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha),$$

从而 Q 可逆的充分必要条件是 $b - \alpha^T A^{-1} \alpha \neq 0$, 即 $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

(5) 证 由已知, $AA^T = A^T A = E$, 故

$$\begin{aligned} |A - E| &= |A(E - A^T)| = |A| |E - A^T| \\ &= |A| |(E - A)^T| = |A| |E - A| \\ &= |-(A - E)| = (-1)^{2n+1} |A - E| = -|A - E|, \end{aligned}$$

移项得 $2|A - E| = 0$, 即 $|A - E| = 0$, 故 $A - E$ 不可逆.

(6) 解 由于

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(E + AB^{-1}) = A^{-1}(B + A)B^{-1},$$

故由已知条件知, $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 且

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = [A^{-1}(A + B)B^{-1}]^{-1} = B(A + B)^{-1}A.$$

(7) 证 (I) 先找 $E - AB$ 与 $\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}$ 之间的关系. 由

$$\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ O & E - AB \end{pmatrix}$$

知

$$\begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ A & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & B \\ O & E - AB \end{vmatrix} = |E - AB|.$$

(II) 与(I)同理, 得 $|E - BA| = \begin{vmatrix} E & A \\ B & E \end{vmatrix}.$

又因为 $\begin{pmatrix} E & A \\ B & E \end{pmatrix} \xrightarrow{n \text{ 次行交换}} \begin{pmatrix} B & E \\ E & A \end{pmatrix} \xrightarrow{n \text{ 次列交换}} \begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}$, 而行(列)交换所得行列式仅变号, 且

$\begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix} \neq 0$, 所以 $\begin{vmatrix} E & A \\ B & E \end{vmatrix} \neq 0$, 从而 $E - BA$ 可逆.

(8) 证 (I) $A^T = (E - 2xx^T)^T = E^T - (2xx^T)^T = E - 2xx^T = A.$

(II) 由 $xx^T = 1$, 得

$$\begin{aligned} A^2 &= (E - 2xx^T)(E - 2xx^T) \\ &= E - 2xx^T - 2xx^T(E - 2xx^T) \\ &= E - 2xx^T - 2xx^T + 4x(x^Tx)x^T \\ &= E - 4xx^T + 4xx^T = E, \end{aligned}$$

即 $A \cdot A = E$, 故 A 可逆, 且 $A^{-1} = A$.

(9) 解 化简已知矩阵方程,有

$$AX(A-B) + BX(B-A) = E,$$

$$\text{即 } (A-B)X(A-B) = E.$$

由

$$|A-B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

知, $A-B$ 可逆, 且 $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故

$$X = [(A-B)^{-1}]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10) 解 (I) 由 $A^*A = AA^* = |A|E$ 知

$$A^*(A^*)^* = |A^*|E,$$

而 $|A^*| = |A|^2 = 4$, 故

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = 4 \cdot \frac{A}{|A|} = 2A,$$

从而有

$$|(A^*)^*| = |2A| = 2^3|A| = 8 \times 2 = 16.$$

(II)

$$(A^*)^*XA^* = 4(AX+A).$$

①

式①先左乘 A^* , 再右乘 A , 得

$$A^*(A^*)^*XA^*A = 4(A^*AXA + A^*AA),$$

故 $2X = 2XA + 2A$, 即 $X(E-A) = A$, 从而有

$$\begin{aligned} X &= A(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第三章 向 量

考试要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念, 掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念, 会求向量组的极大线性无关组及秩.
4. 理解向量组等价的, 理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.
5. (仅数学一要求) 了解 n 维向量空间、子空间、基、维数、坐标等概念.
6. (仅数学一要求) 了解基变换和坐标变换公式, 会求过渡矩阵.
7. 了解内积的概念, 掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.
8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质.

第一节 向量及其运算

内容与方法提要

一、向量及其运算的概念

1. 向量的定义

由 n 个数构成的有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 或 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n 维列向量或 n 维行向量.

2. 向量的线性运算

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)^T,$$

$$\alpha \pm \beta = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n)^T.$$

二、向量内积的运算

1. 向量内积的定义

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则内积 $(\alpha, \beta) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha^T \beta$.

2. 内积的性质

$$(1) (\alpha, \alpha) = \alpha^T \alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0.$$

$$(2) \text{向量的模(或长度): } \|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

$$(3) (\alpha, \alpha) = \alpha^T \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

$$(4) (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha \text{ (对称性).}$$

$$(5) (\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1(\alpha, \beta_1) + k_2(\alpha, \beta_2).$$

3. 正交单位向量

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维向量, 若

(1) $(\alpha_i, \alpha_j) = 0 (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n)$;

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是单位向量,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为正交单位向量.

三、正交矩阵

1. 正交矩阵的定义

若 $AA^T = A^T A = E$, 则称 A 是正交矩阵.

2. 正交矩阵的性质

(1) A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.

(2) 由 $AA^T = A^T A = E$, 知 $|A|^2 = 1$.

(3) 正交矩阵 A 的几何含义: A 的列(或行)是两两垂直的单位向量.

例如 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, 则

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, \end{cases}$$

即 A 的行向量是两两垂直的单位向量. 由此可以判断, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则它是非正交矩阵.

第二节 向量组的线性相关性和线性表示

内容与方法提要

一、向量组线性相关

1. 定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 n 维向量, 若存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0,$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

说明 几何上, 若两个向量 α_1, α_2 线性相关, 则 α_1, α_2 共线; 若三个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面.

2. 等价说法

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 n 维列向量, 若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0,$$

则

$$\text{齐次线性方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解} \Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) < s.$$

3. 判别向量组线性相关的常用步骤

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 n 维向量.

(1) 当 $s > n$ 时, 向量组必线性相关;

(2) 当 $s = n$ 时, 若行列式 $|(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)| = 0$, 则向量组必线性相关;

(3) 当 $s < n$ 时, 若秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) < s$, 则向量组必线性相关.

例如 判别向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, -1, 1), \alpha_3 = (-2, 6, 4)$ 的线性相关性.

解 由于向量个数 = 向量维数 = 3, 故利用行列式进行判别.

记 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)$, 则

$$|A| = |(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

二、向量组线性无关

1. 定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 n 维向量, 若

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

2. 等价说法

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 n 维列向量, 则向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = 0$ 只有

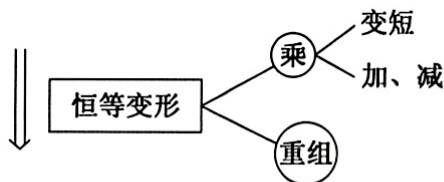
零解 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = s$.

3. 判别向量组线性无关的常用方法

(1) 定义法.

设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0, \quad ①$$



$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0.$$

说明 (a) “乘”表示在式 ① 两端同乘以矩阵 A 、向量 α 、数 λ , 目的是使式 ① 变短, 以便证明 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$.

例如 设 $A^{m-1}\alpha \neq 0, A^m\alpha = 0$, 证明: $\alpha, A\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

证 用定义法. 设

$$k_1\alpha + k_2A\alpha + \dots + k_mA^{m-1}\alpha = 0. \quad (2)$$

依题设, $A^m\alpha = 0$, 得

$$A^{m+1}\alpha = 0, A^{m+2}\alpha = 0, \dots$$

式 (2) 两端同时左乘 A^{m-1} , 得 $k_1A^{m-1}\alpha = 0$, 而 $A^{m-1}\alpha \neq 0$, 故 $k_1 = 0$, 代入式 (2) 得

$$k_2A\alpha + k_3A^2\alpha + \dots + k_mA^{m-1}\alpha = 0. \quad (3)$$

式 (3) 两端同时左乘 A^{m-2} , 得 $k_2 = 0$. 类似地, 可证 $k_3 = \dots = k_m = 0$, 所以 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

(b) “重组”表示将已知条件代入式 (1) 重新组合.

例如 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$. 证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性无关.

证 设

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0, \quad (4)$$

将已知条件代入式 (4), 得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0,$$

即

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

由 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ 知, 上述方程组只有零解, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

(2) 利用行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s| \neq 0$ 或 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ 进行判别.

三、线性表示

1. 定 义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 n 维向量, 若存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s,$$

则称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

例如 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2$.

2. 等价说法

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 n 维列向量, 若存在 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \Leftrightarrow$ 非齐次线性

$$\text{方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = \beta \text{ 有解} \Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta).$$

说明 若非齐次线性方程组有唯一解, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一表示; 若非齐次线性方程组有无穷多解, 则线性表示不唯一.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 而 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且表示方法唯一.

四、极大线性无关组和向量组等价

1. 极大线性无关组

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 满足:

- (1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中有 r 个向量线性无关;
- (2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任意 $r+1$ 个向量(如果有)线性相关,

则称这 r 个线性无关的向量为该向量组的一个极大线性无关组, 其中 r 称为向量组的秩, 即 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r$.

说明 ① 简单地说, 极大线性无关组指它本身线性无关, 再扩大就线性相关.

② 向量组的秩是刻画向量组相关“程度”的一个度量.

③ $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 全是零向量, 这时没有极大线性无关组.

④ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任一向量都可用其极大线性无关组线性表示.

例如 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解 已知向量组为列向量组, 作初等行变换, 线性相关性不变. 由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记}} B$$

可知, B 的第 1 列、第 3 列所对应的原向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 2, 3, 4)^T$ 构成一个极大线性无关组.

$$\text{再由 } B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 知, } \alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1 + \alpha_3.$$

2. 向量组等价

(1) 设 n 维向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$; (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 若向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示, 且向量组 (II) 也可由向量组 (I) 线性表示(互相线性表示), 则称 (I) 与 (II) 等价.

(2) 向量组 (I) 与向量组 (II) 等价 $\Leftrightarrow r(I) = r(II)$.

说明 ① $r(I) = r(II) \nRightarrow$ 向量组 (I) 与向量组 (II) 等价.

例如 (I): $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; (II): $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r(I) = r(II) = 2$, 但 β_2 不能由 α_1, α_2

线性表示, 故向量组 (I) 与向量组 (II) 不等价.

② 注意向量组等价与矩阵等价的差别, 矩阵 $A_{m \times n}$ 与矩阵 $B_{m \times n}$ 等价 $\Leftrightarrow r(A_{m \times n}) = r(B_{m \times n})$.

3. 利用向量组的秩判别线性表示

(1) $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \Leftrightarrow \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示; $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + 1 \Leftrightarrow \beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一线性表示的充分必要条件为

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s.$$

(3) 向量组 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ 可由向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 线性表示的充分必要条件为

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

(4) 向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 与向量组 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ 等价的充分必要条件为

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t).$$

说明 线性表示的问题等价于非齐次线性方程组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \beta$$

有解、无解、有唯一解、有无穷多解的问题.

4. 矩阵的满秩分解

设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 r , 则存在 $G_{m \times r}$ 是列满秩矩阵, $H_{r \times n}$ 是行满秩矩阵, 使得 $A = GH$.**证法1** 由 $r(A) = r$, 知存在可逆矩阵 P 与 Q , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} \quad (E_r \text{ 为 } r \text{ 阶单位矩阵}).$$

$$\text{又 } \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}_{m \times r} (E_r, O)_{r \times n}, \text{ 故}$$

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} \cdot (E_r, O) Q^{-1}.$$

令 $G = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}_{m \times r}$, $H = (E_r, O)_{r \times n} Q^{-1}$, 则 $G_{m \times r}$ 是秩为 r (列满秩) 的矩阵, $H_{r \times n}$ 是秩为 r (行满秩) 的矩阵, 且 $A = GH$.**证法2** 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 由 $r(A) = r$, 可设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的一个极大线性无关组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表示, 即

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rn} \end{pmatrix}_{r \times n}.$$

记

$$G = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r})_{m \times r}, \quad H = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rn} \end{pmatrix}_{r \times n},$$

则 $A = GH$. 显然 $G_{m \times r}$ 是秩为 r 的列满秩矩阵. 又由 $r = r(A) \leq r(H) \leq r$, 知 $r(H) = r$. 故 $H_{r \times n}$ 是秩为 r 的行满秩矩阵.

典型例题分析

题型一 线性相关性的判别

例 1 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ (c_i 为任意常数, $i = 1, 2, 3, 4$), 则下列

向量组一定线性相关的是().

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解 判别 3 个 3 维向量的线性相关性用行列式. 由

$$|(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

知, $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 一定线性相关, 故 C 选项正确.

例 2 设向量 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (2, -1, 1)^T, \alpha_3 = (-2, k, 4)^T$ 线性相关, 求 k 的值.

解 依题设, 用行列式或秩均可求解, 这里用秩求解.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & k \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & k+4 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & k+4 \\ 0 & 0 & 6-k \end{pmatrix}.$$

由已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 $r(A) < 3$, 故 $k = 6$.

例 3 设有 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 下列命题中正确的是().

① 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

② 若存在 n 阶矩阵 A , 使得 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

③ 若 $A\beta_1 = \alpha_1, A\beta_2 = \alpha_2, A\beta_3 = \alpha_3, A\beta_4 = \alpha_4$, 且 A 可逆, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

④ 若 α_1, α_2 线性无关, α_3, α_4 均不能由 α_1, α_2 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

A. ①②③

B. ①②④

C. ②③④

D. ①③④

解 A 选项正确.

① 显然正确.

② 正确. 由于 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 故 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. 而 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4) = 4$, 故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

③ 正确. 当 A 可逆时, $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

④ 不正确. 例如 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关, 且 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 都不能由 α_1, α_2 线性表示, 但

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

例 4 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是().

- A. 存在全为 0 的实数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$
 B. 存在不全为 0 的实数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$
 C. 每个 α_i 都不能用其余向量线性表示
 D. 存在部分组线性无关

解 A 选项不正确. 当 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ 时, 对任何 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$$

B 选项不正确. 当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关时, 也可能存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0.$$

C 选项正确. 每个 α_i 都不能用其余向量线性表示, 这就是线性无关的定义.

D 选项不正确. 线性相关的向量组也可能有部分组线性无关.

例 5 设 $A\alpha_1 = \alpha_1 \neq 0, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

证 用定义法. 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0, \quad ①$$

由已知条件 $A\alpha_1 = \alpha_1$, 得 $(A - E)\alpha_1 = 0$; 由 $A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, 得 $(A - E)\alpha_2 = \alpha_1$; 由 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 得 $(A - E)\alpha_3 = \alpha_2$.

式 ① 两边同时乘以 $(A - E)$, 得

$$k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 = 0. \quad ②$$

式 ② 两边同时乘以 $(A - E)$, 得 $k_3\alpha_1 = 0$.

由于 $\alpha_1 \neq 0$, 所以 $k_3 = 0$, 代入式 ② 得 $k_2 = 0$, 将 $k_2 = k_3 = 0$ 代入式 ① 得 $k_1 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例 6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 是 $m+1$ 个列向量 ($m > 1$), 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$. 证明: 向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

证 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), B = (\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_m)$, 则

$$\begin{aligned} B &= (\beta, \beta, \dots, \beta) - (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ &= \beta(1, 1, \dots, 1) - (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)(1, 1, \dots, 1) - (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, \dots, 1) - (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times m} \stackrel{\text{记}}{=} AC. \end{aligned}$$

而

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)(-1)^{m-1} \neq 0,$$

即 C 可逆, 故 $r(A) = r(B)$, 因此

$$\begin{aligned} \beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_m \text{ 线性无关} &\Leftrightarrow r(B) = m \Leftrightarrow r(A) = m \\ &\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ 线性无关}. \end{aligned}$$

注 计算 $|C|$ 可用列加法, 有

$$\begin{aligned} |C| &= \begin{vmatrix} m-1 & 1 & \cdots & 1 \\ m-1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m-1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} (m-1). \end{aligned}$$

例 7 设 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T (i = 1, 2, \dots, r; r < n)$ 是 n 维实向量, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 已知 β 是方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量, 试判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 的线性相关性.

解 用定义法. 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + l\beta = 0. \quad ①$$

由 β 为方程组的非零解可知

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n = 0, \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n = 0, \\ \vdots \\ a_{r1}b_1 + a_{r2}b_2 + \cdots + a_{rn}b_n = 0, \end{cases}$$

即 $\beta^T \alpha_1 = 0, \beta^T \alpha_2 = 0, \dots, \beta^T \alpha_r = 0$.

式 ① 两边同时左乘 β^T , 并将 $\beta^T \alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ 代入, 得 $l\beta^T \beta = 0$.

由 $\beta \neq 0$ 知, $\beta^T \beta > 0$, 故有 $l = 0$, 代入式 ①, 得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关知, $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性无关.

注 若 $\beta \neq 0$ 是 $Ax = 0$ 的解, 相当于说 β 与 A 的行向量是正交的, 即 $\beta^T \alpha_i = 0$. 用 β^T 左乘式 ①, 是为了将式 ① “变短”, 以便得出 $l = 0$.

例 8 设 A 是 3 阶矩阵, α_1, α_2 是 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 且向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

证 根据特征值的定义有 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$. 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0, \quad ①$$

用 A 左乘式 ①, 得

$$-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = 0. \quad ②$$

式①-式②,得 $2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$.

由 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量知, α_1, α_2 线性无关, 故 $k_1 = k_3 = 0$.

代入式①得 $k_2\alpha_2 = 0$. 又 $\alpha_2 \neq 0$ (α_2 是特征向量), 所以 $k_2 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

注

$$A\alpha_1 = -\alpha_1 \Rightarrow (A+E)\alpha_1 = 0;$$

$$A\alpha_2 = \alpha_2 \Rightarrow (A-E)\alpha_2 = 0;$$

$$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow (A-E)\alpha_3 = \alpha_2.$$

用 $(A-E)$ 左乘式①, 得 $-2k_1\alpha_1 + k_3\alpha_2 = 0$. 由 α_1, α_2 线性无关可知, $k_1 = k_3 = 0$, 代入式①可得 $k_2 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 用 $(A-E)$ 左乘式①是为了使式①“变短”.

题型二 线性表示的判断

例9 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中前 $n-1$ 个向量线性相关, 后 $n-1$ 个向量线性无关, 证明:

(1) β_1 可由 $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}$ 线性表示;

(2) β_n 不能由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 线性表示.

证

(1) 依题设 $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ 线性无关可知, $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}$ 线性无关, 又由于 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 线性相关, 故 β_1 可由 $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}$ 线性表示.

(2) 反证法. 若 β_n 能用 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 线性表示, 由(1)知 β_1 可由 $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}$ 线性表示, 故 β_n 可由 $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}$ 线性表示, 这与已知后 $n-1$ 个向量线性无关矛盾, 所以 β_n 不能由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 线性表示.

注

① “整体无关, 则部分无关”的逆否命题成立, 即“部分相关, 则整体相关”.

② 若一向量可由部分向量组线性表示, 则该向量可由整个向量组线性表示.

例10

设向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 且 $r(I) = r(II) = 3$, $r(III) = 4$. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关.

证 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0, \quad ①$$

只要证明 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ 即可.

依题设 $r(I) = r(II) = 3$ 知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 故 α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 设 $\alpha_4 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$, 将其代入式①, 得

$$(k_1 - c_1k_4)\alpha_1 + (k_2 - c_2k_4)\alpha_2 + (k_3 - c_3k_4)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0.$$

又 $r(III) = 4$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} k_1 - c_1k_4 = 0, \\ k_2 - c_2k_4 = 0, \\ k_3 - c_3k_4 = 0, \\ k_4 = 0. \end{cases}$$

所以 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关.

例11

设向量组(I): $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 3)^T, \alpha_3 = (1, -1, a+2)^T$; 向量组(II): $\beta_1 = (1, 2, a+3)^T, \beta_2 = (2, 1, a+6)^T, \beta_3 = (2, 1, a+4)^T$. 问:

(1) 当 a 取何值时, 向量组(I)与向量组(II)等价?

(2) 当 a 取何值时, 向量组(I)与向量组(II)不等价?

解法1

(1) 向量组(I)与向量组(II)等价, 即两个向量组可相互线性表示. 考虑到向量组(I)与向量组(II)都是3个3维向量, 且

$$|(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

则向量组(I)与向量组(II)等价 $\Leftrightarrow r(I) = r(II) = 3$, 而

$$|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = a+1,$$

故当 $a \neq -1$ 时, $r(I) = r(II) = 3$, 即向量组(I)与向量组(II)都是3维线性无关向量组. 所以向量组(I)与向量组(II)可以互相线性表示, 从而向量组(I)与向量组(II)等价.

(2) 当 $a = -1$ 时, $r(I) = 2, r(II) = 3$, 所以向量组(I)与向量组(II)不等价.

解法2 (1) 向量组(I)与向量组(II)等价, 即两个向量组可相互线性表示, 可相互线性表示说明非齐次线性方程组有解. 于是有

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & a+1 & a+2 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

当 $a \neq -1$ 时, 方程组 $\beta_i = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 (i=1, 2, 3)$ 有唯一解; 当 $a = -1$ 时, 方程组 $\beta_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ 无解. 因此可知, 当 $a \neq -1$ 时, 三个方程组均有唯一解, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

由

$$|(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

知, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 即向量组(I)与向量组(II)等价.

(2) 当 $a = -1$ 时, 由于 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$ 无解, 故 β_1 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即向量组(I)与向量组(II)不等价.

例12 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

解 (1) 4个3维向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_i (i=1, 2, 3)$ 一定线性相关. 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 则 $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 这与题设矛盾, 于是 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 从而

$$|(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5,$$

由此可知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示.

(2) 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 对 A 施以初等行变换, 即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

从而 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

例13 设向量组

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 1, 3)^T, & \alpha_2 &= (-1, -3, 5, 1)^T, \\ \alpha_3 &= (3, 2, -1, a+2)^T, & \alpha_4 &= (-2, -6, 10, a)^T. \end{aligned}$$

问:

- (1) 当 a 为何值时, 该向量组线性无关, 并将向量 $\beta = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示;
- (2) 当 a 为何值时, 该向量组线性相关? 并求其一个极大线性无关组.

解 (1) 对 $\bar{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 | \beta)$ 作初等行变换, 化为阶梯形, 得

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & a+2 & a & 10 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 1-a \end{array} \right] \stackrel{\text{记}}{=} B,$$

当 $a-2 \neq 0$, 即 $a \neq 2$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

为求线性表示, 需将 B 化为最简阶梯形矩阵, 得

$$B \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3a-4}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{a-2} \end{array} \right],$$

故

$$\beta = 2\alpha_1 + \frac{3a-4}{a-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1-a}{a-2}\alpha_4.$$

(2) 当 $a = 2$ 时, 由(1)知

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $r(A) = 3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为其一个极大线性无关组.

注 求线性表示时, 需将矩阵用初等行变换化为最简阶梯形矩阵. 所谓最简阶梯形矩阵是指: 每一个非 0 行的第 1 个非 0 元素均为 1, 且该非 0 元素所在列的其余元素全为 0.

例14 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的列向量组的一个极大线性无关组;

(2) 记由(1)中的极大线性无关组构成的矩阵为 G , 求矩阵 H , 使得 $A = GH$.

解 (1) 对 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可取 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 作为 A 的列向量组的一个极大线性无关组.

(2) 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, 由(1)知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 可由 α, β 线性表示, 故有

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (\alpha, \beta)H,$$

即
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

解上面的矩阵方程. 作初等行变换, 有

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

故 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

注 若记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, 由 $\alpha_3 = 2\alpha - \beta, \alpha_4 = \alpha + \beta, \alpha_5 = \alpha + 2\beta$, 知

$$A = (\alpha, \beta, 2\alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

故 $G = (\alpha, \beta), H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 使得 $A = GH$.

例15 (仅数学一要求) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是满秩的, 则直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_1} = \frac{y-b_1}{b_2-b_1} = \frac{z-c_1}{c_2-c_1}$ 与

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1} = \frac{y-b_1}{b_2-b_1} = \frac{z-c_1}{c_2-c_1} \quad ().$$

A. 相交于一点

B. 重合

C. 平行但不重合

D. 异面

解 讨论两条空间直线的位置关系, 只需讨论两条直线的方向向量的关系.

记 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, 则由已知, 有 $r(A) = 3$. 又由于 A 经初等变换后秩不变, 且

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} B,$$

故两条直线的方向向量

$$\alpha = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2), \quad \beta = (a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$$

线性无关,排除 B,C 选项.

又由于两条直线分别过点 (a_3, b_3, c_3) 和点 (a_1, b_1, c_1) , 故记该两点连线的方向向量为 $\gamma = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$, 若 α, β, γ 共面, 则两直线相交; 若 α, β, γ 不共面, 则两直线异面.

而观察到 $\alpha + \beta + \gamma = 0$, 即 α, β, γ 线性相关, 故 α, β, γ 共面, A 选项正确.

注 ① 本题也可利用混合积(用方括号表示)进行判断, 由于

$$[\alpha, \beta, \gamma] = (\alpha \times \beta) \cdot \gamma = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0,$$

故 α, β, γ 共面.

② 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维向量组, 且其秩为 r .

若 $r = 3$, 则三个向量不共面;

若 $r = 2$, 则三个向量共面;

若 $r = 1$, 则三个向量共线.

③ 此题也可直接从几何角度分析.

如图 3-1 所示, 记空间三个点 $P_1(a_1, b_1, c_1), P_2(a_2, b_2, c_2), P_3(a_3, b_3, c_3)$, 则直线 (I) 过点 P_3 且平行于 $\overrightarrow{P_1P_2}$, 直线 (II) 过点 P_1 且平行于 $\overrightarrow{P_2P_3}$, 故直线 (I) 与直线 (II) 不可能异面, 也不可能平行不重合, 从而只需看它们是交于一点还是重合.

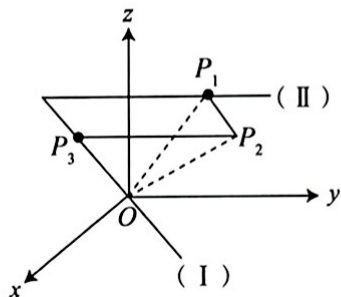


图 3-1

已知, 矩阵满秩, 故三个行向量 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ 线性无关, 即三个向量不共面, 从而三点 P_1, P_2, P_3 不在同一条直线上, 于是两条直线交于一点, A 选项正确.

第三节 相关性常用结论

内容与方法提要

一、判别向量组线性相关性的主要方法

$$\begin{aligned} (1) \text{ 线性相关性} & \begin{cases} \text{定义,} \\ \text{齐次线性方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解(只有零解),} \\ r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s(=s). \end{cases} \\ (2) \text{ 线性表示} & \begin{cases} \text{定义 } (\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s), \\ \text{非齐次线性方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = \beta \text{ 有解,} \\ r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta). \end{cases} \end{aligned}$$

二、常用结论

将定义、方程组、秩三者综合应用,得到以下常用结论:

- (1) 向量组的扩大与缩小 $\begin{cases} \text{线性无关向量组缩小后仍线性无关,} \\ \text{线性相关向量组扩大后仍线性相关.} \end{cases}$

说明 ① 向量组扩大与缩小,从齐次线性方程组的角度看,是方程组中未知数个数的增加与减少.

例如 设向量 α_1 与 α_2 线性相关,增加一个向量 α_3 ,则齐次线性方程组为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$ 增加

了一个未知数,若 $(\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$ 有非零解,则 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$ 也有非零解,从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 仍线性

相关.

② 齐次线性方程组有非零解(只有零解),是讨论线性相关(线性无关)的重要思路,应引起重视.

- (2) 向量的分量增加与减少 $\begin{cases} \text{线性无关组分量增加后仍线性无关,} \\ \text{线性相关组分量减少后仍线性相关.} \end{cases}$

说明 向量的分量增加与减少,实际上是齐次线性方程组中方程个数的增加与减少.

(3) 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示,则 $r(I) \leq r(II)$.

(4) “以少表多,多的相关”,即若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示,且 $s < t$,则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关.

说明 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 α_1, α_2 线性表示,则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

证 用定义法证明. 设

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0. \quad ①$$

由已知,设

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2, \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2, \\ \beta_3 = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2, \end{cases}$$

代入式①,得

$$(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3)\alpha_1 + (a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3)\alpha_2 = 0.$$

令

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 = 0. \end{cases}$$

该方程组有非零解 k_1, k_2, k_3 (方程个数小于未知数个数),所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

(5) 若向量组(I)与向量组(II)可相互线性表示,即向量组(I)与向量组(II)等价,则

$$r(I) = r(II).$$

(6) 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示,且 $r(I) = r(II)$,则向量组(I)与向量组(II)等价.

(7) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,且可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示,则这两个向量组等价.

说明 由已知,设

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1s} & a_{2s} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix},$$

若记 $(a_{ji}) = C$, 则

$$s \geq r(C) \geq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s,$$

故 $r(C) = s$, 即 C 可逆. 于是

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \cdot C^{-1},$$

即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 从而两个向量组等价.

(8) 设 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 则表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

注 结论等价的说法是: 非齐次线性方程组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = \beta$$

有唯一解, 等价于 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = s$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

(9) 已知 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性无关, $\alpha_{k+1} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_k \alpha_k$ ($\lambda_i \neq 0; i = 1, 2, \dots, k$), 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ 中任意 k 个向量都线性无关.

证 设向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$; (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$. 由已知, 向量组 (I) 与向量组 (II) 等价, 从而 $r(I) = r(II) = k$. 因此, 可知向量组 (II) 中的任意 k 个向量都是线性无关的.

说明 这里注意 $\lambda_i \neq 0$ 这一条件.

(10) 设

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

记 $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 矩阵 C 可逆.

说明 记 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $B = AC$.

($\Rightarrow$) $r(B) = r(AC) \leq r(C) \leq 3$, 从而当 $r(B) = 3$ 时, $r(C) = 3$, 故 C 可逆.

($\Leftarrow$) 由 C 可逆知, $r(B) = r(AC) = r(A) = 3$, 于是 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例如 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$, $\beta_3 = 3\alpha_3 + \alpha_1$. 证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

证 由已知, 得

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

知, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

(11) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1$, 则当 s 为偶数时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关; 当 s 为奇数时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.

说明 设

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0, \quad (1)$$

将 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1$ 代入式 (1), 得

$$(k_1 + k_s)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + \dots + (k_{s-1} + k_s)\alpha_s = 0.$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 得

$$\begin{cases} k_1 + k_s = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ \vdots \\ k_{s-1} + k_s = 0, \end{cases}$$

其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{s+1} + 1 = \begin{cases} 0, & s \text{ 为偶数}, \\ 2, & s \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

故结论成立.

(12) A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关(无关) $\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax = 0$ 有非零解(只有零解).

(13) A 的行向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性相关(无关) $\Leftrightarrow$ 方程组 $A^T x = 0$ 有非零解(只有零解).

例如 设 $AB = O$, 且 A, B 为非零矩阵. 证明: A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

证 由 $AB = O$ 知, B 的列向量均是方程组 $Ax = 0$ 的解. 又 $B \neq O$, 即 $Ax = 0$ 有非零解, 所以 A 的列向量组线性相关.

由 $AB = O$ 知, $B^T A^T = O$, 即 A^T 的列向量均是 $B^T x = 0$ 的解. 又由 $A \neq O$ 知, $A^T \neq O$, 故方程组 $B^T x = 0$ 有非零解, 从而 B^T 的列向量组线性相关, 故 B 的行向量组线性相关.

(14) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是行列式

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

证 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则

$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix},$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $r(A) = n$, 而 $r(A) = r(A^T A)$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D = |A^T A| = \begin{vmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

注 要想证明 $r(A) = r(A^T A)$, 只需证明方程组 $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 同解. 显然, $Ax = 0$ 的解必是 $A^T Ax = 0$ 的解. 若 x 满足 $A^T Ax = 0$, 则 $x^T A^T Ax = 0$, 即 $(Ax)^T (Ax) = 0$, 故内积 $(Ax, Ax) = 0$, 所以 $Ax = 0$, 从而 $r(A) = r(A^T A)$.

典型例题分析

例 1 设有矩阵 $A_{m \times n}$, 对 A 作初等行变换得到 B , 证明: 矩阵 A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的线性相关性.

证 因 B 由 A 经初等行变换得到, 故存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$, 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = B.$$

对矩阵 A, B 按列分块, 得

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

记 $P = P_s \cdots P_2 P_1$, 则 P 可逆. 因为

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

所以,

A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关(无关)

$$\Leftrightarrow \text{方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解(只有零解)}$$

$$\Leftrightarrow \text{方程组 } P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解(只有零解)}$$

$$\Leftrightarrow (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解(只有零解)}$$

$\Leftrightarrow B$ 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性相关(无关).

注 ① 此结论是利用初等行变换求列向量组的秩和极大线性无关组的依据.

② 类似地, 对 $A_{m \times n}$ 作初等列变换得到 B , 则 A 的行向量组与 B 的行向量组有相同的线性相关性.

例 2 设 $A_{n \times s}, B_{s \times n}$ 满足 $AB = E_n$, 证明: B 的列向量组线性无关.

证法 1 考虑方程组 $Bx = 0$.

由已知, 得 $ABx = Ex = x = 0$, 从而 $Bx = 0$ 只有零解, 故 B 的列向量组线性无关.

证法2 利用矩阵的秩证明.

由于 $r(B) \geq r(AB) = r(E) = n$, 且 $r(B) \leq n$, 所以 $r(B) = n$, 即 B 的列向量组线性无关.

例3 设 B 的列向量组线性无关, 且 $BA = C$, 证明: 矩阵 C 的列向量组线性无关的充分必要条件是 A 的列向量组线性无关.

证 矩阵 C 的列向量组线性无关 $\Leftrightarrow Cx = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow BAx = 0$ 只有零解.

又 B 的列向量组线性无关, 故 $By = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow A$ 的列向量组线性无关.

例4 设矩阵 $A_{n \times s}, B_{s \times s}, C_{s \times t}$ 满足 $ABC = O$, 且 $r(A) = r(C) = s$, 证明: $B = O$.

证 由 $r(A) = s$, 即 A 的列向量组线性无关知, 方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

由已知 $ABC = A(BC) = O$ 得, BC 的列向量都是 $Ax = 0$ 的解, 故 $BC = O$, 取转置得 $C^T B^T = O$.

又由 $r(C) = s = r(C^T)$ 知, C^T 的列向量组线性无关, 故 $C^T x = 0$ 只有零解, 从而 $B^T = O$, 所以 $B = O$.

例5 设向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则下列选项正确的是().

A. 若 (I) 线性无关, 则 $r \leq s$

B. 若 (I) 线性相关, 则 $r > s$

C. 若 (II) 线性无关, 则 $r \leq s$

D. 若 (II) 线性相关, 则 $r > s$

解法1 因向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示, 故可知 $r(I) \leq r(II)$.

若向量组 (I) 线性无关, 则 $r(I) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r$, 而 $r(II) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s$, 所以若向量组 (I) 线性无关, 则 $r \leq s$, A 选项正确.

解法2 利用“结论: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 且 $s < r$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关”的逆否命题. 即: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $r \leq s$, 故 A 选项正确.

例6 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$ 且 B 可逆, 则().

A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

解 设 $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 对矩阵 A, C 按列分块, 记

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad C = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \quad B = (b_{ij})_{n \times n}.$$

由 $AB = C$, 得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

所以

$$\begin{cases} \beta_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n, \\ \vdots \\ \beta_n = b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \cdots + b_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

故 C 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

又因为 B 可逆, 所以 $A = CB^{-1}$, 即 A 的列向量组也可由 C 的列向量组线性表示, 故 B 选项正确.

注 由 $AB = C$ 知, C 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示. 又由于 $r(AB) = r(A) = r(C)$ (因为 B 可逆), 根据“内容与方法提要”中的结论(6)知, C 的列向量组与 A 的列向量组等价.

例 7 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, 且 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \neq 0$,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, 下列结论中: ① $r(A) = 2$; ② α_2, α_4 线性无关; ③ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关; ④ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线

性相关, 则正确的是().

A. ①③

B. ②③

C. ①④

D. ②④

解 对于 ①, 由 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \neq 0$ 知, $r(A) \geq 2$, 但 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, 不能得到 $r(A) < 3$ (所有 3 阶子

式全为 0 才可以得到 $r(A) < 3$), 所以 ① 不正确.

对于 ②, 由 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \neq 0$ 知, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{34} \end{pmatrix}$ 线性无关, 于是增加分量后得 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ 与 $\alpha_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$

仍线性无关, 所以 ② 正确.

对于 ③, 由 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ 知, $(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ 线性相关, 但增加分量

后得 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不一定线性相关, 故 ③ 不正确.

对于 ④, 由 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ 知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故 ④ 正确.

综上所述, 选 D.

第四节 n 维向量空间 (仅数学一要求)

内容与方法提要

一、概 念

1. n 维向量空间

设 $\mathbf{R}^n$ 是由全部 n 维实向量构成的集合, 且规定了数乘与加法两种线性运算, 则称 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维(实)向量空间.

2. 基

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 个向量, 且满足:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;
- (2) 对任意 $\beta \in \mathbf{R}^n$, β 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的基.

注 特别地, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的基, 且满足:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 两两正交;
- (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为单位向量,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基.

例如 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基.

3. 坐标

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的基, $\beta \in \mathbf{R}^n$. 若 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$, 则称 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 为向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标.

4. 过渡矩阵

设 $\mathbf{R}^n$ 的两组基为 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 与 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 且

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{n2}\alpha_n, \\ \vdots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \dots + c_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

或写成

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ 为从基 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 到基 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 的过渡矩阵.

二、坐标公式

1. 向量在基下的坐标公式

设向量 $\alpha \in \mathbf{R}^n$, α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = A^{-1} \cdot \alpha$.

说明 由于

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \end{aligned}$$

故 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = A^{-1}\alpha$.

2. 向量在两个基下的坐标公式

(1) 设列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 的基, 则

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P, \quad ①$$

其中 P 是从 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵. 式 ① 两边同时取转置, 得

$$\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix},$$

这里 β_i^T 与 $\alpha_i^T (i = 1, 2, \dots, n)$ 为行向量, 这是基由行向量表达的关系式.

(2) 设向量 $\alpha \in \mathbf{R}^n$, α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, α 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标为 $(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 则

$$(y_1, y_2, \dots, y_n)^T = P^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad ②$$

其中 P 为从 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

对式 ② 两边同时取转置, 得

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)(P^{-1})^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)(P^T)^{-1},$$

这是坐标为行向量的关系式.

三、标准正交基

对 $\mathbf{R}^n$ 的任意一组基, 可用施密特正交化、单位化变为标准正交基, 以 $\mathbf{R}^3$ 中的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为例.

1. 正交化

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1, \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2. \end{aligned}$$

2. 单位化

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|},$$

则 η_1, η_2, η_3 为 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基.

典型例题分析

例 1 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 为 3 维向量空

间 $\mathbf{R}^3$ 的两组基, 求从 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

解 设过渡矩阵为 P , 则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$, 从而

$$\begin{aligned} P &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

注 此题也可利用观察法. 由于

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \beta_2 = 0\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \beta_3 = 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \end{cases}$$

即

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

因此 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 为过渡矩阵.

例 2 设向量组 a_1, a_2, a_3 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基, 且 $\begin{cases} b_1 = 2a_1 + 2ka_3, \\ b_2 = 2a_2, \\ b_3 = a_1 + (k+1)a_3. \end{cases}$

(1) 证明: 向量组 b_1, b_2, b_3 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

(2) 当 k 为何值时, 存在非零向量 e , 使得 e 在基 a_1, a_2, a_3 与基 b_1, b_2, b_3 下的坐标相同? 并求所有的 e .

解 (1) 依题设, 只需证明 b_1, b_2, b_3 线性无关. 依题设,

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, b_3) &= (2a_1 + 2ka_3, 2a_2, a_1 + (k+1)a_3) \\ &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于 a_1, a_2, a_3 线性无关, 且 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, 所以 b_1, b_2, b_3 线性无关, 即 b_1, b_2, b_3 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

(2) 由已知, 设

$$e = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3,$$

即

$$k_1(b_1 - a_1) + k_2(b_2 - a_2) + k_3(b_3 - a_3) = 0,$$

得

$$k_1(a_1 + 2ka_3) + k_2 a_2 + k_3(a_1 + ka_3) = 0$$

有非零解, 即

$$(a_1 + 2ka_3, a_2, a_1 + ka_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0$$

有非零解,故

$$|(a_1 + 2ka_3, a_2, a_1 + ka_3)| = |(a_1, a_2, a_3)| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = 0.$$

由 a_1, a_2, a_3 线性无关知, $|(a_1, a_2, a_3)| \neq 0$, 从而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = 0$, 得 $k = 0$, 所以

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_1 = 0,$$

即 $(k_1 + k_3)a_1 + k_2 a_2 = 0$.

而 a_1, a_2 线性无关, 所以 $k_2 = 0, k_1 = -k_3$, 故 $e = k_1(a_1 - a_3) (k_1 \neq 0)$.

例 3 设向量 r 在 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 2, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, $(y_1, y_2, y_3)^T$ 是 r 在 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标, 且 $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2$, 求基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

解 设

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P. \quad ①$$

依题设

$$r = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ 所以}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad ②$$

将式 ② 两边同时取转置, 得

$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3)(P^{-1})^T,$$

由已知, 有

$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{故} (P^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 即}$$

$$P = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

代入式①,得

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 3, 3)^T, \\ \beta_2 &= 0 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 3, 2)^T, \\ \beta_3 &= 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 1)^T.\end{aligned}$$

习题演练

一、选择题

(1) 若向量组 α, β, γ 线性无关, α, β, δ 线性相关, 则().

- A. α 必可由 β, γ, δ 线性表示
B. β 必不可由 α, γ, δ 线性表示
C. δ 必可由 α, β, γ 线性表示
D. δ 必不可由 α, β, γ 线性表示

(2) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是().

- A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
C. $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$
D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

(3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 则下列选项正确的是().

- A. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关
C. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
D. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

(4) 设有任意两个 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, 若存在两组不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 和 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得

$$(\lambda_1 + k_1)\alpha_1 + \dots + (\lambda_m + k_m)\alpha_m + (\lambda_1 - k_1)\beta_1 + \dots + (\lambda_m - k_m)\beta_m = 0,$$

则().

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 都线性相关
B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 都线性无关
C. $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m, \alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_m - \beta_m$ 线性无关
D. $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m, \alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_m - \beta_m$ 线性相关

(5) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是().

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有一个零向量
B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意两个向量的分量成比例
C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有一个向量是其余向量的线性组合
D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意一个向量是其余向量的线性组合

(6) 若向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m,$$

①

则().

- A. 必定存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得式①成立
B. 必定存在一组全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得式①成立

C. 唯一存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得式 ① 成立

D. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关

(7) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充分必要条件是().

A. 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$

B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关

C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示

D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示

(8) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是().

A. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 都不是零向量

B. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的向量个数 $m \leq n$

C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意两个向量的分量都不成比例

D. 当 n 维向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示时, 表示法唯一

(9) 设向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组(II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则().

A. 当 $r < s$ 时, 向量组(II)必线性相关

B. 当 $r > s$ 时, 向量组(II)必线性相关

C. 当 $r < s$ 时, 向量组(I)必线性相关

D. 当 $r > s$ 时, 向量组(I)必线性相关

(10) n 维向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可用 n 维向量组(II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 且 $r < n, s < n$,

则().

A. 若(I)线性无关, 则 $r \leq s$

B. 若(I)线性相关, 则 $r > s$

C. 若(II)线性无关, 则 $r \leq s$

D. 若(II)线性相关, 则 $r > s$

(11) 设 $AB = O$, A, B 都是非零矩阵, 则().

A. A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

B. A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

C. A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

D. A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

二、填空题

(1) 设行向量组 $(2, 1, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)$ 线性相关, $a \neq 1$, 则 $a =$ _____.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩

为_____.

(3) (仅数学一要求) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2,$

$\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为_____.

三、解答题

(1) 设向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$, 问: 当 a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

(2) 设向量组 $\beta_1 = (0, 1, -1)^T, \beta_2 = (a, 2, 1)^T, \beta_3 = (b, 1, 0)^T$ 与向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -3)^T, \alpha_2 =$

$(3, 0, 1)^T, \alpha_3 = (9, 6, -7)^T$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

(3) 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T, \beta = (3, 10, b, 4)^T$. 问:

(I) 当 a, b 为何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(II) 当 a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并写出表达式.

(4) 设 $\alpha_1 = (2, 3, 5), \alpha_2 = (0, 1, 2), \alpha_3 = (1, 0, 0), \beta_1 = (3, 1, 2), \beta_2 = (1, 1, 1), \beta_3 = (1, 1, -1), \beta_4 = (2, 1, 0)$, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 等价.

(5) 设向量组 (I): $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$, 向量组 (II): $\beta_1 = (1, 1, a + 3)^T, \beta_2 = (0, 2, 1 - a)^T, \beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$, 若向量组 (I) 与向量组 (II) 等价, 求 a 的值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(6) 设 A 是 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维列向量, 且 $A\alpha_1 = \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_3, \dots, A\alpha_{n-1} = \alpha_n, A\alpha_n = 0, \alpha_n \neq 0$, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

(7) 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是 $Ax = 0$ 的解, 证明: $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

(8) (仅数学一要求) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 且

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

(I) 证明: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 并写出由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵 P ;

(II) 设向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(n, n-1, \dots, 2, 1)^T$, 求 α 在 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标.

(9) (仅数学一要求) 设直线 $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与 $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 仅相交

于一点, 令 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} (i = 1, 2, 3)$. 证明: α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

习题演练解答

一、选择题

(1) C.

解 由 α, β, γ 线性无关, 知 α, β 线性无关, α, β, δ 线性相关, 故 δ 可由 α, β 线性表示, 所以 δ 可由 α, β, γ 线性表示.

注 也可用秩来判别. 因为

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ 线性无关} \Rightarrow r(\alpha, \beta, \gamma) = 3 \Rightarrow r(\alpha, \beta) = 2,$$

$$\alpha, \beta, \delta \text{ 线性相关} \Rightarrow r(\alpha, \beta, \delta) < 3 \Rightarrow r(\alpha, \beta, \delta) = 2,$$

所以 $r(\alpha, \beta, \gamma) = r(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$, 故 δ 必可由 α, β, γ 线性表示, C 选项正确.

(2) A.

解 显然,

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0,$$

故 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关.

对于 B, C, D 选项, 可利用结论: 若 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot C$, 则当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow |C| \neq 0$.

如 B 选项, 有

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

(3) A.

解 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0,$$

故

$$A(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s) = A0 = 0,$$

即

$$k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \dots + k_s A\alpha_s = 0,$$

所以 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关. A 选项正确.

注 本题也可利用秩来判别. 因

$$(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s),$$

故

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$, 从而

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) < s,$$

故 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(4) D.

解 D 选项正确. 由已知,

$$\lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + \lambda_m(\alpha_m + \beta_m) + k_1(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + k_m(\alpha_m - \beta_m) = 0,$$

即

$$(\lambda_1 + k_1)\alpha_1 + \dots + (\lambda_m + k_m)\alpha_m + (\lambda_1 - k_1)\beta_1 + \dots + (\lambda_m - k_m)\beta_m = 0,$$

故 $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m, \alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_m - \beta_m$ 线性相关.

(5) C.

解 A, B 选项中的条件是向量组线性相关的充分条件, 但非必要条件, D 选项中的条件不是必要条件, 故 C 选项正确.

(6) D.

解 由线性表示的定义知, 式①中的 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 可能全为 0, 也可能不全为 0, 可能唯一也可能不唯一, 故 A, B, C 选项均可排除.

(7) D.

解 由线性无关的定义知, D 选项正确.

(8) D.

解 由定理: β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

A, C 选项不是线性无关的充分条件.

B 选项是线性无关的必要条件,但不是充分条件,如 $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 4, 6)$, 有 $2 < 3$, 但 α_1, α_2 线性相关.

(9) D.

解 由结论“以少表多, 多的相关”知, D 选项正确.

注 本题也可用秩来判别.

由向量组(I)可由向量组(II)线性表示知, $r(I) \leq r(II)$. 又由于 $r(II) \leq s$, 故 $r(I) \leq s < r$, D 选项正确.

(10) A.

解 由“以少表多, 多的相关”的逆否命题知, A 选项正确.

注 本题也可用秩来判别. 由向量组(I)可由向量组(II)线性表示可知, $r(I) \leq r(II) \leq s$. 又由于向量组(I)线性无关, 故 $r(I) = r$, 于是有 $r \leq s$.

(11) A.

解 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 由 $AB = O$, 知 $r(A) + r(B) \leq n$.

又由于 $A \neq O, B \neq O$, 故

$$0 < r(A) < n, \quad 0 < r(B) < n,$$

由此可知, A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关. 故 A 选项正确.

注 本题也可利用结论: A 的列向量组线性相关 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 有非零解.

由 $AB = O$ 知, B 的列向量都是 $Ax = 0$ 的解.

又因为 $B \neq O$, 所以 $Ax = 0$ 有非零解, 故 A 的列向量组线性相关.

由 $(AB)^T = B^T A^T = O$ 知, A^T 的列向量都是 $B^T x = 0$ 的解; 由 $A \neq O$ 知, $A^T \neq O$, 故 $B^T x = 0$ 有非零解, 所以 B^T 的列向量组线性相关, 从而 B 的行向量组线性相关, 故 A 选项正确.

二、填空题

(1) $\frac{1}{2}$.

解 由已知, 得

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & a & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1) = 0,$$

由于 $a \neq 1$, 故 $a = \frac{1}{2}$.

(2) 2.

解 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 知 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为 3 阶可逆矩阵, 故

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A) = 2.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

解 由

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

得过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

三、解答题

(1) 解 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 作初等行变换, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

当 $a = 0$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1$, 从而线性相关, α_1 是一个极大线性无关组, 且

$$\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1.$$

当 $a \neq 0$ 时, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10+a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故当 $a = -10$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是一个极大线性无关组, 且

$$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4.$$

(2) 解 由 β_3 可用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示知, 方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

有解. 对其增广矩阵作初等行变换, 有

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} \end{array} \right),$$

由非齐次方程组有解知, $\frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} = 0$, 得 $b = 5$.

又由于 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2. 由已知, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩也为 2, 故

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $a = 15$.

(3) 解 设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta. \quad ①$$

对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ 作初等行变换,有

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right).$$

(I) 当 $b \neq 2$ 且 a 为任意实数时,式①无解,即 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(II) 当 $b = 2$ 且 $a \neq 1$ 时,式①有唯一解,解得

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 2, 0)^T,$$

故 β 可唯一表示为 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$;

当 $b = 2$ 且 $a = 1$ 时,式①有无穷多解,解得

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (3, 0, -2)^T + k(-2, 1, 1)^T,$$

故 $\beta = (-2k+3)\alpha_1 + k\alpha_2 + (k-2)\alpha_3$,其中 k 为任意常数.

(4) **证** 证明两个向量组可互为线性表示. 将行向量取转置,令 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)$, $B = (\beta_1^T, \beta_2^T, \beta_3^T)$, $C = (A, B)$,并作初等行变换,将 A 化为等价标准形,有

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 & -2 \end{array}\right),$$

故

$$\beta_1 = \alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = 3\alpha_1 - 8\alpha_2 - 5\alpha_3, \beta_4 = 2\alpha_1 - 5\alpha_2 - 2\alpha_3.$$

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

对 $C = (A, B)$ 作初等行变换,将 B 化为等价标准形,有

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

故

$$\alpha_1 = \frac{9}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 - \beta_4, \alpha_2 = 2\beta_2 - \beta_4, \alpha_3 = -\frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 + \beta_4.$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性表示,从而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 等价.

(5) **解** 对向量组作初等行变换,有

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

当 $a = 1$ 时, $r(I) = r(II) = r(I, II) = 2$,此时向量组(I)与向量组(II)等价.

当 $a \neq \pm 1$ 时, $r(I) = r(II) = r(I, II) = 3$,此时向量组(I)与向量组(II)也等价.

当 $a = -1$ 时, $r(I) = 2 = r(II)$, $r(I, II) = 3$, 此时向量组(I)与向量组(II)不等价.

综上所述, 当 $a \neq -1$ 时, 向量组(I)与向量组(II)等价.

设 $\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$. 当 $a \neq \pm 1$ 时,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2-1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

此时方程组有唯一解 $(1, -1, 1)^T$, 于是

$$\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3;$$

当 $a = 1$ 时, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

此时方程组的通解为 $(-1, 0, 2)^T + k(-2, 1, 1)^T$ (k 为任意常数), 于是

$$\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = (-1-2k)\alpha_1 + k\alpha_2 + (2+k)\alpha_3,$$

其中 k 为任意常数.

(6) 证 用定义法证明. 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0. \quad ①$$

由已知条件, 有

$$A\alpha_1 = \alpha_2,$$

$$A^2\alpha_1 = A\alpha_2 = \alpha_3,$$

$$\vdots$$

$$A^{n-1}\alpha_1 = A^{n-2}\alpha_2 = \cdots = A\alpha_{n-1} = \alpha_n,$$

$$A^n\alpha_1 = A^{n-1}\alpha_2 = \cdots = A\alpha_n = 0.$$

式①两边同时左乘 A^{n-1} , 得 $k_1\alpha_n = 0$. 又由 $\alpha_n \neq 0$, 得 $k_1 = 0$.

依次用 $A^{n-2}, A^{n-3}, \cdots, A$ 左乘式①, 得

$$k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 0,$$

代入式①, 得 $k_n = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

(7) 证 用定义法. 设

$$k\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \cdots + k_t(\beta + \alpha_t) = 0. \quad ①$$

由已知, $A\alpha_i = 0$ ($i = 1, 2, \cdots, t$), 用 A 左乘式①, 得

$$(k + k_1 + k_2 + \cdots + k_t)A\beta = 0,$$

由 $A\beta \neq 0$ 可知

$$k + k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 0. \quad ②$$

又式①可变形为

$$(k + k_1 + \cdots + k_t)\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_t = 0, \quad ③$$

将式②代入式③, 得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_t = 0.$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 故线性无关, 所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0$, 代入式②, 得 $k = 0$, 于是 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

(8) 解 (I) 由已知,有

$$\begin{aligned}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) P,\end{aligned}$$

而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 且 $|P| = 1 \neq 0$, 故 P 可逆, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 即为 $\mathbf{R}^n$ 的一组基.

(II) 由已知,有

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

又由(I)知, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) P^{-1}$, 故

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) P^{-1} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

即 α 在 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标为 $(1, 1, \dots, 1)^T$.

(9) 证 由已知 α_1, α_2 分别是 L_1, L_2 的方向向量, 由于两直线相交于一点, 故 α_1, α_2 线性无关.

又因为点 $P_1(a_2, b_2, c_2) \in L_1$, 点 $P_2(a_3, b_3, c_3) \in L_2$, 且 L_1, L_2 共面, 所以混合积为

$$[\alpha_1, \alpha_2, \overrightarrow{P_1 P_2}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 - a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 - b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 0,$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

又由于 α_1, α_2 线性无关, 因此 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

第四章 线性方程组

考试要求

1. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.
2. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念, 掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.
3. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
4. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

内容与方法提要

一、线性方程组的表达形式

1. 定义

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为齐次线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为非齐次线性方程组, 其中 $b_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 不全为 0.

2. 矩阵形式

$$Ax = b,$$

其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$. 当 $b = 0$ 时, $Ax = b$ 是齐次线性方程组; 当 $b \neq 0$ 时, $Ax = b$ 是非齐次线性方程组.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组的矩阵表达形式.

3. 向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

$$\text{其中 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

例如 $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组的向量表达形式.

二、线性方程组解的性质与结构

1. 齐次线性方程组解的性质

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组解, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 也为 $Ax = 0$ 的解, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 为任意常数.

2. 基础解系

若向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 满足:

- (1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解;
- (2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 为 $Ax = 0$ 全部解的极大线性无关组,

则称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

3. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解

若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_r\eta_r$, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 为任意常数.

4. 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解

设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, η_0 是 $Ax = b$ 的一个解, 则 $Ax = b$ 的通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_r\eta_r + \eta_0$, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 为任意常数.

5. 线性方程组解的性质

- (1) 设 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个解, 则 $\eta_2 - \eta_1$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解.
- (2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一组解, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解的充分必要条件是 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$.
- (3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一组解, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解的充分必要条件是 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 0$.

三、线性方程组的基本理论

设有矩阵 $A_{m \times n}$, 则非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

是方程个数为 m 、未知数个数为 n 的线性方程组.

线性方程组的基本理论实际上是讨论以下三个问题:

- (1) 方程组是否有解?
- (2) 若方程组有解, 解是否唯一?
- (3) 若方程组有解且不唯一, 如何求出其全部解?

对于问题(1)

利用初等行变换将增广矩阵 $\bar{A} = (A, b)$ 化为阶梯形矩阵(初等行变换不改变方程组的解), 即 $(A, b) \rightarrow$ 阶梯形矩阵.

例如 阶梯形矩阵如下列情形:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

其中“ $\times$ ”表示非零元素. 由于最后一个非零行代表的方程为

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = \times \neq 0.$$

显然该方程无解, 故原方程组无解, 因此只要不出现这种情形, 方程组就有解. 这种情形可用秩来刻画, 即

$$Ax = b \text{ 有解} \Leftrightarrow r(A) = r(A, b).$$

对于问题(2)

当 $r(A) = r(A, b)$ 时, 将增广矩阵化为阶梯形矩阵后, $r(A)$ 表示剩下的方程个数, 由于一个方程只能解出一个变量, 故当 $r(A) = r(A, b) = n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

当 $r(A) = r(A, b) < n$ 时, $Ax = b$ 的解不唯一, 且有 $n - r(A)$ 个自由变量.

对于问题(3)

(1) 求齐次线性方程组

$$Ax = 0.$$

当 $r(A) < n$ 时, $Ax = 0$ 有无穷多解 (即有非零解). 要想求出全部解, 只需求出全部解中的一个极大线性无关组, 即一个基础解系即可.

求基础解系的方法如下:

(I) 利用初等行变换将 A 化为阶梯形.

(II) 确定 $n - r(A)$ 个自由变量.

阶梯形矩阵中非每一行第一个非零元素的变量视为自由变量.

例如 阶梯形矩阵为

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \textcircled{1}$$

将式 ① 中第 1, 2 行的第 1 个非 0 元素作记号, 则视 x_2, x_4 为自由变量.

(III) 取自由变量 x_2, x_4 分别为 $x_2 = 1, x_4 = 0$ 和 $x_2 = 0, x_4 = 1$, 便可得 $x_3 = 0, x_1 = -1$ 和 $x_3 = -\frac{1}{2}, x_1 = -\frac{5}{2}$. 从而得到两组解 $\eta_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \eta_2 = \left(-\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$, 故 η_1, η_2 为基础解系, 所以 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

(2) 求非齐次线性方程组

$$Ax = b.$$

根据非齐次线性方程组通解的结构, 只需先求 $Ax = 0$ 的通解 (即求其基础解系), 再求 $Ax = b$ 的一个特解 η_0 , 则 $Ax = b$ 的通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} + \eta_0$, 其中 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

求 $Ax = b$ 的一个特解 η_0 , 只需将自由变量取特殊值, 从阶梯形矩阵最后一个非零行开始, 逐个往上解方程即可.

例如

$$(A, b) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

取自由变量 $x_2 = 0, x_4 = 0$.

由 $2x_3 + x_4 = -1$, 得 $x_3 = -\frac{1}{2}$, 再由 $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$, 得 $x_1 = \frac{1}{2}$. 所以 $Ax = b$ 的一个特

解为 $\eta_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right)^T$.

四、线性方程组的主要定理

定理1 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则

$$Ax = 0 \begin{cases} \text{只有零解} \Leftrightarrow r(A) = n, \\ \text{有非零解} \Leftrightarrow r(A) < n. \end{cases}$$

定理2 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $b_{m \times 1} \neq 0$, 则

$$Ax = b \begin{cases} \text{无解} \Leftrightarrow r(A) \neq r(A, b), \\ \text{有解} \Leftrightarrow r(A) = r(A, b) \end{cases} \begin{cases} \text{有唯一解} \Leftrightarrow r(A) = r(A, b) = n, \\ \text{有无穷多解} \Leftrightarrow r(A) = r(A, b) < n. \end{cases}$$

说明 ① $Ax = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解.

当 $Ax = 0$ 只有零解时, $r(A) = n$, 但 $r(A, b)$ 不一定等于 n , 即 $Ax = b$ 可能无解.

② $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 有非零解.

当 $Ax = 0$ 有无穷多解时, $r(A) < n$, 但 $r(A)$ 与 $r(A, b)$ 不一定相等, 即 $Ax = b$ 可能无解.

③ 设有 $A_{m \times n}$, 若 $r(A) = m$ (即行满秩), 则非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解. 事实上, 此时 $r(A) = r(A, b) = m$, 所以 $Ax = b$ 有解.

典型例题分析

题型一 方程组基本题

例1 求方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解.

解 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵, 有

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

取自由变量分别为 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 和 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 可得基础解系为

$$\eta_1 = (-2, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (4, -5, 0, 1)^T.$$

取自由变量 $x_3 = x_4 = 0$, 可得 $\eta_0 = (2, -3, 0, 0)^T$. 所以通解为

$$k_1(-2, 1, 1, 0)^T + k_2(4, -5, 0, 1)^T + (2, -3, 0, 0)^T \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

例2 设 $A = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix}$.

问: 当 a 为何值时, $Ax = 0$ 有非零解? 并求出全部解; 当 a 为何值时, $Ax = 0$ 只有零解?

解 对 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} B.$$

当 $a = 0$ 时, $r(B) = 1$, 即 $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可得基础解系为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$ (k_1, k_2, k_3 为任意常数).

当 $a \neq 0$ 时, 对 B 作初等行变换, 得

$$B = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} C.$$

当 $a \neq -10$ 时, $r(C) = 4$, 所以 $Ax = 0$ 只有零解.

当 $a = -10$ 时, 有

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(C) = 3 = r(A).$$

取 x_4 为自由变量, 令 $x_4 = 1$, 可得基础解系 $\eta = (1, 1, 1, 1)^T$, 所以通解为 $k\eta$ (k 为任意常数).

例 3 设 $\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3)^T, \alpha_2 = (b_1, b_2, b_3)^T, \alpha_3 = (c_1, c_2, c_3)^T$, 其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0 (i = 1, 2, 3)$, 则三条直线 $a_ix + b_iy + c_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 交于一点的充分必要条件为 ().

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

C. $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2)$

D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 而 α_1, α_2 线性无关

解 三条直线交于一点, 等价于有唯一的 x, y 满足

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0. \end{cases}$$

写成向量形式, 即有唯一的 x, y 使得下列等式成立:

$$x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

即

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 = -\alpha_3,$$

所以 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示, 且表示方法唯一, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 而 α_1, α_2 线性无关, 故 D 选项正确.

注 对于 C 选项: $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2)$, 只能说明 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示, 即三条直线有交点, 但 $r(\alpha_1, \alpha_2)$ 可能为 2 或 1, 所以不能肯定交点只有一个.

题型二 方程组解的判别

例 4 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq O$, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的不同解, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系().

A. 不存在

B. 含有一个非零解向量

C. 含有两个线性无关的解向量

D. 含有三个线性无关的解向量

解 在判别基础解系中所含解向量的个数时, 只需确定 A 的秩即可. 由 $A^* \neq O$ 得 $r(A^*) \geq 1$. 由

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1, \end{cases}$$

知 $r(A) = n-1$ 或 $r(A) = n$.

由 $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$ 是 $Ax = 0$ 的非零解, 得 $r(A) < n$, 故 $r(A) = n-1$, 所以 $n - r(A) = 1$, B 选项正确.

注 题设条件 ξ_3, ξ_4 实际上没有用, 是干扰条件.

例 5 设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维非零列向量, 且秩 $r\left(\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & O \end{pmatrix}\right) = r(A)$, 则下列选项正确的是().

A. 方程组 $Ax = \alpha$ 必有无穷多解

B. 方程组 $Ax = \alpha$ 必有唯一解

C. 方程组 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解

D. 方程组 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解

解 由已知, 有

$$r\left(\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & O \end{pmatrix}\right) = r(A) \leq n < n+1,$$

故 D 选项正确.

对于 A, B 选项, 由

$$r(A) \leq r(A, \alpha) \leq r\left(\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & O \end{pmatrix}\right) = r(A),$$

知 $r(A) = r(A, \alpha)$, 所以 $Ax = \alpha$ 有解, 但不能确定是有无穷多解还是只有唯一解.

注 C 与 D 选项是齐次线性方程组, 齐次线性方程组要么只有零解, 要么有非零解, 因此 C, D 选项必有一个是正确选项, 故可以排除 A, B 选项.

例 6 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的一个基础解系为().

A. α_1, α_3

B. α_1, α_2

C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解 先确定 A^* 的秩.

由已知, $Ax = 0$ 只有一个线性无关的解, 则 $4 - r(A) = 1$, 所以 $r(A) = 3$, 于是 $r(A^*) = 1$, 故 $A^*x = 0$ 的基础解系有 $4 - r(A^*) = 3$ 个线性无关的向量.

又由 $r(A) = 3 < 4$ 知, $|A| = 0$, 故 $A^*A = |A|E = O$, 即 A 的列向量都是 $A^*x = 0$ 的解.

由已知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, 即 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, 得 $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 所以 D 选项

正确.

例 7 设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解的充分必要条件是().

A. A, B 为等价矩阵

B. $A^T x = 0$ 与 $B^T x = 0$ 同解

C. A, B 的行向量组等价

D. A, B 的列向量组等价

解 对于 A 选项, A, B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$, 显然 $r(A) = r(B)$ 只是 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解的必要条件, 而非充分条件, 即同解 $\nRightarrow r(A) = r(B)$, 故排除 A 选项.

对于 B 选项, 举反例, 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 显然 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 但 $A^T x = 0$

与 $B^T x = 0$ 并不同解, 故排除 B 选项.

对于 D 选项, 举反例, 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 A, B 的列向量组等价, 但 $Ax = 0$ 与

$Bx = 0$ 不同解, 故排除 D 选项.

对于 C 选项, 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 考虑:

$$(1) Ax = 0; \quad (2) \begin{cases} Ax = 0, \\ Bx = 0; \end{cases} \quad (3) Bx = 0.$$

(1)(2)(3) 同解, 从而 $r(A) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(B)$. 再由矩阵的秩与行向量组的极大线性无关组的关系, 可

得 A 与 B 的行向量组等价.

反过来, 记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$. 若 A, B 的行向量组等价, 即列向量组 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_m^T$ 与 $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T$

等价, 则存在矩阵 P, Q , 使得

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_m^T) = (\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T)P,$$

$$(\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T) = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_m^T)Q,$$

即 $A = P^T B, B = Q^T A$, 从而由 $Ax = 0$ 知 $Bx = Q^T Ax = 0$, 由 $Bx = 0$ 知 $Ax = P^T Bx = 0$, 所以 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解. 故选 C.

题型三 含有参数的方程组

讨论含有参数的方程组常有以下情形:

(1) 若 A 为 n 阶方阵, 则讨论 $Ax = b$ 时可用行列式讨论. 当 $|A| \neq 0$ 时, $Ax = b$ 有唯一解; 当 $|A| = 0$ 时,

讨论 $r(A)$ 与 $r(A, b)$ 的关系.

(2) 若 A 为 $m \times n$ 矩阵 ($m \neq n$), 则对增广矩阵施行初等行变换解之.

例 8 问 λ 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解? 当有无穷多解时, 求其通解.

解 方程个数 = 未知数个数 = 3, 用行列式讨论.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (5\lambda + 4)(\lambda - 1).$$

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时, $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解.

当 $\lambda = 1$ 时, 有

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

故 $r(A) = r(A, b) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解, 可求得通解为

$$k(0, 1, 1)^T + (1, -1, 0)^T \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, 有

$$\begin{aligned} (A, b) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right), \end{aligned}$$

$r(A) = 2, r(A, b) = 3$, 此时方程组无解.

例 9 设方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 求 a 的值.

解 $Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) \neq r(A, b)$. 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} (A, b) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-3 \end{array} \right), \end{aligned}$$

所以当 $a = -1$ 时, $r(A) = 2, r(A, b) = 3$, 方程组无解.

注 如下计算是错误的: 当 $|A| = -(a+1)(a-3) = 0$, 即 $a = -1$ 或 $a = 3$ 时, 方程组无解. 因为当 $|A| \neq 0$ 时, 方程组有唯一解, 但当 $|A| = 0$ 时, 方程组可能无解, 也可能有无穷多解.

例10 已知 a 是常数, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 经过初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 求:

(1) a 的值;

(2) 满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

解 (1) 依题设, A 与 B 等价, 故 $r(A) = r(B)$. 由于

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

且 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 故对任意的 a , 有 $r(A) = 2$.

又因为 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a$, 且 B 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以

$$r(B) = 2 \Leftrightarrow |B| = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

(2) 满足 $AP = B$ 的 P , 就是 $AX = B$ 的解. 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$(A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

解得

$$P = \begin{pmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{aligned} |P| &= \begin{vmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = k_3 - k_2 \neq 0, \end{aligned}$$

故当 $k_2 \neq k_3$ 时, P 为所求可逆矩阵.

例11 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解. 求:

(1) a 的值;

(2) 方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

解 (1) 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$(A, \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & a(2-a) & a-2 \end{array} \right).$$

因为 $Ax = \beta$ 无解, 所以 $a = 0$.

(2) 由于

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^T \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(A^T A, A^T \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

故所求通解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

例12 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$? 并求所有的矩阵 C .

解 由已知 $AC - CA = B$, 可令 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 故

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0, \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - ax_3 = b. \end{cases}$$

对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right).$$

当 $a \neq -1$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组无解.

当 $a = -1$ 且 $b = 0$ 时, 方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k_1+k_2 \\ -k_1 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

故所求矩阵 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

例13 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(1) 证明: 方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

解 (1) 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是方程组的三个线性无关的解, 则 $\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3$ 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解. 所以 $4 - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$.

又由 A 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 知 $r(A) \geq 2$, 故 $r(A) = 2$.

(2) 对增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换, 有

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a \end{array} \right) \xrightarrow{\text{记}} B.$$

由 $r(A) = 2$ 知, $4-2a = 0, 4a+b-5 = 0$, 解得 $a = 2, b = -3$, 即

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

故可求得通解为

$$k_1(-2, 1, 1, 0)^T + k_2(4, -5, 0, 1)^T + (2, -3, 0, 0)^T \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

说明 本例中用到了结论: 若 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关, 则 $\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3$ 线性无关.

证 设 $k_1(\xi_1 - \xi_2) + k_2(\xi_1 - \xi_3) = 0$, 即

$$(k_1 + k_2)\xi_1 - k_1\xi_2 - k_2\xi_3 = 0,$$

则

$$k_1 + k_2 = 0, \quad -k_1 = 0, \quad -k_2 = 0,$$

解得 $k_1 = k_2 = 0$, 故 $\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3$ 线性无关.

例14 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知 $Ax = b$ 有两个不同的解. 求:

(1) λ, a 的值; (2) $Ax = b$ 的通解.

解 (1) 由 $Ax = b$ 有两个不同的解知, $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 故

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 由

$$\bar{A} = (A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

知, $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$, 故 $Ax = b$ 无解, $\lambda = 1$ 舍去.

当 $\lambda = -1$ 时, 有

$$\bar{A} = (A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right).$$

由 $Ax = b$ 有解知, $a = -2$.

综上所述, $\lambda = -1, a = -2$.

(2) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

可求得通解为 $k(1, 0, 1)^T + \frac{1}{2}(3, -1, 0)^T$, 其中 k 为任意常数.

题型四 抽象方程组

例15 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $(1, -1, 0, 1)^T + k(1, 0, -3, 2)^T$, k 为任意常数, 记 $B = (\alpha_2 + \beta, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$.

(1) 证明: $r(B) = 3$;

(2) 求方程组 $Bx = \beta$ 的通解.

解 (1) 由 $Ax = \beta$ 的通解为 $(1, -1, 0, 1)^T + k(1, 0, -3, 2)^T$ 知

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta) = 3.$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \quad ①$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = \beta, \quad ②$$

故

$$\begin{aligned} r(B) &= r(\alpha_2 + \beta, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \\ &= r(\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \\ &= r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3. \end{aligned}$$

(2) 由 $r(B) = 3$ 知, $Bx = 0$ 有 $5 - 3 = 2$ 个基础解.

由式 ① 和式 ②, 得

$$(\alpha_2 + \beta, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \quad (\alpha_2 + \beta, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

由式 ② 知, $Bx = \beta$ 的特解为 $(0, 1, 0, -1, 1)^T$, 故通解为

$$k_1(1, -1, 0, 0, -1)^T + k_2(0, 2, -3, 0, 1)^T + (0, 1, 0, -1, 1)^T,$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

例16 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(1) 证明: $r(A) = 2$;

(2) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解 (1) 由 A 有 3 个不同的特征值知, $A \sim \Lambda$ (对角矩阵).

由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故 $|A| = 0$, 从而 A 有特征值 $\lambda_3 = 0$. 设 A 的另外 2 个特征值分别为 λ_1, λ_2 (均不为 0), 则

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

即 $r(A) = r(\Lambda) = 2$.

(2) 由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 即

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

可知, $(1, 2, -1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

又由 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta$ 知, $(1, 1, 1)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的解, 故 $Ax = \beta$ 的通解为 $k(1, 2, -1)^T + (1, 1, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.

注 由 $|A| = 0$ 知, A 有特征值 0, 这一结论值得重视, 在考试中已出现多次.

题型五 两个方程组有公共解或同解

1. 求方程组 (I) 与方程组 (II) 的公共解

(1) 若方程组 (I) 与方程组 (II) 已知, 则联立方程组 $\begin{cases} (I) \\ (II) \end{cases}$ 的解就是方程组 (I) 与方程组 (II) 的公

共解.

(2) 若方程组(I)与方程组(II)没有给出,但若可求得方程组(I)的基础解系为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 方程组(II)的基础解系为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 则可设公共解为 γ , 因此有

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \dots + l_t\beta_t,$$

即

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 - \dots - l_t\beta_t = 0,$$

解出 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 及 $l_1, l_2, \dots, l_t$ 即可求得公共解 γ .

2. 方程组(I)与方程组(II)同解

将方程组(I)的解代入方程组(II), 将方程组(II)的解代入方程组(I), 即代入法.

例17 设3阶矩阵 A, B 满足 $r(AB) = r(BA) + 1$, 则().

- A. 方程组 $(A+B)x = 0$ 只有零解
- B. 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 均只有零解
- C. 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 没有公共非零解
- D. 方程组 $ABAx = 0$ 与方程组 $BABx = 0$ 有公共非零解

解 若矩阵 A 满秩, 则 $r(AB) = r(BA) = r(B)$, 故 $r(B) = r(B) + 1$, 这是不可能的, 因此 A 不满秩; 同理可知 B 也不满秩. 因此, 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 均有非零解, 排除B选项.

由于 $r(AB) \leq r(A) \leq 2$, 故 $r(BA) + 1 \leq 2, r(BA) \leq 1$,

$$r\begin{pmatrix} ABA \\ BAB \end{pmatrix} = r\left(\begin{pmatrix} ABA \\ O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ BAB \end{pmatrix}\right) \leq r(ABA) + r(BAB) \leq r(BA) + r(BA) \leq 2.$$

因此, 方程组 $\begin{cases} ABAx = 0, \\ BABx = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵的秩小于3, 方程组有非零解, 故方程组 $ABAx = 0$ 与方程组

$BABx = 0$ 有公共非零解. D选项正确.

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 显然 } r(AB) = r(BA) + 1,$$

方程组 $(A+B)x = 0$ 有非零解 $(0, 0, 1)^T$, 故可排除A选项. 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有公共非零解 $(0, 0, 1)^T$, 故可排除C选项.

综上所述, D选项正确.

例18 设方程组(I)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

与方程组(II)

$$\begin{cases} 3x_1 + ax_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - 5x_3 + (a-1)x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零公共解, 求 a 的值及所有公共解.

解 对联立方程组 $\begin{cases} \text{(I)}, \\ \text{(II)} \end{cases}$ 所得的新方程组的系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & a & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & a-1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由方程组(I)与方程组(II)有非零公共解知, $\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$ 有非零解, 故 $r(A) < 4$, 解得 $a = -1$, 因此可求得

当 $a = -1$ 时, $\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$ 的一个基础解系为 $\eta = (2, 6, 2, 1)^T$, 所以方程组(I)与方程组(II)的所有公共解为 $k\eta$, 其中 k 为任意常数.

例19 设方程组(I): $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ 另一个四元齐次线性方程组(II)的一个基础解系

为 $\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$.

(1) 求方程组(I)的一个基础解系;

(2) 问当 a 为何值时, 方程组(I)与方程组(II)有非零公共解? 并求出全部非零公共解.

解 (1) 对方程组(I)的系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

可求得方程组(I)的一个基础解系为 $\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T$, $\beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T$.

(2) 令 γ 是方程组(I)与方程组(II)的一个非零公共解, 则 $\gamma = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$ (k_1, k_2 不全为 0; l_1, l_2 不全为 0), 即

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 = 0.$$

将 $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ 代入上式得方程组(III)

$$\begin{cases} 5k_1 - 3k_2 - 2l_1 + l_2 = 0, \\ -3k_1 + 2k_2 + l_1 - 2l_2 = 0, \\ k_1 - (a+2)l_1 - 4l_2 = 0, \\ k_2 - l_1 - (a+8)l_2 = 0, \end{cases}$$

且方程组(III)有非零解. 对系数矩阵 B 作初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 5a+5 & -3a-3 \end{pmatrix}.$$

当 $a = -1$ 时, $r(B) < 4$, 方程组(III)有非零解. 此时方程组(III)的同解方程组为

$$\begin{cases} k_1 - l_1 - 4l_2 = 0, \\ k_2 - l_1 - 7l_2 = 0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k_1 = l_1 + 4l_2, \\ k_2 = l_1 + 7l_2, \end{cases}$ 故

$$\begin{aligned} \gamma &= (l_1 + 4l_2)\beta_1 + (l_1 + 7l_2)\beta_2 = l_1(\beta_1 + \beta_2) + l_2(4\beta_1 + 7\beta_2) \\ &= l_1(2, -1, 1, 1)^T + l_2(-1, 2, 4, 7)^T, \end{aligned}$$

其中 l_1, l_2 为任意常数, 且 l_1, l_2 不同时为 0.

例20 已知方程组(I)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

与方程组(II)

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解,求 a, b, c 的值.

解 设方程组(I)的系数矩阵为 A , 方程组(II)的系数矩阵为 B , 方程组(I)与方程组(II)同解, 则 $3 - r(A) = 3 - r(B)$, 故 $r(A) = r(B)$. 依题设, $r(B) \leq 2$, 故 $r(A) = r(B) \leq 2$.

对 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix},$$

由 $r(A) \leq 2$, 得 $a = 2$, 故 $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可求得一个基础解系为 $(-1, -1, 1)^T$. 将 $x_1 = -1, x_2 = -1$,

 $x_3 = 1$ 代入方程组(II)得

$$\begin{cases} -b + c - 1 = 0, \\ -b^2 + c - 1 = 0. \end{cases}$$

解得 $b = 1, c = 2$, 或 $b = 0, c = 1$.当 $b = 1, c = 2$ 时, 对 B 作初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以方程组(II)的解均是方程组(I)的解, 故方程组(I)与方程组(II)同解.

当 $b = 0, c = 1$ 时, 对 B 作初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组(II)的解不是方程组(I)的解, 即方程组(I)与方程组(II)不同解.

综上所述, 当 $a = 2, b = 1, c = 2$ 时, 方程组(I)与方程组(II)同解.

例21 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明: 方程组 $Ax = \alpha$ 的解均为方程组 $Bx = \beta$ 的解;(2) 若方程组 $Ax = \alpha$ 与方程组 $Bx = \beta$ 不同解, 求 a 的值.**解** (1) 先求 $Ax = \alpha$ 的解. 对 (A, α) 作初等行变换, 有

$$(A, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $x_4 = 1$, 得 $Ax = 0$ 的一个基础解系为 $(-1, -2, -1, 1)^T$.

令 $x_4 = 0$, 得 $Ax = \alpha$ 的一个特解为 $(1, 1, 0, 0)^T$. 故 $Ax = \alpha$ 的通解为

$$k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k+1 \\ -2k+1 \\ -k \\ k \end{pmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

又由

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} -k+1 \\ -2k+1 \\ -k \\ k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k+1 \\ -2k+1 \\ -k \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -k+1-k+2k \\ -k+1+2k-1-ak+(a-1)k \\ -2k+2+6k-3-2k-2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta, \end{aligned}$$

知 $Ax = \alpha$ 的解均为方程组 $Bx = \beta$ 的解.

(2) 由第(1)问知, $Ax = \alpha$ 的解均为 $Bx = \beta$ 的解. 若 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 不同解, 则 $Ax = \alpha$ 的解集是 $Bx = \beta$ 的解集的真子集, 从而知 $Ax = 0$ 的解集是 $Bx = 0$ 的解集的真子集, 故有 $r(B) < r(A) = 3$ (由第

(1) 问知 $r(A) = 3$), 而 B 中有 2 阶非零子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, 所以 $r(B) \geq 2$, 故 $r(B) = 2$.

对 B 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-1 & a-3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-1 & a-3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-1 & a-3 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

当且仅当 $a = 1$ 时, $r(B) = 2$, 故 $a = 1$.

注 ① 方程组 $Ax = \alpha$ 的解均是方程组 $Bx = \beta$ 的解等价于方程组 $Ax = \alpha$ 与方程组 $\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$ 同解.

证 方程组 $Ax = \alpha$ 的解集记为 Ω_1 , $Bx = \beta$ 的解集记为 Ω_2 , 方程组 $\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$ 的解集记为 Ω_3 , 则 $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

若 $Ax = \alpha$ 的解均是 $Bx = \beta$ 的解, 则 $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, 从而 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_1$, 即 $\Omega_3 = \Omega_1$, 故 $\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$ 与 $Ax = \alpha$ 同解.

若 $\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$ 与 $Ax = \alpha$ 同解, 则 $\Omega_3 = \Omega_1, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_1$, 从而 $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, 故 $Ax = \alpha$ 的解均是 $Bx = \beta$

的解.

② 若方程组 $Ax = \alpha$ 的解均是 $Bx = \beta$ 的解, 则 (A, α) 的行向量组均能线性表示 (B, β) 的行向量组.

如本例, 对 (A, α) 与 (B, β) 分别作初等行变换, 有

$$(A, \alpha) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B, \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$(1, 0, 1, 2, 1) = (1, 0, 0, 1, 1) + (0, 0, 1, 1, 0),$$

$$(0, 1, 0, 2, 1) = (0, 1, 0, 2, 1),$$

$$(0, 0, a-1, a-1, 0) = (a-1)(0, 0, 1, 1, 0).$$

③ 若方程组 $Ax = \alpha$ 的解均是方程组 $Bx = \beta$ 的解, 但 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 不同解, 则 (A, α) 的行向量组均能线性表示 (B, β) 的行向量组, 但 (B, β) 的行向量组不能线性表示 (A, α) 的行向量组.

如本例, 当 $a \neq 1$ 时, (A, α) 的行向量组与 (B, β) 的行向量组等价, 故 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 同解; 当 $a = 1$ 时, (B, β) 的行向量组不能线性表示 (A, α) 的行向量组.

例22 求一个齐次线性方程组, 使它的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (3, 2, 1, 0)^T.$$

解 设所求齐次线性方程组的系数矩阵为 A , 则有 $A(\alpha_1, \alpha_2) = O$, 取转置, 得

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} A^T = O,$$

故 A^T 的列向量均是齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} x = 0$ 的解向量. 求解齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} x = 0$. 由

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

得一个基础解系为 $\xi_1 = (1, -2, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (2, -3, 0, 1)^T$.

由四元齐次线性方程组的基础解系有 2 个向量知, $r(A) = 2 \Rightarrow r(A^T) = 2$, 故可取

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{从而 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注 由于基础解向量不唯一, 所以所求 A 不唯一.

习题演练

一、选择题

(1) 设 A 为 n 阶方阵, $r(A) = n - 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 的 3 个线性无关的解向量, 则 $Ax = 0$ 的基础解系为().

- A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ B. $2\alpha_2 - \alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$
C. $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ D. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2, -\alpha_1 - 2\alpha_3$

(2) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = r$, 对非齐次线性方程组 $Ax = b$, 有().

- A. 当 $r = m$ 时, $Ax = b$ 有解 B. 当 $r = n$ 时, $Ax = b$ 有唯一解
C. 当 $m = n$ 时, $Ax = b$ 有唯一解 D. 当 $r < n$ 时, $Ax = b$ 有无穷多解

(3) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $Ax = 0$ 只有零解的充分条件是().

- A. A 的列向量组线性无关 B. A 的列向量组线性相关
C. A 的行向量组线性无关 D. A 的行向量组线性相关

(4) 已知非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解为 α_1, α_2 , 则() 一定是 $Ax = b$ 的解.

- A. $\alpha_1 + \alpha_2$ B. $\alpha_1 - \alpha_2$
C. $2\alpha_2 + \alpha_1$ D. $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 则().

- A. 当 $n > m$ 时, 方程组 $ABx = 0$ 只有零解 B. 当 $m > n$ 时, 方程组 $ABx = 0$ 有非零解
C. 当 $n > m$ 时, 有 $r(AB) < m$ D. 当 $m > n$ 时, 矩阵 AB 必可逆

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要

条件是().

- A. $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ B. $a \notin \Omega, d \in \Omega$
C. $a \in \Omega, d \notin \Omega$ D. $a \in \Omega, d \in \Omega$

(7) 设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$, 其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵.

- ① 若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解, 则 $r(A) \geq r(B)$.
② 若 $r(A) \geq r(B)$, 则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解.
③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则 $r(A) = r(B)$.
④ 若 $r(A) = r(B)$, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题正确的是().

- A. ①② B. ①③
C. ②④ D. ③④

(8) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解向量, $r(A) = 3$, $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T$, 则 $Ax = b$ 的通解为(), k 为任意常数.

- A. $(1, 2, 3, 4)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$ B. $(1, 2, 3, 4)^T + k(0, 1, 2, 3)^T$
C. $(1, 2, 3, 4)^T + k(2, 3, 4, 5)^T$ D. $(1, 2, 3, 4)^T + k(3, 4, 5, 6)^T$

(9) (仅数学一要求) 设点 $P_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3)$ 为平面上 3 个不同的点, 且

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix},$$

则 3 点 P_1, P_2, P_3 在同一直线上的充分必要条件是().

A. $r(A) = 1$

B. $r(A) = 2$

C. $|A| = 0$

D. $|A| \neq 0$

(10) 设 3×4 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 若方程组 $Ax = 0$ 仅有一个基础解 $(1, 0, 1, -1)^T$, 则有非零解的方程组为().

A. $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)y = 0$

B. $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)y = 0$

C. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)y = 0$

D. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)y = 0$

二、填空题

(1) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 $A \neq O$, 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 使 $AB = O$, 则 $Ax = 0$ 的通解为_____.

(2) 设 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 A , 3 阶矩阵 $B \neq O$, 且 $AB = O$, 则 $\lambda =$ _____.

(3) 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & k+2 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $k =$ _____.

三、解答题

(1) 求方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$ 的通解.

(2) 设 B 是 3 阶方阵, $B \neq O$, 且 B 的每一列均为方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + kx_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的解, 求 k 与行列式 $|B|$ 的值.

(3) 已知 $\alpha = (0, 1, 0)^T$ 是方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + mx_2 + 2x_3 = 1, \\ nx_1 + 3x_2 + px_3 = t \end{cases}$ 的解, 求该方程组的通解.

(4) 设 $\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + (2a+1)x_2 - x_3 = 1, \\ (a^2-4)x_1 - x_2 - x_3 = 2a-1, \end{cases}$ 问 a 为何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解? 并求出通解.

(5) 已知 3 阶矩阵 A 的第 1 行为 (a, b, c) (a, b, c 不全为 0), $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$, 且 $AB = O$, 求方程组

$Ax = 0$ 的通解.

(6) 设 A 是 5×4 矩阵, $r(A) = 2$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $Ax = b$ 的 3 个解, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = (4, 6, -8, 4)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, -1, 1)^T$. 又知 $(0, 1, -3, 0)^T$ 为 $Ax = 0$ 的解, 求 $Ax = b$ 的通解.

(7) 设 A 是 3 阶矩阵, $A = (a_{ij})$, 且 $a_{ij} = A_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), 其中 A_{ij} 表示 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式, $a_{33} = 1$, 求方程组 $Ax = b$ 的通解, 其中 $b = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$.

(8) 设非齐次线性方程组 ① 与 ② 分别为

$$\textcircled{1} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases}$$

(I) 求方程组 ① 的通解;

(II) 当 m, n, t 为何值时, 方程组 ① 与 ② 同解?

(9) 设 A 是 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系. $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \dots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$, 其中 t_1, t_2 为实数. 问: 当 t_1, t_2 满足什么条件时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也是 $Ax = 0$ 的一个基础解系?

(10) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对 (I) 中任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明: ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(11) 设 4×3 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 若非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $(1, 2, -1)^T + k(1, -2, 3)^T$, 令 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_3)$, 则求非齐次线性方程组 $Bx = \alpha_1 - \alpha_2$ 的通解.

习题演练解答

一、选择题

(1) A.

解 由已知条件, 只要判别向量组线性无关即可. 因为

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 故 A 选项正确.

(2) A.

解 当 $r(A) = r = m$ 时, 即 A 行满秩, 故

$$r(A | b) = r(A) = r = m,$$

所以 $Ax = b$ 必有解.

B, C, D 选项的条件都不能证明 $r(A) = r(A | b)$, 即 $Ax = b$ 不一定有解.

(3) A.

解 当 A 的列向量组线性无关时, $r(A) = n$, 故 $n - r(A) = 0$, 即 $Ax = 0$ 只有零解.

(4) D.

解 由 $k_1 + k_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 知, $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 是 $Ax = b$ 的解.

(5) B.

解 B 选项正确, 因为 $r(AB) \leq r(A) \leq n < m$, 且 AB 是 $m \times m$ 矩阵, 故 $|AB| = 0$, 即 $ABx = 0$ 有非零解.

(6) D.

解 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$. 由

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 3 & a^2-1 & d^2-1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & d^2-3d+2 \end{array} \right),\end{aligned}$$

得

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0, \\ d^2 - 3d + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \Omega, d \in \Omega.$$

故 D 选项正确.

(7) B.

解 对于 ①, 由已知, $n - r(A) \leq n - r(B)$, 即 $r(A) \geq r(B)$, 故 ① 正确.

对于 ②, 当 $r(A) \geq r(B)$ 时, $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的解未必有关系, 故 ② 不正确.

对于 ③, 由 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解知, $n - r(A) = n - r(B)$, 即 $r(A) = r(B)$, 故 ③ 正确.

对于 ④, 当 $r(A) = r(B)$ 时, $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的解未必有关系, 故 ④ 不正确.

故选 B.

(8) C.

解 由已知, $Ax = 0$ 有 $4 - r(A) = 4 - 3 = 1$ 个基础解.

由线性方程组解的性质与结构知

$$2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3) = (2, 3, 4, 5)^T \neq 0$$

是 $Ax = 0$ 的解, 所以 $Ax = b$ 的通解为

$$\alpha_1 + k[2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3)] = (1, 2, 3, 4)^T + k(2, 3, 4, 5)^T.$$

(9) B.

解 由 P_1, P_2, P_3 在 xOy 面上, 且在同一直线上知, 空间中 3 点 $M_1(x_1, y_1, 1), M_2(x_2, y_2, 1), M_3(x_3, y_3, 1)$ 在同一平面 $z = 1$ 上, 即它们是在同一空间直线上的 3 个不同的点, 因此 3 个向量 $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$ 的秩为 2, 故 B 选项正确.

(10) B.

解 由 $Ax = 0$ 仅有一个基础解知, $\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$, 则 $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)y = 0$ 有非零解 $(1, 1, -1)^T$, 故 B 选项正确.

对于 A 选项,若 $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)y = 0$ 有非零解 $(k_1, k_2, k_3)^T$, 则

$$k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4 = 0,$$

故 $0 \cdot \alpha_1 + k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4 = 0$, 则原方程组 $Ax = 0$ 有另一个基础解 $(0, k_1, k_2, k_3)^T$, 这与 $Ax = 0$ 仅有一个基础解矛盾.

同理, C, D 选项均不成立.

二、填空题

(1) $k_1(1, 4, 7)^T + k_2(2, 5, 8)^T$ (k_1, k_2 为任意常数).

解 由 $AB = O$, 得 $r(A) + r(B) \leq 3$. 又由于 $r(B) = 2$, 故

$$r(A) \leq 3 - r(B) = 1,$$

又 $A \neq O$, 知 $r(A) \geq 1$, 所以 $r(A) = 1$. 由 $n - r(A) = 3 - 1 = 2$ 知, $Ax = 0$ 有两个线性无关解. 又 B 的列向量均是 $Ax = 0$ 的解, 取

$$\alpha_1 = (1, 4, 7)^T, \alpha_2 = (2, 5, 8)^T,$$

而 α_1, α_2 线性无关, 故 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 即

$$k_1(1, 4, 7)^T + k_2(2, 5, 8)^T \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

(2) 1.

解 由 $AB = O, B \neq O$ 知, $Ax = 0$ 有非零解, 故

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $\lambda = 1$.

(3) -1.

解

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k+2 & 3 \\ 1 & k & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+2k & 3 \\ 0 & 1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & (k-3)(k+1) & k-3 \end{array} \right).$$

当 $k = 3$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 方程组有解;

当 $k = -1$ 时, $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解, 故 $k = -1$.

三、解答题

(1) **解** 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

取 x_3 为自由变量, 令 $x_3 = 0$, 得 $x_4 = 6, x_2 = -8, x_1 = 3$, 得特解为 $(3, -8, 0, 6)^T$.

令 $x_3 = 1$, 得 $x_4 = 0, x_2 = 2, x_1 = -1$, 得基础解系为 $(-1, 2, 1, 0)^T$, 故通解为

$$(3, -8, 0, 6)^T + k(-1, 2, 1, 0)^T \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

(2) 解 由 $B \neq O$, B 的每一列是齐次线性方程组的解可知, $Ax = 0$ 有非零解, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & k \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

故 $r(A) < 3$, 于是 $|A| = 0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & k \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5(k-1) = 0,$$

得 $k = 1$. 又当 $k = 1$ 时, $r(A) = 2$, 故 $Ax = 0$ 有 $3 - r(A) = 1$ 个基础解. 而 B 的 3 列是 $Ax = 0$ 的解, 从而有 $r(B) \leq 1$, 故 $|B| = 0$.

(3) 解 若直接将 $\alpha = (0, 1, 0)^T$ 代入方程组, 可得 $m = 1, t = 3$, 但 n 与 p 不能确定. 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ n & 3 & p & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3+n & p+2n & 3+n \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & n+p-3 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

当 $n+p \neq 3$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 方程组有唯一解 $\alpha = (0, 1, 0)^T$;

当 $n+p = 3$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 方程组有无穷多解, 由

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得 $(1, -1, 1)^T$ 为基础解, 故方程组的通解为 $(0, 1, 0)^T + k(1, -1, 1)^T$ (k 为任意常数).

(4) 解 对增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换, 有

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ a & 2a+1 & -1 & 1 \\ a^2-4 & -1 & -1 & 2a-1 \end{array} \right).$$

为方便, 调整未知数 x_1, x_2, x_3 的位置为 x_3, x_2, x_1 , 则增广矩阵改为

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 1 \\ -1 & 2a+1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a^2-4 & 2a-1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 1 \\ 0 & a+1 & a+2 & 2 \\ 0 & -(a+1) & a^2-2 & 2a \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 1 \\ 0 & a+1 & a+2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+a & 2a+2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

当 $a = 0$ 时, $r(A) = 2, r(A|b) = 3$, 方程组无解;

当 $a^2+a \neq 0$, 即 $a \neq 0$ 且 $a \neq -1$ 时, 方程组有唯一解, 解得

$$x_1 = \frac{2a+2}{a^2+a} = \frac{2}{a} \quad (\text{未知数排列位置已调整}),$$

$$x_2 = \frac{1}{a+1} \left[2 - \frac{2}{a}(a+2) \right] = \frac{-4}{a(a+1)},$$

$$x_3 = 1 - \frac{4}{a+1} - \frac{4}{a};$$

当 $a = -1$ 时, $r(A) = r(A|b) = 2 < 3$, 有无穷多解.

选 x_2 为自由变量, 令 $x_2 = 0$, 解得 $x_1 = 2, x_3 = -3$, 故特解为 $(2, 0, -3)^T$, 解齐次线性方程组, 令 $x_2 = 1$, 解得 $x_1 = 0, x_3 = -1$, 故基础解系为 $(0, 1, -1)^T$, 于是所求通解为

$$(2, 0, -3)^T + k(0, 1, -1)^T \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

注 由于增广矩阵中含有字母, 故调整 x_1, x_2, x_3 的位置, 这是简化计算的一种方法.

(5) **解** 由 $AB = O$ 知, $r(A) + r(B) \leq 3$, 又由 a, b, c 不全为 0 知, $r(A) \geq 1$.

当 $k \neq 9$ 时, $r(B) = 2$, 于是 $r(A) = 1$;

当 $k = 9$ 时, $r(B) = 1$, 故 $r(A) = 1$ 或 $r(A) = 2$.

当 $k \neq 9$ 时, 由 $AB = O$ 知, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = O, A \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix} = O$, 且 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (3, 6, k)^T$ 线性无关, 故 $Ax = O$

的通解为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 为任意常数).

当 $k = 9$ 时, 若 $r(A) = 2$, 则 $Ax = O$ 的基础解系由一个解向量构成, 因 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = O$, 故 $Ax = O$ 的通解

为 $k_3(1, 2, 3)^T$ (k_3 为任意常数).

若 $r(A) = 1$, 则 $Ax = O$ 的基础解系由两个线性无关的解向量构成, 因 a, b, c 不全为 0, 所以 $Ax = O$ 等价于 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, 不妨设 $a \neq 0$, 则

$$\alpha_3 = (-b, a, 0)^T, \alpha_4 = (-c, 0, a)^T$$

为 $Ax = O$ 的基础解, 故通解为 $k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$ (k_3, k_4 为任意常数).

(6) **解** 由已知条件及 $Ax = b$ 的通解结构知, 只需求 $Ax = O$ 的基础解系. 由于 $4 - r(A) = 4 - 2 = 2$, $(0, 1, -3, 0)^T$ 是 $Ax = O$ 的一个解, 故只需再求一个与 $(0, 1, -3, 0)^T$ 线性无关的解.

由

$$A(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 - 2A\alpha_3 = b + b - 2b = O$$

知

$$\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = (4, 6, -8, 4)^T - 2(1, 2, -1, 1)^T = (2, 2, -6, 2)^T$$

是 $Ax = O$ 的解, 且与 $(0, 1, -3, 0)^T$ 线性无关, 所以 $Ax = b$ 的通解为

$$(1, 2, -1, 1)^T + k_1(0, 1, -3, 0)^T + k_2(2, 2, -6, 2)^T,$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

(7) **解** 注意到 b 为 A 中的第 3 列, 又由已知 $a_{ij} = A_{ij}$, 有

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \geq 1,$$

故 $Ax = b$ 有唯一解 $x = A^{-1}b$. 而

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(8) 解 (I) 对方程组 ① 的增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right),$$

故 $r(\bar{\mathbf{A}}_1) = 3$. 取 x_4 为自由变量, 令 $x_4 = 0$, 得特解为 $(-2, -4, -5, 0)^T$. 令 $x_4 = 1$, 得 $(1, 1, 2, 1)^T$, 故方程组 ① 的通解为 $(-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T$ (k 为任意常数).

(II) 将方程组 ① 的通解 $x_1 = -2+k, x_2 = -4+k, x_3 = -5+2k, x_4 = k$ 代入方程组 ② 化简, 得

$$\begin{cases} (m-2)(k-4) = 0, \\ (n-4)(k-4) = 0, \\ t = 6. \end{cases}$$

由于 k 是任意常数, 故 $m = 2, n = 4, t = 6$, 此时方程组 ① 的解都是方程组 ② 的解, 当 $n = 4$ 时, $r(\mathbf{A}_2) = r(\bar{\mathbf{A}}_2) = 3$, 方程组 ② 的通解为 $(-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T$, 且都是方程组 ① 的解, 故方程组 ① 与 ② 同解.

(9) 解 要使 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系. 只需满足:

(I) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解;

(II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关且 $s = n - r(\mathbf{A})$.

由已知, $\beta_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 根据齐次线性方程组解的性质, 知 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 也是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解.

依题设可知, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 故 $s = n - r(\mathbf{A})$, 于是只要 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关即可.

设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = \mathbf{0}$, 将 $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \dots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$ 代入其中, 得

$$(t_2k_s + t_1k_1)\alpha_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\alpha_2 + \dots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\alpha_s = \mathbf{0}.$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 得

$$\begin{cases} t_2k_s + t_1k_1 = 0, \\ t_2k_1 + t_1k_2 = 0, \\ t_2k_2 + t_1k_3 = 0, \\ \vdots \\ t_2k_{s-1} + t_1k_s = 0, \end{cases} \quad \text{①}$$

可求得系数行列式为

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s.$$

所以当 $t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s \neq 0$ 时, 方程组 ① 只有零解, 即 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, 从而 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.

综上所述,当 $t_1^i + (-1)^{(s+1)} t_2^i \neq 0$ 时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

注 计算线性方程组 ① 的系数行列式,可按第 1 行展开.

(10) **解** (I) 由

$$(A, \xi_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

得基础解系为 $(-1, 1, -2)^T$, 一个特解为 $(0, 0, 1)^T$, 故 $Ax = \xi_1$ 的通解为 $(0, 0, 1)^T + k_1(-1, 1, -2)^T$, 即 $\xi_2 = (-k_1, k_1, 1-2k_1)^T$, 其中 k_1 为任意常数.

由于 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, 考虑 $A^2x = \xi_1$, 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$(A^2, \xi_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

取 $x_2 = k_2, x_3 = k_3$, 则 $x_1 = -\frac{1}{2} - k_2$, 即 $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2} - k_2, k_2, k_3\right)^T$, 其中 k_2, k_3 为任意常数.

(II) 由于行列式

$$|(\xi_1, \xi_2, \xi_3)| = \begin{vmatrix} -1 & -k_1 & -\frac{1}{2} - k_2 \\ 1 & k_1 & k_2 \\ -2 & 1-2k_1 & k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k_1 & k_2 \\ -2 & 1-2k_1 & k_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

故 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

注 此题若能发现 $A\xi_1 = 0$, 那么 (II) 可用定义法证明.

设存在数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0, \quad (1)$$

式 ① 两边同时左乘 A , 得 $k_2A\xi_2 + k_3A\xi_3 = 0$, 即

$$k_2\xi_1 + k_3A\xi_3 = 0, \quad (2)$$

式 ② 两边同时左乘 A , 得 $k_3A^2\xi_3 = 0$, 即 $k_3\xi_1 = 0$.

又因为 $\xi_1 \neq 0$, 所以将 $k_3 = 0$ 代入式 ②, 得 $k_2\xi_1 = 0$, 故 $k_2 = 0$, 代入式 ①, 得 $k_1 = 0$, 故 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(11) **解** 由 $Ax = \beta$ 的通解, 得 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3 - 1 = 2$, 且

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \beta, \quad (1)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \quad (2)$$

故

$$r(B) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2,$$

从而 $Bx = 0$ 有 $4 - r(B) = 2$ 个线性无关的解.

$$\text{由式 ② 知, } B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

$$\text{由式 ① 知, } B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0.$$

$$\text{又由于 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 - \alpha_2, \text{ 故所求通解为}$$

$$k_1(1, -2, 3, 0)^T + k_2(1, 2, 0, -1)^T + (1, -1, 0, 0)^T,$$

其中 k_1, k_2 是任意常数.

第五章 相似矩阵

考试要求

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质, 会求矩阵的特征值和特征向量.
2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件, 掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.
3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

第一节 特征值与特征向量

内容与方法提要

特征值与特征向量的概念与性质

1. 定义

设 A 为 n 阶矩阵, 若

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0), \quad ①$$

则称 λ 是 A 的特征值, α 是 A 的属于 λ 的特征向量.

将式 ① 变形为 $(\lambda E - A) \cdot \alpha = 0, \alpha \neq 0$, 即齐次线性方程组 $(\lambda E - A)\alpha = 0$ 有非零解. 称 $|\lambda E - A|$ 为 A 的特征多项式, 即

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - \sum_{i=1}^n a_{ii} \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|. \end{aligned}$$

2. 求特征值与特征向量

方法一: $\begin{cases} \text{解方程 } |\lambda E - A| = 0, \text{ 得特征值 } \lambda, \\ \text{解方程组 } (\lambda E - A)\alpha = 0, \text{ 得特征向量 } \alpha. \end{cases}$

方法二: 利用定义 $A\alpha = \lambda\alpha (\alpha \neq 0)$.

3. 特征值的性质

设 A 为 n 阶矩阵, A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

(1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A)$, 称 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ 为 A 的迹.

(2) $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$.

说明 ① 以 2 阶矩阵为例, 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 则

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
 &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A|.
 \end{aligned}$$

设 A 的特征值为 λ_1, λ_2 , 则

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

故 $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \\ \lambda_1\lambda_2 = |A|. \end{cases}$

② 若 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum_{i=1}^3 a_{ii}\lambda^2 + k\lambda + (-1)^3 |A|,$$

其中 $k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

4. 特征向量的性质

(1) A 的不同特征值对应的特征向量是线性无关的.

说明 设 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, \alpha_1 \neq 0, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \alpha_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$. 证明: α_1, α_2 线性无关.

证 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0, \quad ①$$

用 A 左乘式 ①, 得 $k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 = 0$, 即

$$k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0. \quad ②$$

式 ① 乘以 λ_1 减去式 ②, 得 $k_2\lambda_1\alpha_2 - k_2\lambda_2\alpha_2 = 0$, 即

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2 = 0.$$

由 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$, 得 $k_2 = 0$, 代入式 ①, 得 $k_1\alpha_1 = 0$. 又由 $\alpha_1 \neq 0$, 知 $k_1 = 0$, 故 α_1, α_2 线性无关.

(2) 设 A 为 n 阶矩阵, λ_k 为 A 的 k 重特征值 ($k \geq 1$), 则属于 λ_k 的线性无关的特征向量个数不超过 k 个.

(3) 设 A 为 n 阶矩阵, $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$, 其中 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$, 则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

证 用反证法. 若 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量, 则存在 λ_0 使得

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_0(\alpha_1 + \alpha_2),$$

故 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 = \lambda_0\alpha_1 + \lambda_0\alpha_2$, 即 $(\lambda_1 - \lambda_0)\alpha_1 + (\lambda_2 - \lambda_0)\alpha_2 = 0$. 又因为 α_1, α_2 线性无关, 所以 $\lambda_1 = \lambda_0, \lambda_2 = \lambda_0$, 即 $\lambda_1 = \lambda_2$, 矛盾. 故 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

简单地说, 不同特征值对应的特征向量之和不是 A 的特征向量.

典型例题分析

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$, 求 A 的全部特征值和特征向量.

解 由于

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 0 & 18 - \lambda & \lambda - 18 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 4 & 2 \\ 2 & \lambda - 10 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda - 18 \end{vmatrix} = (\lambda - 18) \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 4 \\ 2 & \lambda - 10 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= (\lambda - 18)(\lambda^2 - 27\lambda + 162) = (\lambda - 18)^2(\lambda - 9) = 0,$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 18, \lambda_3 = 9$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 18$, 对方程 $(18E - A) \cdot x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$18E - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-2, 0, 1)^T$, 故 $\lambda = 18$ 对应的全部特征向量为

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0).$$

对于 $\lambda_3 = 9$, 对方程 $(9E - A) \cdot x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$9E - A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系 $\alpha_3 = (1, 2, 2)^T$, 故 $k_3 \alpha_3 (k_3 \neq 0)$ 为 $\lambda = 9$ 对应的全部特征向量.

注 特征向量不能是零向量.

例 2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量.

解 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 & 0 \\ -4 & -5 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$.

对于 $\lambda_1 = 1$, 对方程 $(1E - A)x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

解得基础解系 $\alpha_1 = \left(1, -1, \frac{1}{5}\right)^T$, 故 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $k_1 \alpha_1 (k_1 \neq 0)$.

对于 $\lambda_2 = 3$, 对方程 $(3E - A)x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$3E - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\alpha_2 = (0, 3, -5)^T$, 故 $\lambda_2 = 3$ 对应的特征向量为 $k_2 \alpha_2 (k_2 \neq 0)$.

对于 $\lambda_3 = 6$, 对方程 $(6E - A)x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$6E - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$, 故 $\lambda_3 = 6$ 对应的特征向量为 $k_3 \alpha_3 (k_3 \neq 0)$.

例 3 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量.

解 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 & -6 \\ -6 & -3 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 13) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 13$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 对方程 $(0E - A) \cdot x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$0E - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & -6 \\ -6 & -3 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\alpha_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)^T, \alpha_2 = \left(-\frac{3}{2}, 0, 1\right)^T$, 故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 对应的特征向量为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0).$$

对于 $\lambda_3 = 13$, 对方程 $(13E - A) \cdot x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$13E - A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -3 \\ -4 & 11 & -6 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\alpha_3 = (1, 2, 3)^T$, 故 $\lambda_3 = 13$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3 (k_3 \neq 0)$.

注 ① $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2, 1, 3)$ (因 $r(A) = 1$) $\stackrel{\text{记}}{=} \alpha\beta^T$.

② 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 的秩为 1, 则

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum_{i=1}^3 a_{ii} \lambda^2 + k\lambda + (-1)^3 |A|,$$

$$\text{其中 } k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由 $r(A) = 1$ 知, $k = 0, |A| = 0$, 故由

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \sum_{i=1}^3 a_{ii} \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - \sum_{i=1}^3 a_{ii}) = 0,$$

得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sum_{i=1}^3 a_{ii}$.

例 4 (1) 设 α 是 A 的特征向量, 证明: α 是 A^2 的特征向量.

(2) 若 α 是 A^2 的特征向量, 问 α 是否是 A 的特征向量?

(3) 若 n 阶矩阵 A 可逆, α 是 A^3 与 A^5 的特征向量, 问 α 是否是 A 的特征向量?

解 (1) 设 $A\alpha = \lambda\alpha (\alpha \neq 0)$, 则 $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$, 故 α 是 A^2 的特征向量.

(2) 若 α 是 A^2 的特征向量, 则 α 不一定是 A 的特征向量.

如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 取 $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则

$$A^2\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = 0 \cdot \alpha,$$

即 α 是 A^2 的特征向量,但因为

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 α 不是 A 的特征向量.

(3) 由 A 可逆知, A^3 和 A^5 都可逆,故 A^3 和 A^5 的特征值全部不为 0.

设 $A^3\alpha = \lambda\alpha$, 两边同时左乘 A^3 , 得

$$A^6\alpha = \lambda A^3\alpha = \lambda^2\alpha. \quad ①$$

设 $A^5\alpha = \mu\alpha$, 两边同时左乘 A , 得

$$A^6\alpha = \mu A\alpha. \quad ②$$

由式 ① 和式 ② 知, $A\alpha = \frac{\lambda^2}{\mu}\alpha$, 即 α 是 A 的特征向量.

例 5 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明:

(1) A 的特征值只能是 1 或 0;

(2) A 可相似对角化.

证 (1) 设 $A\xi = \lambda\xi$ ($\xi \neq 0$), 由 $A^2 = A$, 有

$$A^2\xi = A\xi = \lambda\xi = \lambda^2\xi,$$

故 $\lambda(\lambda - 1)\xi = 0$.

又因为 $\xi \neq 0$, 所以 $\lambda(\lambda - 1) = 0$, 从而 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$, 即 A 的特征值只能是 1 或 0.

(2) 由于 $A - A^2 = A(E - A) = O$, 故 $r(A) + r(E - A) \leq n$.

另外, 因为

$$r(A) + r(E - A) \geq r(A + E - A) = r(E) = n,$$

所以 $r(A) + r(E - A) = n$.

对于特征值 1, 因为 $(1E - A)\alpha = 0$ 的解空间的维数为 $n - r(E - A) = r(A)$, 所以 A 的对应于特征值 1 的线性无关的特征向量个数为 $r(A)$.

对于特征值 0, 因为 $(0E - A)\alpha = 0$ 的解空间的维数为 $n - r(A) = r(E - A)$, 所以 A 的对应于特征值 0 的线性无关的特征向量个数为 $r(E - A)$.

又由 $r(A) + r(E - A) = n$ 知, A 有 n 个线性无关的特征向量, 故 A 可相似对角化.

例 6 设 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 证明: A 的特征向量也是 B 的特征向量的充分必要条件是 $AB = BA$.

证 对抽象矩阵的特征值与特征向量的讨论, 一般采用定义法.

充分性 设 A 有特征向量 α , 对应的特征值为 λ , 则

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0), \quad ①$$

两边同时左乘 B , 得 $BA\alpha = AB\alpha = \lambda B\alpha$.

若 $B\alpha \neq 0$, 则由式 ① 知, $B\alpha$ 也是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量. 又因为 A 有 n 个不同的特征值, 即 A 的特征值都是单根. 所以对应每个特征值的线性无关的特征向量只有一个, 从而 $B\alpha, \alpha$ 是线性相关的, 即有 $B\alpha = \mu\alpha$, 于是 α 也是 B 的特征向量.

若 $B\alpha = 0$, 则 $B\alpha = 0 = 0\alpha$, 即 α 也是 B 的特征向量.

必要性 由 A 有 n 个不同的特征值知,存在可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP = \Lambda_1$.

由于 A 与 B 的特征向量相同,故存在同一个可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}BP = \Lambda_2$,从而 $A = P\Lambda_1P^{-1}$, $B = P\Lambda_2P^{-1}$,于是

$$AB = P\Lambda_1P^{-1} \cdot P\Lambda_2P^{-1} = P\Lambda_1\Lambda_2P^{-1} = P\Lambda_2\Lambda_1P^{-1} = P\Lambda_2P^{-1} \cdot P\Lambda_1P^{-1} = BA,$$

即 $AB = BA$.

注 若 n 阶矩阵 A 可逆,则 $AB \sim BA$. 只要取 $P = A$,则

$$P^{-1}ABP = A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = BA,$$

故 $AB \sim BA$.

第二节 矩阵相似

内容与方法提要

一、矩阵 A 相似于对角矩阵

1. 定义

设 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关时,记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 P 可逆,记 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 故 $AP = P\Lambda$,

即 $P^{-1}AP = \Lambda$, 称 A 相似于 Λ , 记作 $A \sim \Lambda$.

2. 矩阵 A 相似于对角矩阵的条件

设 A 为 n 阶矩阵:

- (1) 充分条件: A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A \sim \Lambda$.
- (2) 充分必要条件: $A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- (3) 充分必要条件: $A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 的 k 重特征值对应 k 个线性无关的特征向量.

3. 相似的定义

设 A 与 B 都是 n 阶矩阵,若存在可逆矩阵 P ,使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 与 B 相似,记作 $A \sim B$.

4. 相似对角化的步骤

对于 $A_{n \times n}$, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 的步骤如下:

- (1) 由 $|\lambda E - A| = 0$, 求 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
- (2) 对于每个 λ_i , 由 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 求基础解系, 这些基础解系构成了 A 的一组特征向量.
- (3) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 当 P 可逆时, 有

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

说明 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 中向量的排列顺序与 Λ 中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的排列顺序一致.

二、特征值与特征向量的常用结论

矩 阵	A	A^n	$A + kE$	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$	A^T
特征值	λ	λ^n	$\lambda + k$	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{ A }{\lambda} (A \neq 0)$	λ	λ
特征向量	α	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$	—

说明 ① 表格中 $A\alpha = \lambda\alpha (\alpha \neq 0)$, $f(A)$ 为 A 的多项式.

② 用定义验证.

例如 由 $A\alpha = \lambda\alpha$, 得 $A^{-1}A\alpha = \lambda A^{-1}\alpha$, 即 $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha (\lambda \neq 0)$.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}A^*P + 2E$.

(1) 求 B 的特征值;

(2) 若 B_{ij} 为 B 中元素 b_{ij} 的代数余子式, 求迹 $\text{tr}(B)$.

解 (1) 由表格中的结论知, 只需求 A^* 的特征值即可. 由于 A 可以拆成单位矩阵加一个秩为 1 的矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} E + C,$$

则 $r(C) = 1$. 由本章第一节例 3 的“注”知, C 的特征值为 $0, 0, 2+2+2$, 故 A 的特征值为 $0+1, 0+1, 6+1$, A^* 的特征值 (即 $\frac{|A|}{\lambda}$) 为 $7, 7, 1$, $P^{-1}A^*P$ 的特征值为 $7, 7, 1$, $B = P^{-1}A^*P + 2E$ 的特征值为 $7+2, 7+2, 1+2$, 即 B 的特征值为 $9, 9, 3$.

(2) $\text{tr}(B) = B_{11} + B_{22} + B_{33} = 9 + 9 + 3 = 21$.

注 ① $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \times 1 \times 7 = 7$. 对于选择题或填空题, 利用表格中的结论求解较为方便; 对于解答题或证明题, 需要先证明 (用定义证), 再利用结论求解.

② $\text{tr}(B) = \sum_{i=1}^3 \mu_i$, 其中 μ_i 为 B 的特征值.

三、相似矩阵的性质

(1) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 若 $A \sim B$, 则:

① $A^T \sim B^T$.

② $A^n \sim B^n$.

③ $f(A) \sim f(B)$, 其中 f 为多项式.

④ 当 A 可逆时, $A^{-1} \sim B^{-1}$, $A^* \sim B^*$.

说明 以上性质均可用相似的定义进行证明.

例如 证明:若 $A \sim B$, 则 $A^T \sim B^T$.

证 由 $A \sim B$ 知, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$. 两边取转置, 得

$$(P^{-1}AP)^T = B^T, \quad P^T A^T (P^{-1})^T = B^T,$$

即 $P^T A^T (P^T)^{-1} = B^T$, 故 $A^T \sim B^T$.

例如 证明:若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$, $A^* \sim B^*$.

证 由 $A \sim B$ 知, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$. 等式两边取逆, 得

$$P^{-1}A^{-1}P = B^{-1},$$

故 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

同理, 由 $(P^{-1}AP)^* = P^* A^* (P^{-1})^* = B^*$, 即 $P^* A^* (P^*)^{-1} = B^*$ 可知, $A^* \sim B^*$.

(2) $A \sim B \xRightarrow{\neq} |\lambda E - A| = |\lambda E - B|$.

说明 由 $A \sim B$ 知, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 故

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| &= |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |P^{-1}| |\lambda E - A| |P| = |\lambda E - A|, \end{aligned}$$

但 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| \nRightarrow A \sim B$.

例如 取 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$|\lambda E - A| = \lambda^2, \quad |\lambda E - B| = \lambda^2,$$

但 A 与 B 不相似(因 $r(A) = 1 \neq r(B) = 0$).

典型例题分析

题型一 判别相似矩阵

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 则().

A. A 与 C 相似, B 与 C 相似

B. A 与 C 相似, B 与 C 不相似

C. A 与 C 不相似, B 与 C 相似

D. A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

解 可以检验 A, B, C 两两相似的必要条件都满足, 特征根都是 2, 2, 1, 故利用相似的必要条件不能判断.

考虑到 C 为对角矩阵, 故只需判断 A 与 B 是否相似于对角矩阵即可.

考察 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 由

$$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

知, A 的二重特征值 2 对应两个线性无关的特征向量, 故 $A \sim C$.

由

知, B 的二重特征值 2 对应一个线性无关的特征向量, 故 B 与 C 不相似. 因此, B 选项正确.

D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

119

例如

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

故 A, B 有相同的二重特征值 $\lambda = 1$.

又由

$$r(E - A) = r \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$r(E - B) = r \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

知, A, B 的二重特征值 $\lambda = 1$ 只有一个线性无关的特征向量, 故 A, B 均不相似于对角矩阵.

利用矩阵相似的定义可以证明 $A \sim B$. 找到一个可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP = B$, 即

$AP = PB$, 从而

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

令 $x_3 = -1, x_4 = 1$, 则 $x_1 = 1, x_2 = 0$. 故可取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 此时 P 可逆 (P 不唯一), 使得 $P^{-1}AP = B$,

即 $A \sim B$.

例 4 判断下列矩阵中 A 与 B 是否相似, 若相似, 则求出可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 因为 $|A| = 0, |B| = 1$, 即 $|A| \neq |B|$, 所以 A 与 B 不相似.

(2) 由

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

知, A 与 B 都有 3 个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$, 故 A 与 B 均相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 从

而 $A \sim B$. 由

$$(2E - A)x = 0, \quad (-E - A)x = 0, \quad (1E - A)x = 0,$$

可求得 A 的一组特征向量为

$$\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T,$$

令 $P_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $P_1^{-1}AP_1 = \text{diag}(2, -1, 1)$.

同理, 可求得 B 属于特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ 的特征向量分别为

$$\beta_1 = (0, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, 2)^T, \beta_3 = (1, 0, 0)^T,$$

令 $P_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则 $P_2^{-1}BP_2 = \text{diag}(2, -1, 1)$, 故 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$, 于是

$$A = P_1P_2^{-1}BP_2P_1^{-1} = (P_2P_1^{-1})^{-1}B(P_2P_1^{-1}).$$

令 $P = P_2P_1^{-1}$, 则 $A = P^{-1}BP$.

注 ① 判别两个同阶方阵是否相似, 可先利用矩阵相似的必要条件:

$$|A| = |B|, \quad r(A) = r(B), \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B), \quad |\lambda E - A| = |\lambda E - B|.$$

若以上条件中有一个不成立, 则可判定 A 与 B 不相似.

② 若 A 与 B 是同阶实对称矩阵, 则 $A \sim B \Leftrightarrow A, B$ 有相同的特征值及重数.

例 5 设 A 为 3 阶矩阵, 则“ $A^3 - A^2$ 可对角化”是“ A 可对角化”的().

A. 充分但不必要条件

B. 必要但不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解 若 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 故 $P^{-1}A^2P = \Lambda^2, P^{-1}A^3P = \Lambda^3$, 因此 $P^{-1}(A^3 - A^2)P = P^{-1}A^3P - P^{-1}A^2P = \Lambda^3 - \Lambda^2$. 由于 Λ 是对角矩阵, 故 $\Lambda^3 - \Lambda^2$ 也是对角矩阵, 即 $A^3 - A^2$ 可对角化.

若 $A^3 - A^2$ 可对角化, 则 A 不一定可对角化. 比如令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = A^3 = O$, 故 $A^3 - A^2 = O$,

零矩阵显然可以对角化, 但是 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有 3 重特征值 0, 但是只对应 2 个线性无关的特征向量, 故 A

不可对角化.

综上所述, “ $A^3 - A^2$ 可对角化”是“ A 可对角化”的必要但不充分条件. B 选项正确.

题型二 利用 $r(A) = 1$

例 6 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$, 则 $r(A) =$ _____, $|A| =$ _____.

解 利用 A 的特征值及相似矩阵的性质, 求 $r(A)$ 和 $|A|$.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} (a-1)E + B.$$

由 $r(B) = 1$ 知, B 的特征值为

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii} = n, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

故 A 的特征值为 $n + (a - 1), 0 + (a - 1), \cdots, 0 + (a - 1)$.

又因为 A 为实对称矩阵, 所以

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} n+a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{pmatrix}.$$

由相似矩阵有相同的秩和相同的行列式知, $|A| = |\Lambda| = (n+a-1)(a-1)^{n-1}$, 且

$$r(A) = \begin{cases} n, & a \neq 1-n \text{ 且 } a \neq 1, \\ 1, & a = 1, \\ n-1, & a = 1-n. \end{cases}$$

例 7 证明: n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证 因为

$$|\lambda E - A| = \lambda^{n-1}(\lambda - n), \quad |\lambda E - B| = \lambda^{n-1}(\lambda - n),$$

所以 A, B 有相同的特征值 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$ ($n-1$ 重).

由于 A 为实对称矩阵, 故 $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$

又因为 $r(\lambda_2 E - B) = r(B) = 1$, 所以 B 对应 $\lambda_2 = 0$ 的特征值有 $n - r(\lambda_2 E - B) = n - 1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $B \sim \Lambda$, 于是 $A \sim B \sim \Lambda$.

例 8 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. 求:

(1) A 的特征值和特征向量;

(2) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (1) 当 $b = 0$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$, 任意非零列向量均为特征向量.

当 $b \neq 0$ 时, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -b & \cdots & -b \\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = [\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1 + (n-1)b, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 1 - b$.

对于 $\lambda_1 = 1 + (n-1)b$, 设其特征向量为 ξ_1 , 则

$$\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xi_1 = [1 + (n-1)b] \xi_1,$$

故方程的一个基础解系为 $\xi_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$, 从而 λ_1 对应的全部特征向量为 $k_1 \xi_1 (k_1 \neq 0)$.

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 1 - b$, 解 $[(1-b)E - A]x = 0$, 由于

$$(1-b)E - A = \begin{pmatrix} -b & -b & \cdots & -b \\ -b & -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & -b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

故方程的一个基础解系为

$$\xi_2 = (1, -1, 0, \dots, 0)^T, \xi_3 = (1, 0, -1, \dots, 0)^T, \dots, \xi_n = (1, 0, 0, \dots, -1)^T,$$

从而全部特征向量为 $k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 + \dots + k_n \xi_n (k_2, k_3, \dots, k_n \text{ 不全为 } 0)$.

(2) 当 $b = 0$ 时, $A = E$, 对任意可逆矩阵 P , 均有 $P^{-1}AP = E$.

当 $b \neq 0$ 时, A 有 n 个线性无关的特征向量, 令 $P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 则

$$P^{-1}AP = \text{diag}\{1 + (n-1)b, 1-b, \dots, 1-b\}.$$

题型三 抽象矩阵的相似问题

例 9 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3.$$

求:

(1) 矩阵 B , 使得 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$;

(2) 矩阵 A 的特征值;

(3) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (1) 由已知, 有

$$\begin{aligned} A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{故所求矩阵 } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以矩阵 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 从而 $C^{-1}AC = B$, 即 $A \sim B$, 因此 A 与 B 有相同的特征值. 又因为

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4),$$

所以 B 的特征值为 1, 1, 4, 从而 A 的特征值为 1, 1, 4.

(3) 先求 B 的特征向量.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 由 $(E - B)x = 0$, 可解得基础解系

$$\eta_1 = (-1, 1, 0)^T, \eta_2 = (-2, 0, 1)^T;$$

对于 $\lambda_3 = 4$, 由 $(4E - B)x = 0$, 可解得基础解系 $\eta_3 = (0, 1, 1)^T$.

令 $P_1 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 $P_1^{-1}BP_1 = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, 故

$$P_1^{-1}C^{-1}ACP_1 = (CP_1)^{-1}A(CP_1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix},$$

$$P = CP_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3)$$

即为所求, 此时 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

例10 设 3 阶矩阵 A 有 3 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明: $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关;

(2) 若 $A^3\beta = A\beta$, 求秩 $r(A - E)$ 及行列式 $|A + 2E|$.

解 (1) 用定义法证明线性无关. 设

$$k_1\beta + k_2A\beta + k_3A^2\beta = 0, \quad ①$$

由已知, 设 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3$, 可得

$$A\beta = A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3,$$

$$A^2\beta = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3.$$

将 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 代入式 ①, 整理得

$$(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\alpha_1 + (k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\alpha_2 + (k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2)\alpha_3 = 0,$$

又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是 3 个不同特征值对应的特征向量, 所以它们必线性无关, 从而

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = 0, \\ k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = 0, \\ k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2 = 0, \end{cases} \quad ②$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0$, 于是方程组 ② 只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 即 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

(2) 由 $A^3\beta = A\beta$ 知

$$A(\beta, A\beta, A^2\beta) = (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta)$$

$$= (\beta, A\beta, A^2\beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$, 则 P 可逆, 故

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} B,$$

即 $A \sim B$, 从而 $A - E \sim B - E$, $A + 2E \sim B + 2E$, 于是

$$r(A - E) = r(B - E) = r \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = 2,$$

$$|A + 2E| = |B + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

注 题设 A 是抽象矩阵, 要想求 $r(A - E)$ 和 $|A + 2E|$, 可考虑利用 $A \sim B$ (具体) 进行求解.

例11 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 已知 $|A| = -12$, A 的 3 个特征值之和为 1, 又 $\alpha = (1, 0, -2)^T$ 是齐次线性方程组 $(A^* - 4E)x = 0$ 的一个解向量. 求:

(1) 矩阵 A ;

(2) 方程组 $(A^* + 6E)x = 0$ 的通解.

解 (1) 求出 A 的全部特征值和特征向量, 即可确定 A . 由 α 是 $(A^* - 4E)x = 0$ 的解可知, $(A^* - 4E)\alpha = 0$, 即 $A^*\alpha = 4\alpha$. 两边同时左乘 A , 得 $AA^*\alpha = 4A\alpha$, 即

$$|A|\alpha = 4A\alpha, \quad A\alpha = \frac{|A|}{4}\alpha = -3\alpha,$$

故 $\lambda_3 = -3$ 为 A 的特征值, 对应的一个特征向量为 $\alpha_3 = \alpha = (1, 0, -2)^T$.

设 A 的另外两个特征值分别为 λ_1, λ_2 , 则由已知得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = -12,$$

将 $\lambda_3 = -3$ 代入上式, 可解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

设 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 对应的特征向量为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 由 A 为实对称矩阵, 得 $x^T \alpha_3 = 0$, 即 $x_1 - 2x_3 = 0$, 解得一个基础解系为 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$.

由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \lambda_3 \alpha_3)$, 得

$$\begin{aligned} A &= (\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \lambda_3 \alpha_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) $(A^* + 6E)x = 0$ 的基础解系, 即为 A^* 的特征值 $\lambda = -6$ 所对应的线性无关的特征向量. 而 A^* 与 A 对应的特征向量相同, 于是可利用 A 的特征向量来求 $(A^* + 6E)x = 0$ 的通解.

由 (1) 知, $A\alpha_1 = 2\alpha_1, A\alpha_2 = 2\alpha_2$. 两式两边同时左乘 A^* , 得

$$A^*A\alpha_1 = 2A^*\alpha_1, \quad A^*A\alpha_2 = 2A^*\alpha_2,$$

即

$$A^* \alpha_1 = \frac{|A|}{2} \alpha_1 = -6\alpha_1, \quad A^* \alpha_2 = \frac{|A|}{2} \alpha_2 = -6\alpha_2,$$

移项,得

$$(A^* + 6E)\alpha_1 = 0, \quad (A^* + 6E)\alpha_2 = 0,$$

故 α_1, α_2 是方程组 $(A^* + 6E)x = 0$ 的两个线性无关的解, 所求通解为

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

例12 已知 2 维非零向量 ξ 不是矩阵 $A_{2 \times 2}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\xi, A\xi$ 线性无关;

(2) 若 $A^2\xi + A\xi - 6\xi = 0$, 求 A 的特征值, 并讨论 A 是否相似于对角矩阵.

解 (1) 用反证法. 设 $\xi, A\xi$ 线性相关, 即存在不全为 0 的 k_1, k_2 , 使得

$$k_1 \xi + k_2 A\xi = 0,$$

由于 $\xi \neq 0$, 若 $k_2 = 0$, 则 $k_1 = 0$, 矛盾, 故 $k_2 \neq 0$, 从而 $A\xi = -\frac{k_1}{k_2}\xi$, 即 ξ 是 A 的特征向量, 矛盾, 于是 $\xi, A\xi$ 线性无关.

(2) 由 $A^2\xi + A\xi - 6\xi = 0$, 得

$$(A + 3E)(A - 2E)\xi = 0,$$

由 $\xi \neq 0$ 知, $(A + 3E)(A - 2E)$ 不可逆.

若 $A + 3E$ 可逆, 则 $(A - 2E)\xi = 0$, 即 $A\xi - 2\xi = 0$, 这与 $\xi, A\xi$ 线性无关矛盾, 故 $A + 3E$ 不可逆, 同理可证 $A - 2E$ 不可逆, 故

$$|A + 3E| = 0, \quad |A - 2E| = 0,$$

即 2, -3 是 A 的特征值. 由于 A 有 2 个不同的特征值, 故 A 相似于对角矩阵 $\text{diag}(2, -3)$.

例13 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则().

A. $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆

B. $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆

C. $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

D. $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

解 由已知, 可设 $\alpha = (1, 0, \dots, 0)^T$, 则 $r(\alpha\alpha^T) = 1$, $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 1, 0, $\dots$, 0, 故 $E - \alpha\alpha^T$ 的特征值为 0, 1, 1, $\dots$, 1, 从而 $|E - \alpha\alpha^T| = 0$, 于是 $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆, A 选项正确.

例14 设 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 且 $3A\alpha - 2A^2\alpha - A^3\alpha = 0$. 其中 A 为 3 阶矩阵, α 为 3 维列向量.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 记 $P = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$, 求 3 阶矩阵 B , 使得 $A = PBP^{-1}$.

解 (1) 求抽象矩阵的特征值和特征向量, 一般用定义法. 由 $3A\alpha - 2A^2\alpha - A^3\alpha = 0$, 有

$$A(A^2\alpha + 2A\alpha - 3\alpha) = 0 = 0 \cdot (A^2\alpha + 2A\alpha - 3\alpha).$$

又因为 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 所以 $A^2\alpha + 2A\alpha - 3\alpha \neq 0$, 故 $\lambda_1 = 0$ 是 A 的特征值, $A^2\alpha + 2A\alpha - 3\alpha$ 是其对应的一个特征向量.

类似地, 由 $A^3\alpha + 2A^2\alpha - 3A\alpha = 0$, 有

$$(A - E)(A^2\alpha + 3A\alpha) = 0 = 0 \cdot (A^2\alpha + 3A\alpha),$$

$$(A + 3E)(A^2\alpha - A\alpha) = 0 = 0 \cdot (A^2\alpha - A\alpha),$$

故 $\lambda_2 = 1$ 是 A 的特征值, $A^2\alpha + 3A\alpha$ 是其对应的一个特征向量; $\lambda_3 = -3$ 是 A 的特征值, $A^2\alpha - A\alpha$ 是其对应的一个特征向量.

(2) 要使 $A = PBP^{-1}$, 就要使 $AP = PB$. 由

$$AP = A(\alpha, A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha),$$

以及 $A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$, 得

$$AP = (A\alpha, A^2\alpha, 3A\alpha - 2A^2\alpha) = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = PB,$$

$$\text{故 } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

注 由 $(A^3 + 2A^2 - 3A)\alpha = 0 (\alpha \neq 0)$ 知, 方程组 $(A^3 + 2A^2 - 3A)x = 0$ 有非零解, 从而

$$|A^3 + 2A^2 - 3A| = |A| |A - E| |A + 3E| = 0,$$

但不能确定 $0, 1, -3$ 是 A 的特征值.

比如, 若 $A^2 = A$, 则 $|A| |A - E| = 0$, 那么 A 的特征值只能是 0 或 1 , 但究竟有没有 $\lambda = 0$, 以及若有 $\lambda = 0$, 那么会是几重, 仅由 $A^2 = A$ 是不能确定的, 因为满足 $A^2 = A$ 的矩阵 A 不唯一, 还需其他条件.

比如, 若 $A^2 = A$ 且 $r(A) = r < n$ (这里设 A 为 n 阶矩阵), 则可以确定 A 的特征值.

事实上, 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则由 $r(A) = r < n$ 知, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 所以

$$A^2 = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = A,$$

即 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 故

$$A\alpha_1 = \alpha_1 = 1\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2 = 1\alpha_2, \dots, A\alpha_r = \alpha_r = 1\alpha_r,$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 $\lambda = 1$ 对应的线性无关的特征向量.

第三节 实对称矩阵

内容与提要

一、实对称矩阵的定义

设 A 是 n 阶矩阵, 若 $A^T = A$, 则称 A 为对称矩阵. 若 A 的元素均为实数, 且 $A^T = A$, 则称 A 为实对称矩阵.

二、实对称矩阵的对角化

- (1) 实对称矩阵必相似于对角矩阵.
- (2) 实对称矩阵可用正交矩阵对角化.
- (3) 实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交.
- (4) 实对称矩阵的特征值必为实数.

三、实对称矩阵用正交矩阵对角化的步骤

- (1) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 求 A 的特征值.
- (2) 求 A 的特征向量.
- (3) 若 A 的特征值都是单重特征值, 则只需单位化. 若 A 的特征值中存在多重特征值, 则先对重特征值对应的特征向量进行施密特正交化, 再单位化.
- (4) 若由正交化、单位化后的向量构成正交矩阵 Q , 则 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

说明 ① 实对称矩阵可以用正交矩阵对角化, 也可以用可逆矩阵对角化.

② 施密特正交化、单位化过程见下例.

例如 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 A 的某个 3 重特征值对应的特征向量.

(i) 正交化.

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1, \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1, \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2. \end{cases}$$

(ii) 单位化.

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}.$$

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 Q 为正交矩阵.

典型例题分析

例 1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

解 先求 A 的特征值. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3) = 0,$$

得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$.对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$, 得基础解系 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$.对于 $\lambda_3 = 3$, 由 $(3E - A)x = 0$, 得基础解系 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$.对二重特征值 0 的特征向量 α_1, α_2 正交化, 得

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

对其单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{令 } Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), \text{ 则 } Q \text{ 为正交矩阵, 且 } Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

注 对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$, 即 $Ax = 0$ 可以直接求出正交的基础解系(这样可省去正交化步骤).

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 取 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ 为特征向量, 则 } \beta_1^T \beta_2 = 0, \text{ 即 } \beta_1 \text{ 与 } \beta_2 \text{ 已正交.}$$

例 2 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2, $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值, 若 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, -3)^T$ 都是 A 属于特征值 6 的特征向量. 求:

(1) A 的另一特征值和对应的特征向量;

(2) 矩阵 A .

解 (1) 由于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重根, 故 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量有两个, 由已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的极大线性无关组为 α_1, α_2 , 故 α_1, α_2 为 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量.

由 $r(A) = 2$ 知, $|A| = 0$, 故 A 的另一特征值 $\lambda_3 = 0$.

设 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha = 0, \\ \alpha_2^T \alpha = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

所得基础解系为 $\alpha = (-1, 1, 1)^T$, 即 A 属于 $\lambda_3 = 0$ 的特征向量为

$$k\alpha = k(-1, 1, 1)^T \quad (k \neq 0).$$

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha)$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 故 $A = P \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, 又因为

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

例 3 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 且 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的两个解. 求:

(1) A 的特征值和特征向量;

(2) 正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$;

(3) A 及 $(A - \frac{3}{2}E)^6$.

解 (1) 由于 A 的各行元素之和均为 3, 故

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3, \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 3, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 3 \end{cases} \Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即 $\lambda_3 = 3$ 是 A 的特征值, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 是其对应的特征向量.

又由于 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 0$, 即 $A\alpha_1 = 0 \cdot \alpha_1, A\alpha_2 = 0 \cdot \alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性无关, 故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 是 A 的二重特征值, α_1, α_2 是其对应的特征向量.

综上所述, A 的特征值为 0, 0, 3, 特征值 0 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 不全为 0), 特征值 3 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3$ ($k_3 \neq 0$).

(2) 对 α_1, α_2 正交化, 有

$$\xi_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T,$$

$$\xi_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)} \xi_1 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)^T,$$

再将 ξ_1, ξ_2, α_3 单位化, 得

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^T, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T,$$

取 $Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则 $Q^T A Q = \Lambda = \text{diag}(0, 0, 3)$.

(3) 由 $Q^T A Q = \Lambda$ 可知, $A = Q \Lambda Q^T$, 故 $A - \frac{3}{2}E = Q \left(\Lambda - \frac{3}{2}E \right) Q^T$, 于是

$$\left(A - \frac{3}{2}E \right)^6 = Q \left(\Lambda - \frac{3}{2}E \right)^6 Q^T = \left(\frac{3}{2} \right)^6 E.$$

例 4 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 是实对称矩阵, $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 是方程 $Ax = \beta$ 的一个解, 其中 $\beta = (3, 3, 3)^T$.

又 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 与 A 的每一行向量均正交.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 为对角矩阵;

(3) 写出 $Ax = \beta$ 的通解.

解 (1) 由已知, 有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

故 $\lambda_3 = 3$ 是 A 的特征值, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 是其对应的特征向量.

又因为 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1, A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性无关, 所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 是 A 的二重特征值, α_1, α_2 是其对应的特征向量.

综上所述, A 的特征值为 $0, 0, 3, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 (k_1, k_2 \text{ 不全为 } 0), \lambda_3 = 3$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3 (k_3 \neq 0)$.

(2) 对 α_1, α_2 正交化, 有

$$\xi_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T,$$

$$\xi_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)} \xi_1 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)^T.$$

再将 ξ_1, ξ_2, α_3 单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^T, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T.$$

取 $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 $P^T A P = \Lambda = \text{diag}(0, 0, 3)$.

(3) 由于 α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 故 $Ax = \beta$ 的通解为

$$x = \alpha + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = (1, 1, 1)^T + c_1(-1, 2, -1)^T + c_2(0, -1, 1)^T,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

例 5 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值和特征向量;

(2) 求矩阵 B .

解 (1) 用定义验证 α_1 是 B 的特征向量. 因为

$$\begin{aligned} B\alpha_1 &= (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 \\ &= \lambda_1^5\alpha_1 - 4\lambda_1^3\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1, \end{aligned}$$

即 $B\alpha_1 = -2\alpha_1$, 所以 α_1 是 B 的对应于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量.

记 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$, 则 B 的属于 $\mu_1 = -2$ 的特征向量为 $k_1\beta_1$ ($k_1 \neq 0$).

设 α_2, α_3 分别是 A 的属于 $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ 的特征向量, 则 α_2, α_3 线性无关, 由于

$$B\alpha_2 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_2 = (\lambda_2^5 - 4\lambda_2^3 + 1)\alpha_2 = \alpha_2,$$

$$B\alpha_3 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_3 = (\lambda_3^5 - 4\lambda_3^3 + 1)\alpha_3 = \alpha_3,$$

故 B 的特征值为 $\mu_2 = 1, \mu_3 = 1$.

又由 A 是实对称矩阵, 知 B 也是实对称矩阵, 故 B 的不同特征值对应的特征向量必正交.

设 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 对应的特征向量为 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\beta^T\beta = 0$, 即 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, 得基础解系

$\beta_2 = (1, 1, 0)^T, \beta_3 = (-1, 0, 1)^T$, 故 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 对应的特征向量为

$$k_2\beta_2 + k_3\beta_3 \quad (k_2, k_3 \text{ 不同时为 } 0).$$

$$(2) \text{ 令 } P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 故}$$

$$B = P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 6 设 n 阶矩阵 A 为实对称矩阵, $r(A) = k < n$ ($k \geq 1$), 且 $A^2 = A$, 求行列式 $|2E - A|$.

解 求行列式 $|2E - A|$, 只需求 $2E - A$ 的全部特征值, 故只需求 A 的全部特征值即可.

由 $r(A) = k$ 及 A 为实对称矩阵知

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

又 $A^2 = A$, 若 A 的特征值为 λ , α 为 λ 对应的一个特征向量, 则

$$A\alpha = \lambda\alpha (\alpha \neq 0), \quad A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha,$$

故 $\lambda = \lambda^2$, 解得 $\lambda = 0, \lambda = 1$, 从而 A 有 k 个特征值为 1, 其余 $n-k$ 个特征值为 0, 即 A 的特征值为 $\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ 个}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k \text{ 个}}$, 于是 $2E - A$ 的特征值为

$$\underbrace{2-1, \dots, 2-1}_{k \text{ 个}}, \underbrace{2-0, \dots, 2-0}_{n-k \text{ 个}}.$$

因此 $|2E - A| = 2^{n-k}$.

注 若 n 阶矩阵 A 为实对称矩阵, 则

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

故从 A 的非零特征值的个数可以求得 $r(A) = r$.

例 7 设 A 为 3 阶实对称矩阵, $r(A) = 2$, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 求:

(1) A 的所有特征值和特征向量;

(2) 矩阵 A .

解 (1) 由于 A 不是具体矩阵, 故用定义 $A\alpha = \lambda\alpha (\alpha \neq 0)$ 求 A 的特征值和特征向量. 依题设, 有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

故 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ 是 A 的 2 个特征值, 且对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, 0, -1)^T$. 又由 $r(A) = 2$ 知, $|A| = 0$, 故 $\lambda_3 = 0$ 是 A 的特征值.

令 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量, 由 A 是实对称矩阵, 得

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases}$ 解得一个基础解系为 $\alpha_3 = (0, 1, 0)^T$, 故 A 的全部特征向量为

$$k_1 \alpha_1, k_2 \alpha_2, k_3 \alpha_3 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ 均不为 } 0).$$

(2) 由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1, -\alpha_2, 0)$, 得

$$A = (\alpha_1, -\alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

第四节 确定参数

内容与提要

1. 确定参数的常见情形

确定参数有以下常见情形:

$$(1) \text{ 设 } A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}, A \sim B \Rightarrow \begin{cases} |A| = |B|, \\ \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii}. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 已知 } \lambda_0 \text{ 是 } A \text{ 的一个特征值} \Rightarrow |\lambda_0 E - A| = 0.$$

(3) 已知 α_0 是 A 的一个特征向量 $\Rightarrow A\alpha_0 = \lambda\alpha_0$ (解方程组).

(4) 对 n 阶矩阵 A , $r(A) < n \Rightarrow |A| = 0$ (常用方法).

(5) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 且 A, B 均为实对称矩阵, 则 $A \sim B$.

说明 由 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ 知, A, B 有相同的特征值, 设特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 又由 A, B 为实对称矩阵知

$$A \sim \Lambda, \quad B \sim \Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

故由相似矩阵的传递性知, $A \sim B$.

2. 矩阵相似的必要条件

$$A \sim B \Rightarrow \begin{cases} |A| = |B|, \\ \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii} \text{ (即 } \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) \text{)}, \\ r(A) = r(B), \\ |\lambda E - A| = |\lambda E - B|, \\ A \text{ 与 } B \text{ 有相同的特征值.} \end{cases}$$

说明 ① 矩阵相似的必要条件常用于当 $A \sim B$ 时, 确定 A 或 B 中的参数.

② $A \sim B \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii}$, 常用于判别 A 与 B 是否相似.

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 显然因为 $\sum_{i=1}^n a_{ii} = 3, \sum_{i=1}^n b_{ii} = 4$, 所以 A 与 B 不相似.

典型例题分析

例 1 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -3 & 3 & -1 \\ -15 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ 相似. 求:

(1) a, b, c 的值;

(2) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}BP = A$.

解 (1) 由 $B \sim A$ 知, A, B 有相同的迹及特征值, 故

$$a + 3 + (-6) = 1 + 2 + (-1),$$

解得 $a = 5$. 又由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, 故 B 的特征值也为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$. 由

$$|\lambda_1 E - B| = |E - B| = \begin{vmatrix} -4 & -b & -c \\ 3 & -2 & 1 \\ 15 & -8 & 7 \end{vmatrix} = 6(b - c + 4) = 0,$$

$$|\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{B}| = |2\mathbf{E} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} -3 & -b & -c \\ 3 & -1 & 1 \\ 15 & -8 & 8 \end{vmatrix} = 9(b+c) = 0,$$

解得 $b = -2, c = 2$, 故 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -15 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

(2) 对于 $\lambda_1 = 1$, 由 $(\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得 $\mathbf{B}$ 的一个特征向量 $\alpha_1 = (1, 1, -1)^T$;

对于 $\lambda_2 = 2$, 由 $(2\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得 $\mathbf{B}$ 的一个特征向量 $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$;

对于 $\lambda_3 = -1$, 由 $(-\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得 $\mathbf{B}$ 的一个特征向量 $\alpha_3 = (1, 0, -3)^T$.

令 $\mathbf{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, 则可使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{A}$.

例 2 已知 $\xi = (1, 1, -1)^T$ 是 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 确定参数 a, b 及 ξ 对应的特征值;

(2) 问 $\mathbf{A}$ 能否相似于对角矩阵? 说明理由.

解 (1) 设 ξ 对应的特征值为 λ , 则 $\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$, 即

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

等式两边对应的三个分量相等, 解得 $a = -3, b = 0, \lambda = -1$.

(2) 由(1)知, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 由

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3 = 0,$$

得 $\lambda = -1$ 为三重特征值, 又由

$$r[(-1)\mathbf{E} - \mathbf{A}] = r\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$$

知, 三重特征值 $\lambda = -1$ 对应一个线性无关的特征向量, 故 $\mathbf{A}$ 不能相似于对角矩阵.

例 3 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}| = -1, \lambda_0$ 是 $\mathbf{A}^*$ 的特征值, 属于 λ_0 的特征向量为 $\alpha = (-1,$

$-1, 1)^T$, 求 a, b, c 及 λ_0 的值.

解 由已知, $\mathbf{A}^* \alpha = \lambda_0 \alpha$. 两边同时左乘 $\mathbf{A}$, 得

$$AA^* \alpha = |A| \alpha = \lambda_0 A \alpha,$$

即 $\lambda_0 A \alpha = -\alpha$ (已知 $|A| = -1$), 故

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c) = 1, & \text{①} \\ \lambda_0(-5-b+3) = 1, & \text{②} \\ \lambda_0(c-1-a) = -1, & \text{③} \end{cases}$$

由 $|A| = -1$ 知, $\lambda_0 \neq 0$, 由式 ① 和式 ③, 得 $a = c$, 再由式 ①, 得 $\lambda_0 = 1$, 再由式 ②, 得 $b = -3$. 又由 $a = c, b = -3$, 且 $|A| = -1$ 知

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = a - 3 = -1,$$

故 $a = 2$, 从而 $a = c = 2, b = -3, \lambda_0 = 1$.

习题演练

一、选择题

(1) 下列结论:

- ① 若 λ 是 A, B 的特征值, 则必是 $A+B$ 的特征值.
- ② 若 λ 是 A, B 的特征值, 则必是 AB 的特征值.
- ③ 若 α 是 A, B 的特征向量, 则必是 $A+B$ 的特征向量.
- ④ 若 α 是 A, B 的特征向量, 则必是 AB 的特征向量.

正确的是().

- A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ③④

(2) 下列矩阵中, 不能相似于对角矩阵的是().

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的是().

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 设 $\lambda = 2$ 是可逆矩阵 A 的特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值为().

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

(5) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是().

A. $a = 0, b = 2$

B. $a = 0, b$ 为任意常数

C. $a = 2, b = 0$

D. $a = 2, b$ 为任意常数

二、填空题

(1) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 则矩阵 $A = \beta \alpha^T$ 的非零特征值为_____.

(2) 设 A 是 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为_____.

(3) 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T, \beta = (1, 0, k)^T$, 若矩阵 $\alpha \beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k =$ _____.

(4) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, E 为 3 阶单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

三、解答题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $A, A^*, A^{-1} + E$ 的特征值和特征向量.

(2) 设 A 为 3 阶矩阵, $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = 2\alpha_2, A\alpha_3 = 3\alpha_3$, 其中 $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (2, -2, 1)^T, \alpha_3 = (-2, -1, 2)^T$, 求矩阵 A .

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = P^{-1} A^* P$, 求 $B + 2E$ 的特征值和特征向量.

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, A 与 B 相似. 求:

(I) x, y 的值;

(II) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

(5) 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 与 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 是非零向量, 且 $\alpha^T \beta = 0, A = \alpha \beta^T$. 求:

(I) A^2 ;

(II) A 的特征值和特征向量.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, 问 k 为何值时, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 并求出 P 和

对角矩阵.

(7) 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 x , 使得 x, Ax, A^2x 线性无关, 且 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$.

(I) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B , 使得 $A = PBP^{-1}$;

(II) 计算行列式 $|A + E|$.

(8) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似于对角矩阵.

(9) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 已知非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一. 求:

(I) a 的值;

(II) 正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵.

(10) 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量. 求:

(I) a 的值;

(II) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(11) 设 α, β 为 3 维单位列向量, 且 $\alpha^T \beta = 0$, 记 $A = \alpha \beta^T + \beta \alpha^T$.

(I) 证明: A 相似于对角矩阵;

(II) 若存在 3 维列向量 $\gamma \neq 0$, 使得 $A\gamma = 0$, 记 $P = (\gamma, 2(\alpha + \beta), \beta - \alpha)$, 求 $P^{-1}AP$.

(12) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = B$.

(13) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 A 的 n 个单位正交特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 证明: $A = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^T + \lambda_2 \alpha_2 \alpha_2^T + \dots + \lambda_n \alpha_n \alpha_n^T$.

(14) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 且存在可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & b & -2 \\ a & a+1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, -1)$,

又 A 的伴随矩阵 A^* 有特征值 λ_0 , λ_0 对应的特征向量为 $\alpha = (2, 5, -1)^T$.

(I) 求 λ_0 ;

(II) 求 $(A^*)^{-1}$;

(III) 计算行列式 $|A^* + E|$.

(15) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = ij$.

(I) 求 A 的特征值和特征向量;

(II) 问 A 能否相似于对角矩阵? 若能, 求出相似对角矩阵; 若不能, 说明理由.

习题演练解答

一、选择题

(1) D.

解 对于 ①, 由已知条件, 存在非零向量 α_1, α_2 , 使得

$$A\alpha_1 = \lambda\alpha_1, \quad B\alpha_2 = \lambda\alpha_2,$$

但不能确定 $\alpha_1 = \alpha_2$, 故 $A+B$ 不一定以 λ 为特征值.

对于 ②, ② 与 ① 同理, 不能确定 λ 是 AB 的特征值.

对于③,由已知,存在 λ_1 和 λ_2 ,使得 $A\alpha = \lambda_1\alpha$, $B\alpha = \lambda_2\alpha$,故

$$(A+B)\alpha = A\alpha + B\alpha = (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha.$$

对于④,④与③同理,④正确,故D选项正确.

(2) B.

解 设B选项中的矩阵为 B ,求特征值.由

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.由

$$E - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad r(E - B) = 2$$

知, B 对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 只有一个特征向量,故B选项不能相似于对角矩阵.

同理,A,C,D选项中的矩阵均相似于对角矩阵.

(3) A.

解 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,A,B,C,D选项中的矩阵分别记为 B_1, B_2, B_3, B_4 .可以计算

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \\ |\lambda E - B_1| &= 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \\ |\lambda E - B_2| &= 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \\ |\lambda E - B_3| &= 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \\ |\lambda E - B_4| &= 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} r(E - A) &= 2, \quad r(E - B_1) = 2, \quad r(E - B_2) = 1, \\ r(E - B_3) &= 1, \quad r(E - B_4) = 1, \end{aligned}$$

可得 $E - B_1$ 与 $E - A$ 有相等的秩,而 $E - B_2, E - B_3, E - B_4$ 与 $E - A$ 的秩都不相等,故它们与 $E - A$ 都不相似.所以A选项正确.

注 此题中, A, B_1, B_2, B_3, B_4 均不与对角矩阵相似,因此可利用矩阵相似的必要条件进行排除.

(4) B.

解 由 $A\alpha = \lambda\alpha (\alpha \neq 0)$,有 $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$,故 $\frac{1}{3}A^2\alpha = \frac{1}{3}\lambda^2\alpha$.

若 λ 是 A 的特征值,则 $\frac{1}{3}\lambda^2$ 是 $\frac{1}{3}A^2$ 的特征值,由已知 $\lambda = 2$,因此 $\frac{1}{3}A^2$ 有特征值 $\frac{4}{3}$,再由 $A\alpha = \lambda\alpha$,得

$A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$,故 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有特征值 $\frac{3}{4}$.

(5) B.

解 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda[\lambda^2 - (b+2)\lambda + 2b - 2a^2],$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - b),$$

故 $\lambda = 2$ 必是 A 的特征值, 即 $|2E - A| = 0$, 解得 $a = 0$.

由 $\lambda = b$ 必是 A 的特征值, 即 $|bE - A| = 0$ 知, $b[b^2 - (b+2)b + 2b] = 0$, b 可为任意常数, 故 B 选项正确.

二、填空题

(1) 2.

解 由 $r(\beta\alpha^T) = 1$, 知 $A = \beta\alpha^T$ 的特征值为 $0, 0, \sum_{i=1}^3 a_{ii}$. 而 $\sum_{i=1}^3 a_{ii} = \alpha^T\beta = 2$, 故 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 2.

(2) 1.

解 由 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$ 且

$$A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$$

知, A 有特征值 1 和 0, 故 A 的非零特征值为 1.

注 本题也可利用相似矩阵有相同的特征值这一结论. 由

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

得 $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$, 由于 B 的非零特征值为 1, 故 A 的非零特征值为 1.

(3) 2.

解 由

$$\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 0, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

以及相似的矩阵有相同的迹, 有 $1+0+k = 3+0+0$, 故 $k = 2$.

(4) 21.

解 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 有 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$.

由于 A 的特征值为 $2, -2, 1$, 且

$$B\alpha = (A^2 - A + E)\alpha = A^2\alpha - A\alpha + \alpha = (\lambda^2 - \lambda + 1)\alpha,$$

故 B 的特征值为 $3, 7, 1$, 于是 $|B| = 3 \times 7 \times 1 = 21$.

三、解答题

(1) **解** 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 5) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -5$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 由 $(1E - A)x = 0$, 得特征向量为

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T,$$

其全部特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 为不全为 0 的常数).

对于 $\lambda_3 = -5$, 由 $(-5E - A)x = 0$, 得 $\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$, 其全部特征向量为

$$k_3\alpha_3 \quad (k_3 \text{ 为不为 } 0 \text{ 的常数}).$$

下面求 A^* 的特征值和特征向量.

由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 有 $A^*A\alpha = \lambda A^*\alpha$, 即 $|A|\alpha = \lambda A^*\alpha$. 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha,$$

故 $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值, α 仍是 A^* 的特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 对应的特征向量, 从而 A^* 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{|A|}{1} = -5, \lambda_3 = \frac{-5}{-5} = 1.$$

对应于特征值 -5 的特征向量为 $k_1(1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 1)^T$ (k_1, k_2 为不全为 0 的常数), 对应于特征值 1 的特征向量为 $k_3(-1, 1, 1)^T$ (k_3 为不为 0 的常数).

同理可得 $A^{-1} + E$ 的特征值和特征向量. 若 λ, α 分别为 A 的特征值和特征向量, 则 $\frac{1}{\lambda} + 1$ 为 $A^{-1} + E$ 的特征值, α 仍为相应的特征向量, 故 $A^{-1} + E$ 的特征值为 $2, 2, \frac{4}{5}$.

对应于特征值 2 的特征向量为 $k_1(1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 1)^T$ (k_1, k_2 为不全为 0 的常数), 对应于特征值 $\frac{4}{5}$ 的特征向量为 $k_3(-1, 1, 1)^T$ (k_3 为不为 0 的常数).

(2) 解 依题设, 已知 A 的全部特征值和特征向量, 且 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 故 $A \sim \Lambda = \text{diag}(1, 2, 3)$, 即 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, 从而

$$\begin{aligned} A &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 21 & 0 & -6 \\ 0 & 15 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 解 先求 A 的特征值和特征向量. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 7) = 0,$$

得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7$, 故 $|A| = 1 \times 1 \times 7 = 7$, 从而 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$, 即 $7, 7, 1$.

由 $B = P^{-1}A^*P$, 即 A^* 与 B 有相同的特征值 $7, 7, 1$ 知, $B + 2E$ 的特征值为 $7 + 2, 7 + 2, 1 + 2$, 即 $9, 9, 3$.

由

$$B(P^{-1}\alpha) = (P^{-1}A^*P)(P^{-1}\alpha) = P^{-1}A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}P^{-1}\alpha$$

知, B 的对应特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量为 $P^{-1}\alpha$, 故 $B+2E$ 的对应特征值 $\frac{|A|}{\lambda}+2$ 的特征向量为 $P^{-1}\alpha$, 其中

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 由 $(E-A)x = 0$, 得 A 的特征向量为

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T;$$

对于 $\lambda_3 = 7$, 由 $(7E-A)x = 0$, 得 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$, 故

$$P^{-1}\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, P^{-1}\alpha_2 = (-1, -1, 1)^T, P^{-1}\alpha_3 = (0, 1, 1)^T,$$

于是 $B+2E$ 对应特征值 9 的特征向量为 $k_1(1, -1, 0)^T + k_2(-1, -1, 1)^T$, 其中 k_1, k_2 为不全为 0 的常数;
 $B+2E$ 对应特征值 3 的特征向量为 $k_3(0, 1, 1)^T$, 其中 k_3 为不为 0 的常数.

(4) 解 (I) 利用 $A \sim B$ 的必要条件: $\begin{cases} \sum a_{ii} = \sum b_{ii}, \\ |A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \end{cases}$ 有

$$\begin{cases} 2+y+(-1) = 2+0+x, \\ |A| = 2 \cdot y \cdot (-1) = -2, \end{cases}$$

解得 $x = 0, y = 1$.

(II) 由 (I) 知, A, B 有相同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

对于 $\lambda_1 = 2$, 由 $(2E-A)x = 0$, 得特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$;

对于 $\lambda_2 = 1$, 由 $(1E-A)x = 0$, 得特征向量 $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$;

对于 $\lambda_3 = -1$, 由 $(-1E-A)x = 0$, 得特征向量 $\alpha_3 = (0, -1, 1)^T$.

令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = B$.

(5) 解 (I) 由 $A = \alpha\beta^T, \alpha^T\beta = 0$, 有

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 0\alpha\beta^T = O.$$

(II) 设 $A\xi = \lambda\xi, \xi \neq 0$, 则 $A^2\xi = \lambda A\xi = \lambda^2\xi$.

由 $A^2 = O$ 知, $\lambda^2\xi = 0$, 又 $\xi \neq 0$, 故 $\lambda = 0$ (n 重根) 是 A 的特征值.

由已知 α, β 为非零向量, 不妨设 $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$, 则

$$0E - A = \begin{pmatrix} -a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

解得

$$\xi_1 = (-b_2, b_1, 0, \cdots, 0)^T, \xi_2 = (-b_3, 0, b_1, \cdots, 0)^T, \cdots, \xi_{n-1} = (-b_n, 0, 0, \cdots, b_1)^T$$

是 A 对应 $\lambda = 0$ 的特征向量, 其全部特征向量为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-1}\xi_{n-1}$, 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为不全为 0 的任意常数.

(6) 解 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 2 \\ k & \lambda + 1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0,$$

得 A 的特征值为 $1, -1, -1$.

若 $A \sim \Lambda$, 则 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 对应两个线性无关的特征向量, 即 $3 - r(-E - A) = 2$, 故 $r(-E - A) = 1$.
由于

$$-E - A = \begin{pmatrix} -1-3 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ -4 & -2 & -1+3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $k = 0$.

当 $\lambda = 1$ 时, 由 $(1E - A)x = 0$, 得 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$;

当 $\lambda = -1$ 时, 由 $(-E - A)x = 0$, 得 $\alpha_2 = (-1, 2, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$.

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(7) 解 (I) 由矩阵相似的定义, 有

$$\begin{aligned} A(x, Ax, A^2x) &= (Ax, A^2x, A^3x) = (Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x) \\ &= (x, Ax, A^2x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{令 } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } AP = PB, \text{ 故 } A = PBP^{-1}.$$

(II) 由 (I) 知, $A \sim B$, 故 $A + E \sim B + E$, 从而

$$|A + E| = |B + E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$(8) \text{ 解 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a).$$

若 $\lambda = 2$ 是二重根, 则 $2^2 - 16 + 18 + 3a = 0$, 解得 $a = -2$.

当 $a = -2$ 时, A 的特征值为 $2, 2, 6$, 且

$$r(2E - A) = r\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

故 $\lambda = 2$ 对应两个线性无关的特征向量, 从而 A 相似于对角矩阵.

若 $\lambda = 2$ 不是二重根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 应为完全平方, 故

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (18 + 3a) = 0,$$

解得 $a = -\frac{2}{3}$.

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, 可得 A 的特征值为 $2, 4, 4$, 且

$$r(4E - A) = r\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}\right) = 2,$$

故 $\lambda = 4$ 只有一个线性无关的特征向量, 从而 A 不能相似于对角矩阵.

(9) 解 (I) 对 $Ax = \beta$ 的增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -a-2 \end{array}\right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a+2 \end{array}\right). \end{aligned}$$

因为 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 从而 $a = -2$.

(II) 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3$.

当 $\lambda_1 = 3$ 时, 由 $(3E - A)x = 0$, 得 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$;

当 $\lambda_2 = 0$ 时, 由 $(0E - A)x = 0$, 得 $\alpha_2 = (1, 1, 1)^T$;

当 $\lambda_3 = -3$ 时, 由 $(-3E - A)x = 0$, 得 $\alpha_3 = (1, -2, 1)^T$.

由于实对称矩阵 A 的特征值不同, 故特征向量已经正交, 从而只需单位化, 有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \text{ 使得 } Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(10) 解 (I) 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ -a & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$.

因为 A 有 3 个线性无关的特征向量, 所以对应二重特征值 1, A 有 2 个线性无关的特征向量, 故 $r(E - A) = 1$. 又由于

$$E - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $a = -1$.

(II) 对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 由 $(E - A)x = 0$, 得 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$.

对于 $\lambda_3 = -2$, 由 $(-2E - A)x = 0$, 得 $\alpha_3 = (-2, -1, 1)^T$.

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(11) 解 (I) 由 $\alpha^T \beta = 0$ 知, $\beta^T \alpha = (\alpha^T \beta)^T = 0$.

由已知, 有

$$A\alpha = \alpha\beta^T \alpha + \beta\alpha^T \alpha = \beta, \quad A\beta = \alpha\beta^T \beta + \beta\alpha^T \beta = \alpha,$$

则

$$A(\alpha + \beta) = \alpha + \beta, \quad A(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta).$$

由已知, α, β 为单位正交向量组, 故 α, β 线性无关, 即 $\alpha + \beta \neq 0, \alpha - \beta \neq 0$, 从而 A 的特征值有 $1, -1$. 又由于

$$r(A) = r(\alpha\beta^T + \beta\alpha^T) \leq r(\alpha\beta^T) + r(\beta\alpha^T) = 1 + 1 = 2,$$

故 A 不可逆, 即 0 是 A 的特征值, 从而 A 有 3 个不同的特征值 $1, -1, 0$, 于是

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(II) 由 $A\gamma = 0, \gamma \neq 0$ 知, γ 是特征值 0 对应的特征向量, 故特征值 $0, 1, -1$ 对应的特征向量分别为 $\gamma, 2(\alpha + \beta), \beta - \alpha$, 从而

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(12) 解 由 $|\lambda E - A| = 0, |\lambda E - B| = 0$, 可得 A, B 有相同的特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$, 由于 A, B 为实对称矩阵, 故 A, B 相似于同一个对角矩阵.

对于 $\lambda_1 = 3$, 由 $(3E - A)x = 0$, 得 $\alpha_1 = (1, 1)^T$;

对于 $\lambda_2 = -1$, 由 $(-E - A)x = 0$, 得 $\alpha_2 = (1, -1)^T$.

对 α_1, α_2 单位化, 得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T.$$

同理, 可求得 B 对应于 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ 的特征向量, 再将其单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)^T, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{3})^T.$$

令 $Q_1 = (\gamma_1, \gamma_2)$, 则 $Q_1^{-1}AQ_1 = \text{diag}(3, -1)$;

令 $Q_2 = (\eta_1, \eta_2)$, 则 $Q_2^{-1}BQ_2 = \text{diag}(3, -1)$, 故 $Q_1^{-1}AQ_1 = Q_2^{-1}BQ_2$, 即

$$Q_2Q_1^{-1}AQ_1Q_2^{-1} = B, \quad (Q_1Q_2^{-1})^{-1}AQ_1Q_2^{-1} = B,$$

令 $Q = Q_1 Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$, 则 Q 为所求正交矩阵.

(13) 证 由于 A 是实对称矩阵, 故存在正交矩阵 Q , 使得

$$A = Q \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot Q^{-1}.$$

令 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$, 故

$$\begin{aligned} A &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^T + \lambda_2 \alpha_2 \alpha_2^T + \dots + \lambda_n \alpha_n \alpha_n^T. \end{aligned}$$

(14) 解 (I) 利用定义求 λ_0 . 由已知

$$A^* \alpha = \lambda_0 \alpha, \quad \text{①}$$

式①两边同时左乘 A , 得 $AA^* \alpha = \lambda_0 A \alpha$, 即 $|A| \alpha = \lambda_0 A \alpha$.

又由 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ 知,

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \times 2 \times (-1) = -2,$$

故

$$A \alpha = \frac{-2}{\lambda_0} \alpha. \quad \text{②}$$

由 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, -1)$ 知, A 的特征值 $\lambda_3 = -1$ 对应的特征向量为 $\alpha_3 = (-2, -5, 1)^T$, 且 $\alpha = -\alpha_3$, 故由式②知, $\frac{-2}{\lambda_0} = -1$, 即 $\lambda_0 = 2$.

(II) 由 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = -\frac{1}{2}A$ 知, 只需求 A 即可. 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 由已知 A 为实对称矩阵, 且

A 有 3 个不同的特征值 $1, 2, -1$, 故根据实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量必正交, 有 $\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} -2 - 5a + 2 = 0, \\ -2b - 5(a+1) + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a = 0, b = -2, \text{ 故}$$

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, -1) = \Lambda$, 得

$$A = P \Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}.$$

故

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = -\frac{1}{2}\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}.$$

(Ⅲ) 由 $\mathbf{A}\alpha_i = \lambda_i \alpha_i (i = 1, 2, 3)$, 得 $\mathbf{A}^* \mathbf{A} \alpha_i = \lambda_i \mathbf{A}^* \alpha_i$, 即 $\mathbf{A}^* \alpha_i = \frac{|\mathbf{A}|}{\lambda_i} \alpha_i$, 故

$$(\mathbf{A}^* + \mathbf{E})\alpha_i = \left(\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda_i} + 1\right) \alpha_i,$$

从而 $\mathbf{A}^* + \mathbf{E}$ 的特征值为 $\mu_i = \frac{|\mathbf{A}|}{\lambda_i} + 1 = \frac{-2}{\lambda_i} + 1$, 即 $\mu_1 = -1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 3$, 于是

$$|\mathbf{A}^* + \mathbf{E}| = \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0.$$

注 此题第(I)问的关键是看出 $\mathbf{A}^*$ 的特征向量 α 与 $\mathbf{A}$ 的特征向量 α_3 的关系为

$$\alpha = -\alpha_3.$$

(15) **解** (I) 由已知, 有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} (1, 2, \cdots, n),$$

故 $r(\mathbf{A}) = 1$. 由于

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & \cdots & -n \\ -2 & \lambda - 4 & \cdots & -2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & -2n & \cdots & \lambda - n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & \cdots & -n \\ -2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{i=1}^n i^2 & -2 & \cdots & -n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \sum_{i=1}^n i^2) \lambda^{n-1}, \end{aligned}$$

故 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = \sum_{i=1}^n i^2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ 时, 由 $(0\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 知

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0,$$

故 $\mathbf{A}$ 的一组特征向量为

$$\xi_1 = (-2, 1, 0, \dots, 0)^T, \xi_2 = (-3, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \xi_{n-1} = (-n, 0, \dots, 0, 1)^T.$$

因此 A 的特征值 0 对应的特征向量为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-1}\xi_{n-1}$ ($k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ 不全为 0).

当 $\lambda_n = \sum_{i=1}^n i^2$ 时, 对方程 $(\lambda_n E - A)x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 得

$$(\lambda_n E - A) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

故 A 的一个特征向量为 $\xi_n = (1, 2, \dots, n)^T$, 从而 A 的特征值 $\sum_{i=1}^n i^2$ 对应的特征向量为 $k_n \xi_n$ ($k_n \neq 0$).

$$(II) \text{ 取 } P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \sum_{i=1}^n i^2 \end{pmatrix} \sim \Lambda. \text{ 所以, } A \text{ 相似于对角矩阵.}$$

第六章 二次型

考试要求

1. 掌握二次型及其矩阵表示, 了解二次型秩的概念, 了解合同变换与合同矩阵的概念, 了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.
2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法, 会用配方法化二次型为标准形.
3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念, 并掌握其判别法.

第一节 二次型的概念及其标准形

内容与提要

一、基本概念

1. 二次型及其表示

含有 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为 n 元二次型.

二次型也可写为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j, a_{ij} = a_{ji}$ 的形式.

记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x, \quad A^T = A,$$

称 A 是二次型的矩阵, $r(A)$ 是二次型的秩, A 是实对称矩阵.

2. 二次型的标准形

二次型只含有平方项, 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2,$$

称为二次型的标准形.

3. 二次型的标准化

二次型可通过坐标变换 $x = Cy$ (C 可逆) 化为标准形, 即

$$\begin{aligned} x^T A x &\stackrel{x=Cy}{=} (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y \\ &= y^T \Lambda y = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \dots + d_ny_n^2, \end{aligned}$$

其中 $\Lambda = C^T A C$.

由于 A 是实对称矩阵, 故存在正交变换 $x = Qy$ (Q 为正交矩阵) 将 $x^T A x$ 标准化, 即

$$\begin{aligned} x^T A x &\stackrel{x=Qy}{=} y^T Q^T A Q y = y^T Q^{-1} A Q y \\ &= y^T \Lambda y = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \dots + \lambda_ny_n^2, \end{aligned}$$

其中 $\Lambda = Q^T A Q = Q^{-1} A Q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

说明 ① 由于二次型的矩阵是实对称矩阵, 且唯一, 故二次型与实对称矩阵 A 一一对应.

例如

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

② 标准形的矩阵是对角矩阵.

例如

$$\text{标准形 } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

③ 将二次型化为标准形实质上就是将矩阵 $\mathbf{A}$ 化为对角矩阵. 由于 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵, 故一定可以用正交矩阵将其化为对角矩阵, 即二次型总可以利用正交变换化为标准形.

4. 惯性指数

在标准形中, 正平方项的个数称为正惯性指数, 记为 p ; 负平方项的个数称为负惯性指数, 记为 q .

5. 惯性定理

二次型经过可逆坐标变换后, 正、负惯性指数保持不变, 且 $p + q = r(f) = r(\mathbf{A})$.

例如 设三元二次型的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$, 则 $p = 2, q = 1$, 且 $p + q = r(f) = r(\mathbf{A}) = 3$.

6. 二次型的规范形

若 n 元二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 经过坐标变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$ 化为标准形, 即

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{C} \mathbf{y}} d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_{p+q} y_{p+q}^2,$$

其中 $d_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, p+q)$. 再经过坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{d_2}} z_2, \\ \vdots \\ y_{p+q} = \frac{1}{\sqrt{d_{p+q}}} z_{p+q}, \\ y_{p+q+1} = z_{p+q+1}, \\ \vdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

将二次型化为 $z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$, 则称之为规范形. 二次型的规范形是唯一的, 但标准形不唯一(与坐标变换有关).

7. 矩阵合同

若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶实对称矩阵, 且存在可逆矩阵 $\mathbf{C}$, 使得 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$, 则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同.

若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则

$$\mathbf{A} \text{ 与 } \mathbf{B} \text{ 合同} \Leftrightarrow p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}, \quad q_{\mathbf{A}} = q_{\mathbf{B}}.$$

说明 实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似 $\nRightarrow \mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同.

事实上, 若 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 则 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 有相同的特征值, 故 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 有相同的正、负惯性指数, 从而 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同.

反之, 若实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同, 则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的正、负惯性指数分别相同, 但不能得到 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值相同, 故 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 不一定相似.

8. 坐标变换

形如
$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3, \\ x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 \end{cases}$$
 称为坐标变换, 记作 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{3 \times 3}$, 且 $\mathbf{C}$ 可逆,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T, \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$.

注 坐标变换一定要注意 $\mathbf{C}$ 可逆.

二、二次型化为标准形的方法

1. 正交变换

(1) 求 $\mathbf{A}$ 的特征值, 即由 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, 得 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(2) 求 $\mathbf{A}$ 的特征向量, 即由 $(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} (i = 1, 2, \dots, n)$, 得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

(3) 对 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 进行施密特正交化、单位化, 得 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ (正交化只针对重特征值对应的特征向量).

(4) 令 $\mathbf{Q} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 为正交变换.

(5) 写出标准形 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$.

2. 配方法

通过配方法将二次型化为完全平方的形式, 再作坐标变换, 注意配方时, “一次一个字母”.

例如 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2.$$

令
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 = 2x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \quad \text{因此标准形为 } y_1^2 + y_2^2.$$

说明 正交变换保持向量的长度不变. 设 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵, 则

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y}, \quad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|.$$

因为

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y},$$

所以 $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, 从而正交变换保持几何图形的形状不变.

典型例题分析

例 1 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

(1) 用正交变换化二次型为标准形, 并写出所用的正交变换;

(2) 当 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 2$ 时, 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的最大值.

解 (1) 二次型的矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 由

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda - 5 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5)(\lambda - 6) = 0,$$

得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 6$.

对于 $\lambda_1 = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$, 得 $\alpha_1 = (5, -1, 2)^T$;

对于 $\lambda_2 = 5$, 由 $(5E - A)x = 0$, 得 $\alpha_2 = (0, 2, 1)^T$;

对于 $\lambda_3 = 6$, 由 $(6E - A)x = 0$, 得 $\alpha_3 = (1, 1, -2)^T$.

因为 3 个特征值互不相同, 所以只需对特征向量进行单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 $x = Qy$ 为正交变换, 二次型的标准形为 $5y_2^2 + 6y_3^2$.

(2) 当 $x^T x = 2$ 时, 由

$$x^T x \stackrel{x=Qy}{=} (Qy)^T Qy = y^T Q^T Qy = y^T y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2$$

可知

$$\begin{aligned} x^T A x &= y^T \Lambda y = 0 \cdot y_1^2 + 5y_2^2 + 6y_3^2 \\ &\leq 6y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 \\ &= 6(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 6 \times 2 = 12, \end{aligned}$$

故 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的最大值为 12.

注 ① 由于 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2$ (球面), 故在 $y = (0, 0, \pm\sqrt{2})^T$ 处, $f(x_1, x_2, x_3)$ 取得最大值.

② 设 n 元二次型 $f = x^T A x$, A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 中的最大值为 λ^* , 最小值为 λ_* , 且 $x^T x = M (M > 0)$, 则

$$M\lambda_* \leq x^T A x \leq M\lambda^*,$$

即二次型 $f = x^T A x$ 的最大值为 $M\lambda^*$, 最小值为 $M\lambda_*$.

例 2 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经过正交变换的标准形为 $3y_1^2 + 3y_2^2 + by_3^2$, 求 a, b 的值及所用的正交变换.

解 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & b \end{pmatrix}$, 依题设可知, $A \sim \Lambda$, 故

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1 + 1 + 1 = 3 + 3 + b, \\ |3E - A| = 0, \end{cases}$$

解得 $a = -2, b = -3$.

因为相似矩阵有相同的特征值, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, 由 $(3E - A)x = 0$, 得 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$.

对于 $\lambda_3 = -3$, 由 $(-3E - A)x = 0$, 得 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$.

将 α_1, α_2 正交化, 得

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则正交变换为 $x = Qy$, 标准形为 $3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$.

例 3 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2. 求:

- (1) a 的值;
- (2) 正交变换 $x = Qy$ 化 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形;
- (3) 方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的全部解.

解 (1) 由二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩为 2 可知

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix} = -8a = 0,$$

解得 $a = 0$.

(2) 当 $a = 0$ 时, 有 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0,$$

得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 由 $(2E - A)x = 0$, 得 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, 1)^T$;

对于 $\lambda_3 = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$, 得 $\alpha_3 = (1, -1, 0)^T$.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已经两两正交, 故只需单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \eta_2 = (0, 0, 1)^T, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T.$$

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则在正交变换 $x = Qy$ 下, $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = y^T \Lambda y = 2y_1^2 + 2y_2^2$.

(3) 配方可得

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 = 0,$$

故 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$ 解得 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的全部解为 $k(1, -1, 0)^T$, 其中 k 为任意常数.

例 4 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$.

(1) 证明: 二次型 f 的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(2) 若 α, β 正交且为单位向量, 证明: f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

证 (1) 依题设, 有

$$\begin{aligned} f &= 2(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x^T (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) x = x^T (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) x, \end{aligned}$$

故二次型 f 的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(2) 依题设, 只需证明 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 的特征值为 $2, 1, 0$ 即可. 由

$$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha \|\alpha\|^2 + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$$

可知, $\lambda_1 = 2$ 为 A 的特征值. 又因为

$$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\|\beta\|^2 = \beta,$$

所以 $\lambda_2 = 1$ 为 A 的特征值. 又由

$$\begin{aligned} r(A) &= r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \\ &= r(\alpha) + r(\beta) = 2 < 3 \end{aligned}$$

可知, $|A| = 0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 故 $\lambda_3 = 0$ 为 A 的特征值.

综上所述, f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

例 5 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_1x_3 - 2x_2x_3$ 的正、负惯性指数都是 1.

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$;

(2) (仅数学一要求) 求曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 在点 $(1, 1, 0)$ 处的切平面方程.

解 (1) 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由已知 $r(A) = p + q = 2$, 故 $|A| = -(a-1)^2(a+2) = 0$, 解得 $a = 1, a = -2$.

当 $a = 1$ 时, $r(A) = 1$, 不符合题意, 故 $a = -2$, 于是

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(2) 令 $F = f(x_1, x_2, x_3) - 1$, 可求得

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{(1,1,0)} = 4, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_{(1,1,0)} = -2, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x_3} \right|_{(1,1,0)} = 2,$$

故切平面方程为 $4(x_1 - 1) - 2(x_2 - 1) + 2(x_3 - 0) = 0$, 即 $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$.

例 6 (仅数学一要求) 已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$, 求 a, b 的值和正交矩阵 P .

解 依题设, 问题等价于将二次型 $f = x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz$ 经过正交变换化为标准形 $\eta^2 + 4\zeta^2$.

二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 存在正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{cases} 1+a+1=0+1+4, \\ |A| = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{vmatrix} = -(b-1)(b-1) = 0, \end{cases}$$

解得 $a=3, b=1$, 从而 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 于是可得 A 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=0$, 由 $(0E-A)x=0$, 得 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$;

对于 $\lambda_2=1$, 由 $(E-A)x=0$, 得 $\alpha_2=(1,-1,1)^T$;

对于 $\lambda_3=4$, 由 $(4E-A)x=0$, 得 $\alpha_3=(1,2,1)^T$.

显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已正交, 故只需单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令 $P=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 即为所求正交矩阵.

例 7 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ 的秩为 2. 求:

(1) 实数 a 的值;

(2) 正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

解 (1) 由 $r(A^T A) = r(A) = 2$, 可得 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a+1=0$, 故 $a=-1$.

(2) 依题设, 有

$$\begin{aligned} f &= x^T(A^T A)x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3, \end{aligned}$$

即 f 的矩阵为 $B = A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

由

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) = 0,$$

得 $\lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=6$.

对于 $\lambda_1=0$, 由 $(0E-B)\alpha=0$, 得 $\alpha_1=(1,1,-1)^T$;

对于 $\lambda_2=2$, 由 $(2E-B)\alpha=0$, 得 $\alpha_2=(1,-1,0)^T$;

对于 $\lambda_3=6$, 由 $(6E-B)\alpha=0$, 得 $\alpha_3=(1,1,2)^T$.

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 $x = Qy$ 为正交变换, 标准形为 $2y_2^2 + 6y_3^2$.

例 8 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 有正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$,

求 a 及 Q .

解 Q 的第 1 列 $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ 是 A 的特征向量, 不妨设其对应的特征值为 λ_1 , 则 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$ 是 λ_1 对应的一个特征向量.

$$\text{由 } A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, \text{ 即 } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 可知}$$

$$\begin{cases} 0 + (-2) + 4 = \lambda_1, \\ -1 + 6 + a = 2\lambda_1, \\ 4 + 2a + 0 = \lambda_1, \end{cases}$$

解得 $\lambda_1 = 2, a = -1$. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4) = 0,$$

得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$.

对于 $\lambda_2 = 5$, 由 $(5E - A)x = 0$, 得 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$;

对于 $\lambda_3 = -4$, 由 $(-4E - A)x = 0$, 得 $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.

将 α_2, α_3 单位化, 得

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T,$$

故所求的正交矩阵为

$$Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

例 9 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$, $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 为实对称矩阵, 且 $\sum_{i=1}^3 a_{ii} = 2$, 矩阵 A 的行向量

与矩阵 B 的列向量均正交, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 用正交变换化二次型为标准形, 并求所作的正交变换;

(2) 求该二次型.

解 (1) 由已知 $AB = O$ 知, B 的列向量都是 $Ax = 0$ 的解. 令

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 2, 1)^T,$$

则 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 0, A\alpha_3 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 A 对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量, 且 α_1 与 α_2 线性无关(正交), $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, 从而 $\lambda = 0$ 至少是二重特征值.

设 A 的 3 个特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 由于 $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 2$, 故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$.

设 $\lambda_3 = 2$ 对应的特征向量为 $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, 则 y 与 α_1, α_2 均正交, 故

$$\begin{cases} \alpha_1^T y = y_1 + y_2 + y_3 = 0, \\ \alpha_2^T y = -y_1 + y_2 = 0, \end{cases}$$

解得 $y = (1, 1, -2)^T$, 将 α_1, α_2, y 单位化, 得

$$\eta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, \eta_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \eta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^T,$$

故所求正交变换为 $x = Qy$, 其中 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 所求标准形为 $f = 2y_3^2$.

$$(2) \text{ 由 } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \text{ 得}$$

$$A = Q \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

故所求二次型为

$$f = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{4}{3}x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 - \frac{4}{3}x_1x_3 - \frac{4}{3}x_2x_3.$$

例 10 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经过可逆线性变换 $x = Cy$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 + 2y_1y_2$.

(1) 求 a 的值, 并求一个可逆矩阵 C ;

(2) 问: 是否存在正交变换 $x = Qy$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$?

解 (1) 依题设, 存在可逆矩阵 C , 使得 $C^TAC = B$, 即 A 与 B 合同, 故 $r(A) = r(B)$.

由已知, f 与 g 的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

且 $r(B) = 2 = r(A)$, 从而有 $|A| = (1-a)^2(2a+1) = 0$, 得 $a = 1$ 或 $a = -\frac{1}{2}$.

当 $a = 1$ 时, $r(A) = 1$, 故 $a = 1$ 舍去;

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 有

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3.$$

用配方法, 将 f 与 g 化为规范形, 即

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 - x_1(x_2 + x_3) + \left[\frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right]^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 \\ &= \left[x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right]^2 + \frac{3}{4}(x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3) \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_3), \\ z_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

由已知, 有

$$g = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 + 2y_1y_2 = (y_1 + y_2)^2 + 3y_3^2,$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_2 = \sqrt{3}y_3, \\ z_3 = y_2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所求可逆矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) f 与 g 的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

若存在正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为 g , 则有

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = B,$$

即 A 与 B 相似. 但 $\text{tr}(A) = 3, \text{tr}(B) = 5$, 故 A 与 B 不相似.

所以不存在正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$.

例11 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$. 若对任意实向量 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, (\alpha^T A \beta)^2 \leq \alpha^T A \alpha \cdot \beta^T A \beta$

都成立, 求 a 的取值范围.

解 $(\alpha^T A \beta)^2 \leq \alpha^T A \alpha \cdot \beta^T A \beta$ 变形为

$$\alpha^T A \beta \alpha^T A \beta - \alpha^T A \alpha \cdot \beta^T A \beta \leq 0, \quad \text{即} \quad \alpha^T A (\beta \alpha^T - \alpha \beta^T) A \beta \leq 0.$$

又

$$\beta \alpha^T - \alpha \beta^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $u = x_2 y_1 - x_1 y_2$, 则 $\beta \alpha^T - \alpha \beta^T = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned} A(\beta \alpha^T - \alpha \beta^T)A &= \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -au & (a+1)u \\ -au & au \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & au \\ -au & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \alpha^T A (\beta \alpha^T - \alpha \beta^T) A \beta = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & au \\ -au & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = ax_1 y_2 u - ax_2 y_1 u = -au^2.$$

当 $-au^2 \leq 0$ 时, 有 $a \geq 0$, 所以 a 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

第二节 正定二次型与正定矩阵

内容与提要

一、正定二次型的概念

设二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ (A 为对称矩阵), 若对任意 $x \neq 0$, 都有 $x^T A x > 0$, 则称二次型正定, 称 A 为正定矩阵.

例如 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = x^T A x$, 对任意 $x = (x_1, x_2, x_3)^T \neq 0$ 都有

$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x > 0$, 则 f 为正定二次型, $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 为正定矩阵.

二、正定二次型的判别

- (1) 二次型 $x^T A x$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的特征值全大于 0.
 (2) 二次型 $x^T A x$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于 0.
 (3) 设 A 为实对称矩阵, 则 A 正定 $\Leftrightarrow A$ 合同于单位矩阵 E .
 (4) 设 A 为实对称矩阵, 则 A 正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n = r(A)$.
 (5) 设 A 为实对称矩阵, 则 A 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P^T P$.
 (6) 二次型 $x^T A x$ 正定的必要条件是 $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

说明 ① 判别(3)与判别(5)是等价的.

事实上, A 与 E 合同, 等价于存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = E$, 即

$$A = (C^T)^{-1} C^{-1} = (C^{-1})^T C^{-1},$$

令 $C^{-1} = P$, 则 $A = P^T P$.

- ② 在判别矩阵 A 正定时, 需要检验 A 是否为实对称矩阵.
 ③ 二次型正定的定义、特征值全大于 0、顺序主子式全大于 0 经常用于正定矩阵的判别问题上.
 ④ 若 A 是正定矩阵, 则 A^* 与 A^{-1} 也是正定矩阵.

证 设矩阵 A 正定, 则

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1},$$

即 A^{-1} 为实对称矩阵. 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 由 A 正定知, $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. 又因为 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$, 且全大于 0, 所以 A^{-1} 是正定矩阵.

同理可证, A^* 也是正定矩阵.

典型例题分析

例 1 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩 $r(A) = n$, 证明: $A^T A$ 正定.

证 由 $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ 知, $A^T A$ 为对称矩阵. 对任意 x , 有

$$x^T (A^T A) x = (Ax)^T (Ax) \geq 0.$$

由已知, 得 $r(A) = n$ (A 列满秩), 故方程组 $Ax = 0$ 只有零解, 即当 $x \neq 0$ 时, $Ax \neq 0$, 此时有 $(Ax)^T (Ax) > 0$, 故由正定的定义知, $A^T A$ 是正定矩阵.

注 Ax 表示列向量, $(Ax)^T (Ax)$ 表示 Ax 与 Ax 的内积. 当 $Ax \neq 0$ 时, 内积 $(Ax)^T (Ax) > 0$.

例 2 设 A 是 n 阶正定矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 n 维非零列向量, 且 $\alpha_i^T A \alpha_j = 0 (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, r)$, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

证 利用定义法. 设

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = 0, \quad (1)$$

式①两边同时左乘 $\alpha_1^T A$, 得

$$k_1 \alpha_1^T A \alpha_1 + k_2 \alpha_1^T A \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_1^T A \alpha_r = 0. \quad (2)$$

由已知 $\alpha_i^T A \alpha_j = 0 (i \neq j)$ 知, 式②可变为

$$k_1 \alpha_1^T A \alpha_1 = 0. \quad (3)$$

又由 A 是正定矩阵, $\alpha_1 \neq 0$, 知 $\alpha_1^T A \alpha_1 > 0$, 故由式③知, $k_1 = 0$.

类似地, 式①分别左乘 $\alpha_2^T A, \alpha_3^T A, \dots, \alpha_r^T A$, 可得

$$k_2 = k_3 = \dots = k_r = 0,$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

例 3 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 则 f 正定的充分必要条件是().

A. $|\mathbf{A}| > 0$

B. f 的负惯性指数为 0

C. f 的秩为 n

D. $\mathbf{A} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$, $\mathbf{M}$ 为 n 阶可逆矩阵

解 由 f 的负惯性指数为 0, 未必得到正惯性指数为 n , 而 $|\mathbf{A}| > 0$ 及 f 的秩为 n 都不能判定 $\mathbf{A}$ 正定, 故排除 A, B, C 选项.

事实上, 若 $\mathbf{A} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ ($\mathbf{M}$ 可逆), 则对任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 有 $\mathbf{M}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 故

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = (\mathbf{M}\mathbf{x})^T (\mathbf{M}\mathbf{x}) = \|\mathbf{M}\mathbf{x}\|^2 > 0,$$

从而由定义知, f 正定.

反之, 若 f 正定, 则存在可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, 化 f 为规范形, 即 $f = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$, 也就是 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{E}$. 由于 $\mathbf{P}$ 可逆, 故

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^T)^{-1} \cdot \mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})^T (\mathbf{P}^{-1}).$$

令 $\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-1}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$.

综上所述, D 选项正确.

例 4 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则 t 的取值范围为_____.

解 用顺序主子式全大于 0 确定 t 的取值范围. 令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 则

$$a_{11} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, \quad |\mathbf{A}| = -4t^2 - 4t + 8 > 0,$$

解得 $-2 < t < 2$, 且 $-2 < t < 1$, 故 t 的取值范围为 $(-2, 1)$.

例 5 设 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + kx_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + 3x_3)^2 + (x_1 + 3x_2 + kx_3)^2$ 正定, 则 k 的取值范围为_____.

解 由已知, $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$, 且等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + kx_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

由正定的定义知, f 正定 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \neq \mathbf{0}$, 有 $f(x_1, x_2, x_3) > 0$, 故 f 正定 $\Leftrightarrow$ 方程组 (1) 只有零解, 即系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 5k - 5 \neq 0,$$

解得 $k \neq 1$, 即 k 的取值范围为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

例 6 已知矩阵 $\mathbf{A}$ 合同于对称矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则必有().

A. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值

B. $\mathbf{A}$ 为正定矩阵

C. A 为对称矩阵D. A 的秩为 n

解 因为合同不一定相似,所以不能判定 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值. 又因为没有指出 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的具体值,所以不能判定 A 正定或者秩为 n ,从而排除 A, B, D 选项.

事实上,由于 A 与 A 合同,故存在可逆矩阵 P ,使得 $A = P^T A P$,从而

$$A^T = (P^T A P)^T = P^T A^T P = P^T A P = A,$$

故 C 选项正确.

例 7 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(1) 求矩阵 A ;

(2) 证明: $A + E$ 为正定矩阵.

解 (1) 由已知 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 + 0 \cdot y_3^2$, 故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.

又因为 Q 的第 3 列是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 所以 $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 是 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量.

设 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$. 因为 A 对称, 所以 $\alpha^T \alpha_3 = 0$, 即 $x_1 + x_3 = 0$, 从而有 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$.

由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$, 得

$$\begin{aligned} A &= (\alpha_1, \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 因为 A 的特征值为 $1, 1, 0$, 所以 $A + E$ 的特征值为 $2, 2, 1$, 全大于 0. 又由于

$$(A + E)^T = A + E,$$

故 $A + E$ 为正定矩阵.

例 8 设 $A_{m \times m}$ 正定, B 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: $B^T A B$ 正定的充分必要条件是 $r(B) = n$.

证 必要性($\Rightarrow$).

证法一(用方程组) 对任意 $x \neq 0$, 由 $B^T A B$ 正定知,

$$x^T (B^T A B) x = (Bx)^T A (Bx) > 0,$$

故必有 $Bx \neq 0$, 即 $Bx = 0$ 只有零解, 从而 $r(B) = n$.

证法二(用秩) 由 $B^T A B$ 正定, 得 $|B^T A B| \neq 0$, 故

$$n = r(B^T A B) \leq r(B) \leq \min\{m, n\} \leq n,$$

即 $r(B) = n$.

或者, 由 A 正定知, $A = D^T D$, 其中 D 可逆, 那么

$$n = r(B^T A B) = r(B^T D^T D B) = r[(DB)^T (DB)] = r(DB) = r(B).$$

证法三(用反证法) 若 $r(B) \neq n$, 则 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 的列向量组线性相关, 故存在不全为 0 的

$k_1, k_2, \dots, k_n$, 使得

$$B \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_1 \beta_1 + \dots + k_n \beta_n = 0,$$

即存在 $x = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T \neq 0$, 使得 $x^T(B^T A B)x = x^T B^T A(Bx) = 0$, 这与 $B^T A B$ 正定矛盾.

充分性($\Leftarrow$).

证法一(用定义) 先证 $B^T A B$ 是对称矩阵. 因为

$$(B^T A B)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T A B,$$

所以 $B^T A B$ 对称.

由 $r(B) = n$, 得 $Bx = 0$ 只有零解, 故对任意 $x \neq 0$, 有 $Bx \neq 0$.

又因为 A 正定, 所以对 $Bx \neq 0$, 必有 $(Bx)^T A(Bx) > 0$, 从而对任意 $x \neq 0$, 恒有 $x^T(B^T A B)x > 0$, 于是 $B^T A B$ 正定.

证法二(用特征值) 设 λ 是 $B^T A B$ 的任一特征值, α 是其对应的特征向量, 即

$$B^T A B \alpha = \lambda \alpha, \quad \alpha \neq 0,$$

用 α^T 左乘上式, 得 $(B\alpha)^T A(B\alpha) = \lambda \alpha^T \alpha$.

又由 $r(B) = n$ 知, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $B\alpha \neq 0$ 及 $\alpha^T \alpha = \|\alpha\|^2 > 0$. 而 A 正定, 故

$$\lambda \alpha^T \alpha = (B\alpha)^T A(B\alpha) > 0,$$

因此 $\lambda > 0$, 即 $B^T A B$ 正定.

例 9 下列矩阵中, 与 $A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 相似的矩阵是_____; 与 A 合同的矩阵是_____.

$$A. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B. B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C. C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D. D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

解 由 $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$, 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, 故 $A \sim \Lambda$, 但 A 不是对称矩阵, 从而 A 与 Λ 不合同.

由 $|\lambda E - B| = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$, 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$, 又因为 B 为实对称矩阵, 所以 $B \sim \Lambda$ 且 $B \simeq \Lambda$.

由 $|\lambda E - C| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$, 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -5$, 与 A 的特征值不同, 故 C 与 A 不相似, 但 C 是实对称矩阵, 且秩为 2, 正惯性指数 $p = 1$, 从而 $C \simeq \Lambda$.

由 $|\lambda E - D| = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$, 得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$, 与 A 的特征值不同, 虽然 D 为实对称矩阵, 但其秩为 3, 故 D 与 A 不相似, 也不合同.

故, 与 A 相似的是 A, B 选项, 与 A 合同的是 B, C 选项.

注 相似矩阵有相同的特征值, 但这只是矩阵相似的必要条件, 因此在 A, B, C, D 选项中, 判断哪个矩

阵与 Λ 相似,除了要看其是否具有 Λ 的 3 个特征值 $0, 1, -1$ 外,还要看其能否对角化.

与 Λ 合同的矩阵首先必须是实对称矩阵,其次两实对称矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 它们具有相同的秩和正惯性指数.具体到本题,与 Λ 合同 $\Leftrightarrow$ 秩为 2, $p = 1$. 也可以通过特征值来判断,即矩阵与 Λ 合同 $\Leftrightarrow$ 它的特征值一个为 0, 一个为正数, 一个为负数.

例 10 二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 的规范形为().

A. $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

B. $f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$

C. $f = z_1^2 - z_2^2$

D. $f = z_1^2$

解 判别规范形,只需确定二次型的秩及正、负惯性指数,一般可通过求二次型的矩阵 A 的特征值来确定.

f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

由 $|\lambda E - A| = \lambda^2(\lambda - 9) = 0$, 得 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 故 $r(A) = 1$, 正惯性指数 $p = 1$, 负惯性指数 $q = 0$, D 选项正确.

例 11 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$, 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为().

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

解法 1 由 f 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ 可知, A 的特征值为 $2, 1, -1$. 由已知 $P = (e_1, e_2, e_3)$ 知, $2, 1, -1$ 对应的特征向量依次为 e_1, e_2, e_3 , 故 e_3 是 -1 对应的特征向量, 而 $-e_3$ 仍是 -1 对应的特征向量, 从而当 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ 时, 二次型在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形应为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 故 A 选项正确.

解法 2 先求出正交矩阵 Q 与正交矩阵 P 的关系. 由于

$$Q = (e_1, -e_3, e_2) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

故

$$x = Qy = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ -y_2 \end{pmatrix}.$$

由已知, f 在 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 故 f 在 $x = Qy$ 下的标准形为

$$2y_1^2 + y_3^2 - (-y_2)^2 = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

从而 A 选项正确.

例 12 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$, 其中 $A^T = A$.

(1) 求 a, b 的值及正交矩阵 Q ;

(2) 求可逆矩阵 P , 使得 $A = P^T P$;

(3) 若正定矩阵 B 满足 $B^2 = A$, 求 B .

解 (1) 由已知, f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}.$$

依题设,

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

故 $a + a + a = 1 + 1 + 4$, 得 $a = 2$.

又相似矩阵有相同的特征值, A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$. 由 $|1 \cdot E - A| = 0$ 得 $b = 1$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 由 $(1 \cdot E - A)x = O$, 得 A 的特征向量为

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, -1, 2)^T \quad (\text{已正交})$$

对于 $\lambda_3 = 4$, 由 $(4E - A)x = O$, 得 A 的特征向量为

$$\alpha_3 = (1, 1, 1)^T.$$

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T.$$

故所求正交矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(2) 由(1)知,

$$x^T A x \stackrel{x=Qy}{=} y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2,$$

作可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

并记为 $y = Cz$, 故 $x^T A x \stackrel{x=QCz}{=} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

令 $P_1 = QC$, 则 $P_1^T A P_1 = E$, 故 $A = (P_1^T)^{-1} P_1^{-1} = (P_1^{-1})^T P_1^{-1}$.

令

$$P = P_1^{-1} = (QC)^{-1} = C^{-1}Q^{-1} = C^{-1}Q^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

则 P 可逆, 且 $A = P^T P$.

(3) 由(1)知, $Q^{-1}AQ = \Lambda$, 即 $A = Q\Lambda Q^{-1}$, 因为

$$\begin{aligned} B^2 = A &= Q\Lambda Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} B &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Q^T \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

为所求正定矩阵.

习题演练

一、选择题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ().

- A. 合同且相似 B. 合同但不相似
C. 不合同但相似 D. 既不合同, 也不相似

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为 ().

- A. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 设 A 是 n 阶方阵, 将 A 的第 i 列与第 j 列对换, 再交换第 i 行与第 j 行得到 B , 则 ().

- A. A 与 B 等价、相似且合同 B. A 与 B 相似、合同但不等价
C. A 与 B 相似, 但不合同 D. A 与 B 等价, 但不相似

D. ③

D. 柱面

(II) 可逆线性变换 $x = By$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形.

(8) 设 $D = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 A, B 分别为 m 阶、 n 阶对称矩阵, C 为 $m \times n$ 矩阵.

(I) 计算 $P^T D P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$;

(II) 利用(I)的结果判断矩阵 $B - C^T A^{-1} C$ 是否为正定矩阵, 并证明该结论.

(9) 设 A 是 n 阶实对称可逆矩阵, A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 求二次型 $x^T \begin{pmatrix} O & A \\ A & O \end{pmatrix} x$ 的标准形和正、负

惯性指数.

(10) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$ (a 为参数). 求:

(I) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

(11) 设 $A_{n \times n}$ 为实对称矩阵, $r(A) = n$, A_{ij} 是 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 中元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 的代数余子式,

二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{|A|} x_i x_j,$$

记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

(I) 写出二次型 f 的矩阵(或将 f 写成 $x^T B x$);

(II) 二次型 $g = x^T A x$ 与二次型 f 的规范形是否相同? 说明理由.

习题演练解答

一、选择题

(1) B.

解 由 $\sum_{i=1}^3 a_{ii} = 2 + 2 + 2 \neq \sum_{i=1}^3 b_{ii} = 1 + 1$ 知, A 与 B 不相似.

利用 A 与 B 合同的充分必要条件($p_A = p_B, q_A = q_B$) 判别 A 与 B 是否合同.

由 $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 3)^2 = 0$, 得 A 的特征值为 $3, 3, 0$;

由 $|\lambda E - B| = \lambda(\lambda - 1)^2 = 0$, 得 B 的特征值为 $1, 1, 0$, 故 $p_A = p_B, q_A = q_B$, 从而 A 与 B 合同.

(2) D.

解 设 A, B, C, D 选项中的矩阵分别为 B_1, B_2, B_3, B_4 , 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0,$$

得 $p_A = 1, q_A = 1$. 由

$$|\lambda E - B_4| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

知, D 选项正确.

(3) A.

解 由已知, $B = E_{i,j} A E_{i,j}$, 又由 $E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}, E_{i,j}^T = E_{i,j}$ 可知

$$B = E_{i,j} A E_{i,j} = E_{i,j}^{-1} A E_{i,j} = E_{i,j}^T A E_{i,j},$$

故 A 与 B 等价、相似且合同.

(4) C.

解 设 A 与 B 合同, 则存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = B$, 故 $r(A) = r(B)$, 且正、负惯性指数分别相同, 即 $p_A = p_B$. 反之, 若 $r(A) = r(B)$, 且 $p_A = p_B$, 则由

$$p_A + q_A = r(A), \quad p_B + q_B = r(B)$$

知, $q_A = q_B$, 故 A 与 B 合同.

③ 仅是充分条件, ④ 仅是必要条件. 故 C 选项正确.

(5) B.

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 由

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0,$$

得 A 的特征值为 $5, -1, -1$, 故 $f(x_1, x_2, x_3)$ 经正交变换后的标准形为 $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 从而 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 表示的二次曲面为 $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 2$, 是双叶双曲面.

二、填空题

(1) $-2 < \lambda < 1$.

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 其顺序主子式分别为

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = |A| = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2) > 0,$$

解得 $-2 < \lambda < 1$, 故 λ 的取值范围为 $-2 < \lambda < 1$.

(2) 2.

解 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 由于 $r(A) = 2$, 故二次型 f 的秩为 2.

注 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$ 不是坐标变换 (因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$), 不要误认为秩为 3.

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 由已知, A 的二次型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$ 在可逆线性变换 $x = Py$ 下化为 $f = \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 y_2^2 + \lambda_1 y_3^2$, 故该变换为

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3, \\ x_3 = 0 \cdot y_1 + y_2 + 0 \cdot y_3, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{从而 } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(4) y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

解 设 A 的特征值为 λ , 由 $A^2 + A = 2E$ 知 $\lambda^2 + \lambda = 2$, 故 $\lambda = -2$ 或 1 , 由于 $|A| = 4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, 故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$, 从而二次型 $x^T A x$ 的正惯性指数 $p = 1$, 负惯性指数 $q = 2$, 于是规范形为 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

三、解答题

(1) **证** 先检验 B 是对称矩阵, 有

$$B^T = (\lambda E + A^T A)^T = \lambda E + A^T A = B.$$

用定义法, 由

$$\begin{aligned} x^T B x &= x^T (\lambda E + A^T A) x = \lambda x^T x + x^T A^T A x \\ &= \lambda x^T x + (Ax)^T (Ax) \end{aligned}$$

可知, $\forall x \neq 0$, 有 $x^T x > 0, (Ax)^T (Ax) \geq 0$, 故当 $\lambda > 0$ 时, $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x = \lambda x^T x + (Ax)^T (Ax) > 0,$$

即 B 是正定矩阵.

(2) **解** 已知二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 9) = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$, 解得 $\alpha_1 = (2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-2, 0, 1)^T$.

将 α_1, α_2 正交化, 再单位化, 得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)^T, \gamma_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^T.$$

对于 $\lambda_3 = 9$, 由 $(9E - A)x = 0$, 解得 $\alpha_3 = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)^T$, 单位化得 $\gamma_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)^T$.

令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 则正交变换为 $x = Qy$, 标准形为 $9y_3^2$.

(3) **解** (I) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 由已知条件, 有

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = 2(-2a - b^2) = -12, \end{cases}$$

解得 $a = 1, b = 2$.

$$(II) \text{ 由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3) = 0,$$

得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 由 $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 1)^T$;

对于 $\lambda_3 = -3$, 由 $(-3\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得 $\alpha_3 = (1, 0, -2)^T$.

由于 α_1, α_2 已正交, 故只需单位化, 得

$$\gamma_1 = (0, 1, 0)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2)^T,$$

令 $\mathbf{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 则正交变换为 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, 标准形为 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

(4) 解 (I) 二次型的矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$. 由

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)[\lambda - (a + 1)][\lambda - (a - 2)],$$

得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$.

(II) 由 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$ 知, 正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 故 $\mathbf{A}$ 的特征值有 2 个为正, 1 个为 0, 又因为 $a - 2 < a < a + 1$, 所以 $a = 2$.

(5) 解 (I) 由

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda^2 - 1)[\lambda^2 - (y + 2)\lambda + 2y - 1] = 0,$$

并将 $\lambda = 3$ 代入, 得 $|3\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, 解得 $y = 2$, 故 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(II) 由于 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 故 $(\mathbf{A}\mathbf{P})^T(\mathbf{A}\mathbf{P}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}^2\mathbf{P}$, 且 $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

考虑二次型

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^2\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4 = x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_4^2,$$

令
$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4, \\ y_4 = x_4, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3 - \frac{4}{5}y_4, \\ x_4 = y_4, \end{cases}$$

取

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, 使得

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{9}{5}y_4^2,$$

$$\text{故 } (\mathbf{A}\mathbf{P})^T (\mathbf{A}\mathbf{P}) = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{P} = \text{diag}\left(1, 1, 5, \frac{9}{5}\right).$$

注 因为 $\mathbf{A}^2$ 为实对称矩阵, 所以也可先求 $\mathbf{A}^2$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 9$, 再分别求属于它们的特征向量, 再正交化、单位化, 得

$$\gamma_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \gamma_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \gamma_3 = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \gamma_4 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

令 $\mathbf{P} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 则 $\mathbf{P}$ 为正交矩阵, $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, 故

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{P} = \text{diag}(1, 1, 1, 9),$$

由此可见, 题中的 $\mathbf{P}$ 与对角矩阵都不是唯一的.

(6) **解** 二次型 f 的矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$.

由已知, $\mathbf{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$, 故 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

又

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - a^2),$$

将 $\lambda_1 = 1$ 代入, 得 $|1\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, 即 $a^2 - 4 = 0$, 故 $a = 2$.

对于 $\lambda_1 = 1$, 由 $(1\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得 $\alpha_1 = (0, 1, -1)^T$;

对于 $\lambda_2 = 2$, 由 $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得 $\alpha_2 = (1, 0, 0)^T$;

对于 $\lambda_3 = 5$, 由 $(5\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得 $\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$.

对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 得

$$\gamma_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \gamma_2 = (1, 0, 0)^T, \gamma_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

令 $\mathbf{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 则正交变换为 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$.

(7) **解** (I)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由已知, $r(\mathbf{A}) = p + q = 2$, 故 $|\mathbf{A}| = -(a-1)^2(a+2) = 0$, 得 $a = 1, a = -2$.

当 $a = 1$ 时, $r(\mathbf{A}) = 1$, 不合题意, 故 $a = -2$, 从而 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(II) 由(I)知, 二次型为

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

用配方法, 得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3) + (x_2 + 2x_3)^2 - \\ &\quad (x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 3x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 3(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) \\
&= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 3(x_2 + x_3)^2.
\end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{即 } y = Cx, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C \text{ 可逆, 则}$$

$$x = C^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

为所求可逆线性变换, 故

$$f = x^T A x \xrightarrow{x = C^{-1}y} (C^{-1}y)^T A C^{-1}y = y^T (C^{-1})^T A C^{-1}y.$$

$$\text{令 } B = C^{-1}, \text{ 则 } B^T A B = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 标准形为 } y_1^2 - 3y_2^2.$$

$$(8) \text{ 解 } (I) \text{ 由于 } P^T = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^T A^{-1} & E_n \end{pmatrix}, \text{ 且}$$

$$(-A^{-1}C)^T = -C^T(A^{-1})^T = -C^T(A^T)^{-1} = -C^T A^{-1},$$

故

$$\begin{aligned}
P^T D P &= \begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^T A^{-1} & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & C \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(II) 由 D 是对称矩阵知, $P^T D P$ 也是对称矩阵, 故 $B - C^T A^{-1}C$ 是对称矩阵.

由 (I) 知, D 与 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{pmatrix}$ 合同, 且 D 正定, 故 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{pmatrix}$ 也是正定矩阵, 从而对任意

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \neq 0, \text{ 有}$$

$$(0, x^T) \begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = x^T (B - C^T A^{-1}C) x > 0,$$

故 $B - C^T A^{-1}C$ 为正定矩阵.

$$(9) \text{ 解 } \text{令 } B = \begin{pmatrix} O & A \\ A & O \end{pmatrix}, \text{ 则 } B \text{ 是实对称矩阵. 由}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda E - B| &= \begin{vmatrix} \lambda E & -A \\ -A & \lambda E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E - A & \lambda E - A \\ -A & \lambda E \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda E - A & O \\ -A & \lambda E + A \end{vmatrix} = |\lambda E - A| |\lambda E + A| = 0,
\end{aligned}$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $-A$ 的特征值为 $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$, 故 B 的特征值为 $\pm \lambda_1, \pm \lambda_2, \dots, \pm \lambda_n$,

从而二次型可经正交变换化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 - \lambda_{n+1} y_{n+1}^2 - \cdots - \lambda_n y_{2n}^2.$$

又因为 A 可逆, 所以 A 与 $-A$ 的特征值不为 0, 从而正惯性指数 $p = n$, 负惯性指数 $q = n$.

(10) 解 (I) 依题设, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_3 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a - 2.$

当 $a \neq 2$ 时, 方程组 (1) 只有零解, 即 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 只有零解;

当 $a = 2$ 时, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组 (1) 的基础解系为 $(-2, -1, 1)^T$, 故 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解为 $k(-2, -1, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.

(II) 当 $a \neq 2$ 时, 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1 + ax_3. \end{cases} \quad (2)$$

由 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \neq 0$ 知, 方程组 (2) 是可逆坐标变换, 故规范形为 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

当 $a = 2$ 时, 用配方法, 可得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2, \end{aligned}$$

故规范形为 $f = y_1^2 + y_2^2$.

注 当 $a = 2$ 时, 不能令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1 + 2x_3. \end{cases} \quad (3)$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 所以线性变换 (3) 不是可逆的.

(11) 解 (I) 依题设, 有

$$f = (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{(A_{ij})_{n \times n}}{|A|} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由 $A^T = A$ 知 $A_{ij} = A_{ji}$, 故

$$f = x^T \frac{A^*}{|A|} x = x^T A^{-1} x,$$

且 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, 从而 A^{-1} 是实对称矩阵, 于是二次型 f 的矩阵为 A^{-1} .

(II) 由于

$$(A^{-1})^T A A^{-1} = (A^T)^{-1} A A^{-1} = A^{-1} A A^{-1} = A^{-1},$$

即 A 与 A^{-1} 合同, 故二次型 g 与 f 具有相同的规范形.